2014.09.06

النهايات (les limites)

التمرين 1

احسب النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \to -\infty} (-3x^4 + 7x - 2)$

2) $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x + 1)$

3) $\lim_{x \to -\infty} (-4x^2 - 2)$

1) لدينا: $\lim_{x \to -\infty} (-3x^4 + 7x - 2) = \lim_{x \to -\infty} (-3x^4) = -\infty$

2) لدينا $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

3) لدينا $\lim_{x \to -\infty} (-4x^2 - 2) = \lim_{x \to -\infty} (-4x^2) = -\infty$

ملاحظة:

نهاية كثير حدود لما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية الحد الذي له أعلى درجة.

التمرين 2

احسب النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \to -\infty} (2|x|^3 - 5x + x^3 + 2)$

2) $\lim_{|x| \to \infty} (x^3 - |x^3| + x^2 - |x|)$

3) $\lim_{|x| \to \infty} (|x - 1| + x^2)$

ملاحظة:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

1) لدينا

$\lim_{x \to -\infty} (2|x|^3 - 5x + x^3 + 2) =$

$= \lim_{x \to -\infty} (2(-x)^3 - 5x + x^3 + 2)$

$= \lim_{x \to -\infty} (-x^3 - 5x + 2)$

$= \lim_{x \to -\infty} (-x^3)$

$= +\infty$

لأن لما $x \to -\infty$ فإن: $x < 0$ أي: $|x| = -x$

ملاحظة:

• $|x| \to \infty$ تعني: $x \to +\infty$ و $x \to -\infty$

• $-x \to \infty$ تعني $x \to -\infty$

ملاحظة:

إشارة x^3 من اشارة x

إشارة x^{2k+1} حيث $k \in \mathbb{N}$ من إشارة x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$	

٢) توجد حالتان: $x \to -\infty$ و $x \to +\infty$

• لدينا

$$\lim_{x \to -\infty}(x^3 - |x^3| + x^2 - |x|) = \lim_{x \to -\infty}(x^3 + x^3 + x^2 + x) = \lim_{x \to -\infty}(2x^3 + x^2 + x) = \lim_{x \to -\infty}(2x^3) = -\infty$$

لأن لما $x \to -\infty$ فإن: $x < 0$ أي $|x| = -x$ أي: $|x^3| = -x^3$

•• لدينا

$$\lim_{x \to +\infty}(x^3 - |x^3| + x^2 - |x|) = \lim_{x \to +\infty}(x^3 - x^3 + x^2 - x) = \lim_{x \to +\infty}(x^2 - x) = \lim_{x \to +\infty}(x^2) = +\infty$$

لأن لما $x \to +\infty$ فإن: $x > 0$ أي: $|x| = x$ أي: $|x^3| = x^3$

ملاحظة:

• $x^2 \geq 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

• $x^{2k} \geq 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ حيث $k \in \mathbb{N}$

$|x^2| = x^2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	0	$+$	

3) لدينا (ط1)

$|x-1| = \begin{cases} x-1 ; & x \geq 1 \\ -(x-1) ; & x \leq 1 \end{cases}$ أي توجد حالتان

•) $\lim_{x \to -\infty} (|x-1| + x^2) = \lim_{x \to -\infty} (-x+1+x^2) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

••) لدينا $\lim_{x \to +\infty} (|x-1| + x^2) = \lim_{x \to +\infty} (x-1+x^2) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

(ط2) لدينا $\lim_{|x| \to \infty} (|x-1| + x^2) = +\infty$

لأن $\lim_{|x| \to \infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{|x| \to \infty} |x-1| = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} |x-1| = \lim_{x \to -\infty} [-(x-1)] = \lim_{x \to -\infty} (-x+1) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} |x-1| = \lim_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$

التمرين 3

احسب النهايات الآتية

1) $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{1}{x-2}$

2) $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{1}{x-2}$

3) $\lim_{x \overset{<}{\to} 3} \frac{1}{3-x}$

4) $\lim_{x \overset{>}{\to} 3} \frac{1}{3-x}$

ملاحظة:

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty$

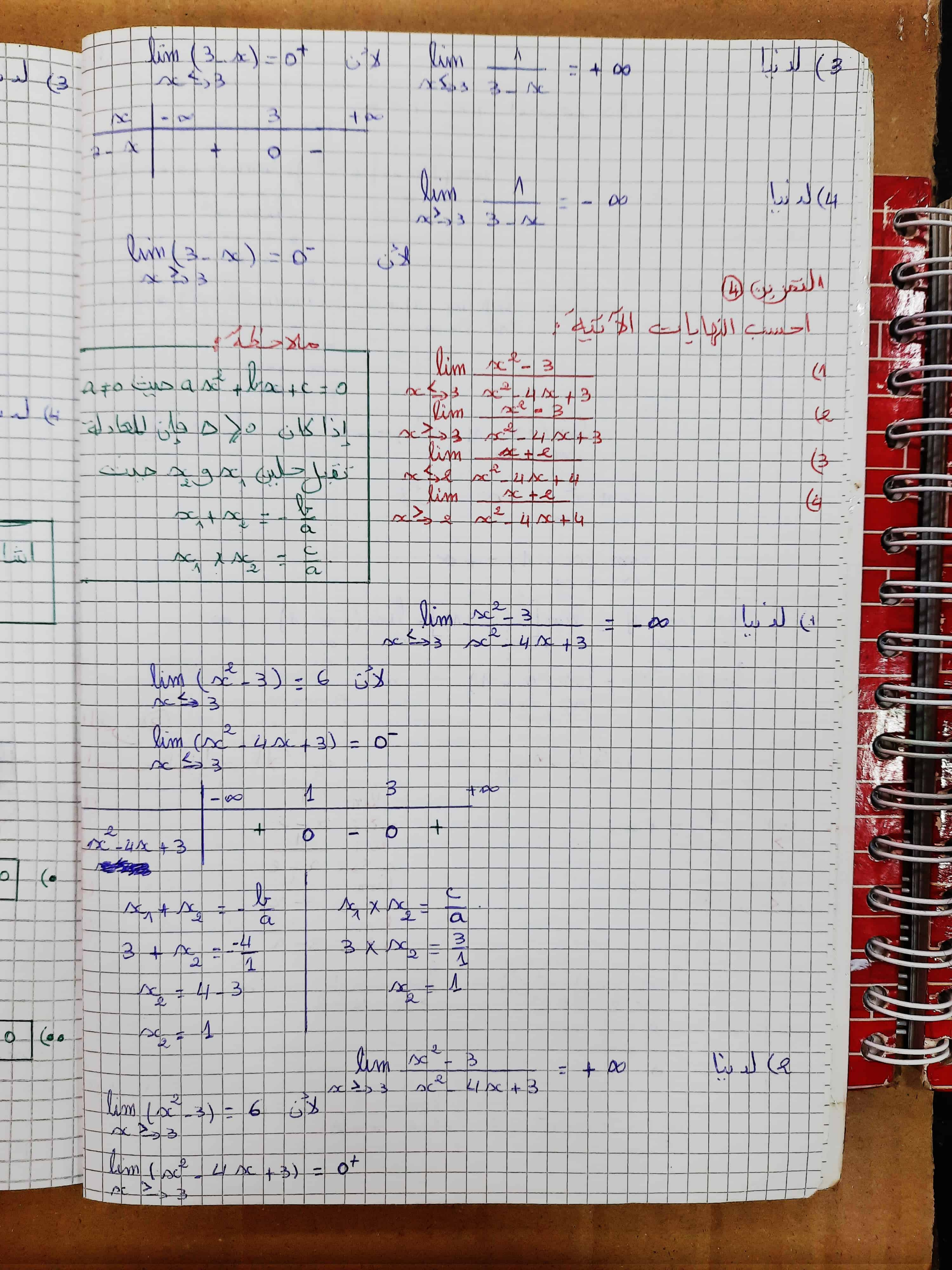
$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x} = -\infty$

1) $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{1}{x-2} = +\infty$ لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} (x-2) = 0^+$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

2) لدينا $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{1}{x-2} = -\infty$

لأن $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} (x-2) = 0^-$



3) لدينا

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 3} \frac{1}{3-x} = +\infty$$

لأن

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 3} (3-x) = 0^+$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$	

4) لدينا

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 3} \frac{1}{3-x} = -\infty$$

لأن

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 3} (3-x) = 0^-$$

التمرين ④

احسب النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \underset{<}{\to} 3} \frac{x^2-3}{x^2-4x+3}$

2) $\lim_{x \underset{>}{\to} 3} \frac{x^2-3}{x^2-4x+3}$

3) $\lim_{x \underset{<}{\to} 2} \frac{x+2}{x^2-4x+4}$

4) $\lim_{x \underset{>}{\to} 2} \frac{x+2}{x^2-4x+4}$

ملاحظة:

$ax^2+bx+c=0$ حيث $a \neq 0$

إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين x_1 و x_2 حيث

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

1) لدينا

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 3} \frac{x^2-3}{x^2-4x+3} = -\infty$$

لأن

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 3} (x^2-3) = 6$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 3} (x^2-4x+3) = 0^-$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$3 + x_2 = -\frac{-4}{1}$$

$$x_2 = 4-3$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$3 \times x_2 = \frac{3}{1}$$

$$x_2 = 1$$

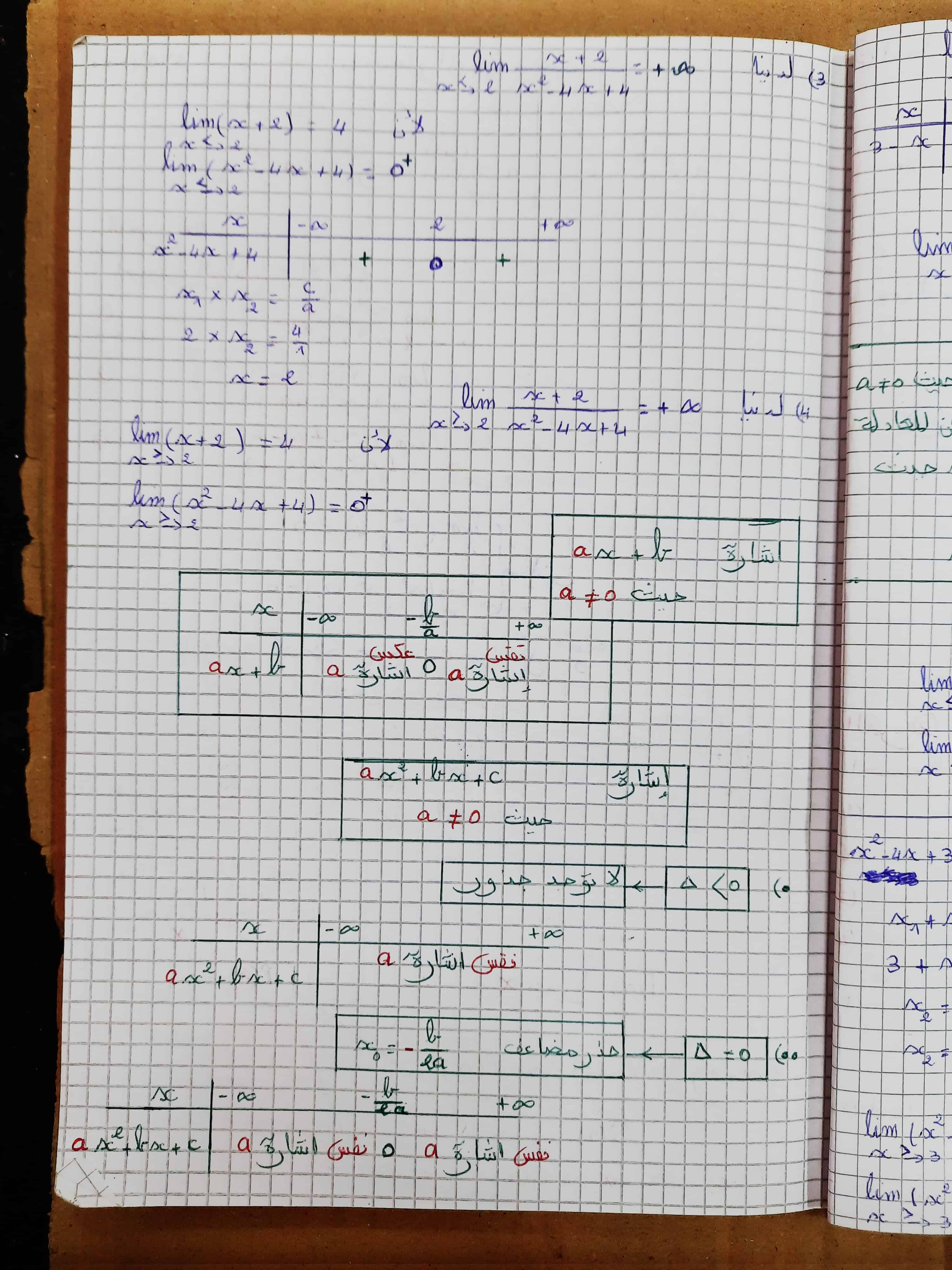
2) لدينا

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 3} \frac{x^2-3}{x^2-4x+3} = +\infty$$

لأن

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 3} (x^2-3) = 6$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 3} (x^2-4x+3) = 0^+$$



3) لدينا $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{x+2}{x^2-4x+4} = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} (x+2) = 4$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} (x^2-4x+4) = 0^+$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x^2-4x+4		+	0	+	

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

$2 \times x_2 = \frac{4}{1}$

$x = 2$

4) لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{x+2}{x^2-4x+4} = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} (x+2) = 4$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} (x^2-4x+4) = 0^+$

إشارة $ax+b$ حيث $a \neq 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

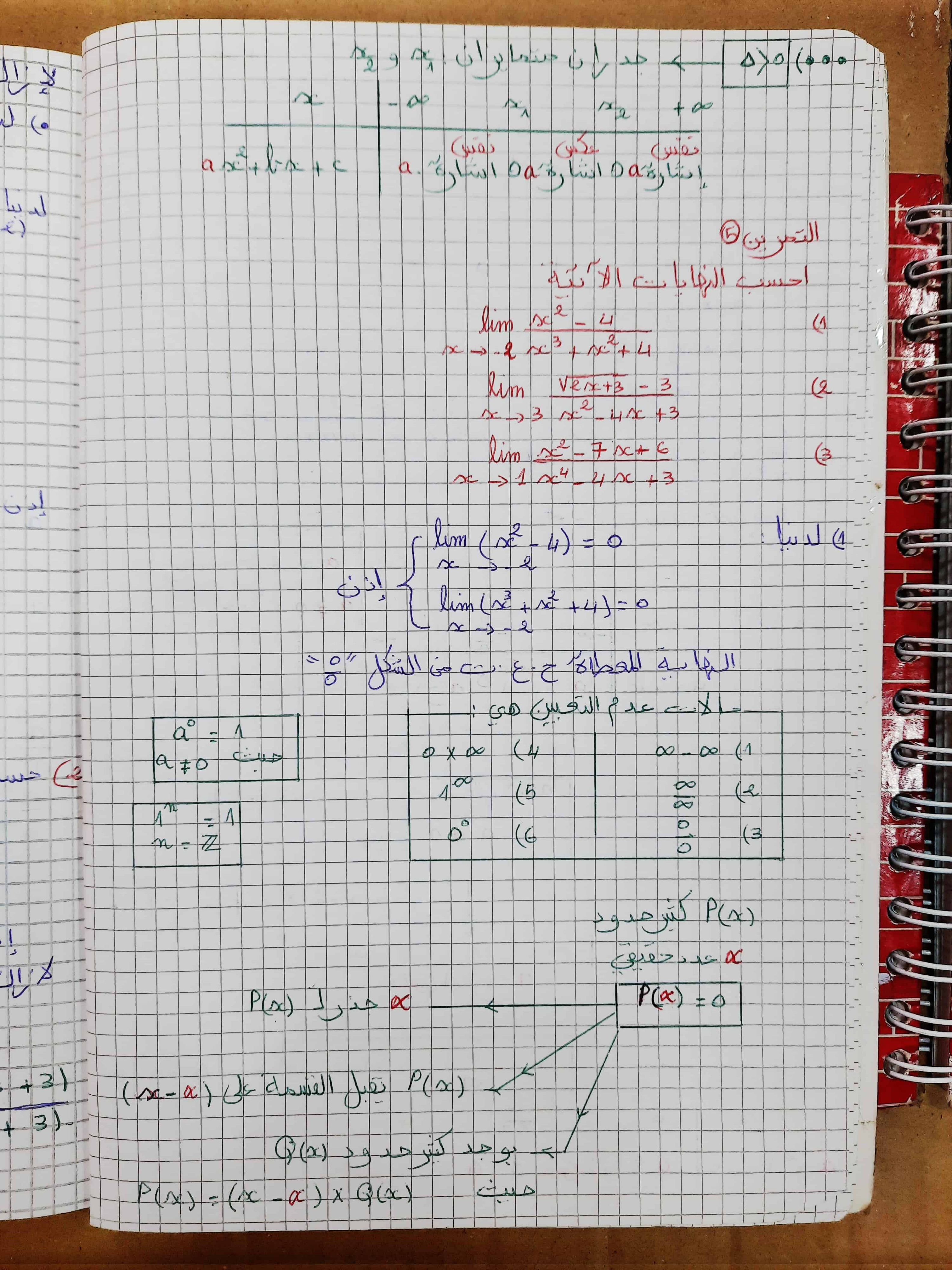
إشارة ax^2+bx+c حيث $a \neq 0$

•) $\Delta < 0$ ← لا توجد جذور

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		نفس إشارة a	

••) $\Delta = 0$ ← جذر مضاعف $x_0 = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c		نفس إشارة a	0	نفس إشارة a	



....) $\Delta > 0$ ← جذران متمايزان x_1 و x_2

x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a (نفس) 0 عكس إشارة a (عكس) 0 إشارة a (نفس).

التمرين 5

احسب النهايات الآتية

1) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{x^3+x^2+4}$

2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-4x+3}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-7x+6}{x^4-4x+3}$

1) لدينا:

$\lim\limits_{x \to -2} (x^2-4) = 0$

$\lim\limits_{x \to -2} (x^3+x^2+4) = 0$

إذن

النهاية المعطاة ح ع ت من الشكل "$\frac{0}{0}$"

حالات عدم التعيين هي:

1) $\infty - \infty$	4) $0 \times \infty$
2) $\frac{\infty}{\infty}$	5) 1^{∞}
3) $\frac{0}{0}$	6) 0^0

$a^0 = 1$ حيث $a \neq 0$

$1^n = 1$ ، $n \in \mathbb{Z}$

$P(x)$ كثير حدود

α عدد حقيقي

$P(\alpha) = 0$ ← α جذر لـ $P(x)$

← $P(x)$ تقبل القسمة على $(x-\alpha)$

← يوجد كثير حدود $Q(x)$

حيث $P(x) = (x-\alpha) \times Q(x)$

لإزالة ح.ع.ت نحلل البسط و المقام

• لدينا $x^2-4 = x^2 - 2^2$

$= (x-2)(x+2)$

لدينا

$x^3 + x^2 + 4 = (x+2)(x^2 - x + 2)$

طريقة هورنر

	1	1	0	4	معاملات $P(x)$
$-2\times$	↓	-2	2	-4	
	1	-1	2	0	معاملات $Q(x)$

أي

$Q(x) = x^2 - x + 2$

إذن

$$\frac{x^2-4}{x^3+x^2+4} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2-x+2)}$$

$$= \frac{x-2}{x^2-x+2}$$

ومنه

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^3+x^2+4} = \lim_{x\to -2} \frac{x-2}{x^2-x+2}$$

$$= \frac{-4}{8}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a\times c}{b\times c}$$

$c \neq 0$ مع

ج) حساب

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-4x+3}$$

بما أن $\lim_{x\to 3} (\sqrt{2x+3}-3) = 0$

$\lim_{x\to 3} (x^2 - 4x + 3) = 0$

إذن لدينا ح.ع.ت من الشكل $"\frac{0}{0}"$

لإزالة ح.ع.ت نكتب:

* مرافق $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ هو: $\sqrt{A} - \sqrt{B}$
* مرافق $\sqrt{A} - B$ هو: $\sqrt{A} + B$
* مرافق $\sqrt{A}$ هو: $\sqrt{A}$
* مرافق $(\sqrt{A}+B) - C$ هو: $(\sqrt{A}+B)+C$
* مرافق $\sqrt{A} + (B-C)$ هو: $\sqrt{A} - (B-C)$

بعد ضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$$\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-4x+3} = \frac{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{2x+3}+3)}$$

ملاحظة:

$ax^2+bx+c=0$ حيث $(a\neq 0)$

• إذا كان $(a+b+c=0)$ فإن:

(حل ظاهر)
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

• إذا كان $(b = a+c)$ فإن:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

$(\Delta > 0)$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$(\Delta = 0)$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$= \frac{(\sqrt{2x+3})^2-(3)^2}{(x^2-4x+3)(\sqrt{2x+3}+3)}$$

$$= \frac{2x+3-9}{(x^2-4x+3)(\sqrt{2x+3}+3)}$$

$$= \frac{2x-6}{(x^2-4x+3)(\sqrt{2x+3}+3)}$$

$$= \frac{2(x-3)}{(x-1)(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}$$

$$= \frac{2}{(x-1)(\sqrt{2x+3}+3)}$$

ومنه

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3} \frac{2}{(x-1)(\sqrt{2x+3}+3)} = \frac{2}{2\times 6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

مع $a \neq 0$

3) حساب $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-7x+6}{x^4-4x+3}$

لدينا ح ع ت من الشكل $\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

لأن

$$\lim_{x\to 1} (x^2-7x+6) = 0$$

$$\lim_{x\to 1} (x^4-4x+3) = 0$$

لدينا لإزالة ح ع ت نحلل كلا من البسط والمقام

$$x^2-7x+6 = (x-1)(x-6)$$

طريقة هورنر

$$x^4-4x+3 = (x-1)(x^3+x^2+x-3)$$

	1	0	0	-4	3	معاملات $(P(x))$
1x	↓	1	1	1	-3	
	1	1	1	-3	0	معاملات $Q(x)$

أي

$$Q(x) = x^3+x^2+x-3$$

(2ب) طريقة القسمة الإقليدية

$$\begin{array}{l|l} x^4 \quad -4x+3 & x-1 \\ \hline -x^4+x^3 & x^3+x^2+x-3 \\ x^3 & \\ -x^3+x^2 & \\ x^2-4x & \\ -x^2+x & \\ -3x+3 & \\ +3x-3 & \\ 0 & \end{array}$$

ومنه

$$\frac{x^2-7x+6}{x^4-4x+3} = \frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)}$$

$$= \frac{x-6}{x^3+x^2+x-3}$$

نحلل x^3+x^2+x-3

طريقة هورنر

	1	1	1	-3	معاملات $R(x)$
1×	↓	1	2	3	
	1	2	3	0	معاملات $G(x)$

أي $G(x) = x^2+2x+3$

ومنه

$$x^3+x^2+x-3 = (x-1)(x^2+2x+3)$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x^2+2x+3		$+$		$+$	لأن $\Delta<0$
$(x-1)(x^2+2x+3)$		$-$	0	$+$	

منه توجد حالتان

*) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x^2-7x+6}{x^4-4x+3} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x-6}{x^3+x^2+x-3}$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} (x-6) = -5$ لأن $= +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} (x^3+x^2+x-3) = 0^-$

••) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x^2-7x+6}{x^4-4x+3} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x-6}{x^3+x^2+x-3}$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (x-6) = -6$ إذن $= -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (x^3+x^2+x-3) = 0^+$

التمرين ⑥

احسب النهايات الآتية:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2-7x+1}{x^2+x+6}$

2) $\lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{x}{x^3+4x^2+1}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3-x+2}{x^2-7}$

1) لدينا

$$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2-7x+1}{x^2+x+6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x^2}$$

$$= 3$$

2) لدينا

$$\lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{x}{x^3+4x^2+1} = \lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{x}{x^3}$$

$$= \lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{1}{x^2}$$

$$= 0$$

3)

$$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3-x+2}{x^2-7} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2}$$

$$= \lim\limits_{x \to -\infty} x$$

$$= -\infty$$

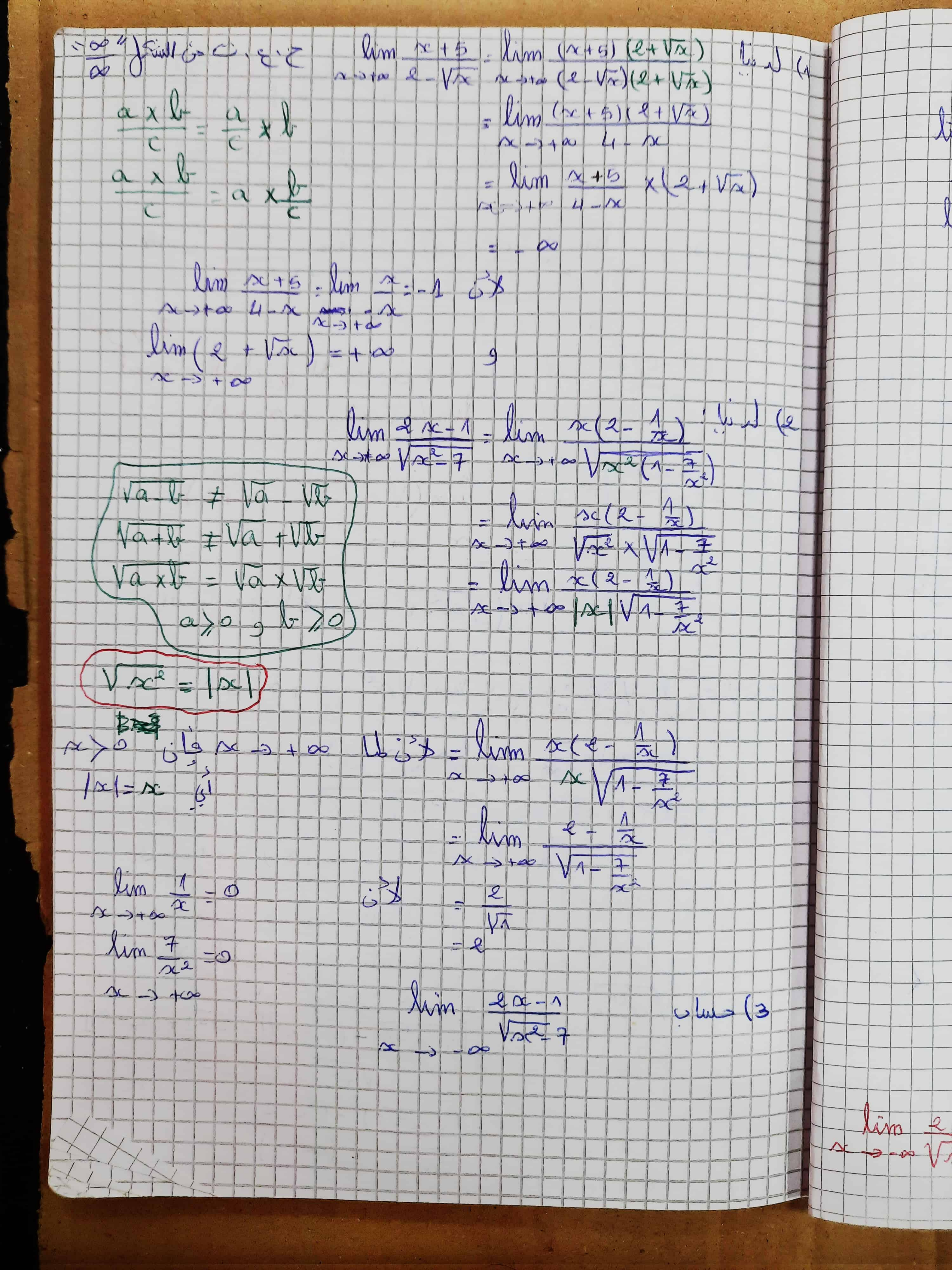
التمرين ⑦

احسب النهايات الآتية

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+5}{2-\sqrt{x}}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-7}}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-7}}$



ح ع ت من الشكل "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times b$$

$$\frac{a \times b}{c} = a \times \frac{b}{c}$$

1) لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+5}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+5)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+5)(2+\sqrt{x})}{4-x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+5}{4-x} \times (2+\sqrt{x})$$

$$= -\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+5}{4-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-x} = -1$

و $\lim_{x \to +\infty} (2+\sqrt{x}) = +\infty$

2) لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-7}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{7}{x^2})}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}$$

$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$a \geq 0$ و $b \geq 0$

$\sqrt{x^2} = |x|$

بما أن $x \to +\infty$ فإن $x > 0$

أي $|x| = x$

إذن

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1}}$$

$$= 2$$

لأن

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{7}{x^2} = 0$

3) حساب

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-7}}$$

لدينا $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-7}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x(2-\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}$ ح ع ت $\frac{\infty}{\infty}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}$ لأن لما $x\to-\infty$ فإن $x<0$ أي $|x|=-x$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}$ لأن $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{x^2}=0$

$= -2$

التمرين 2 :

احسب النهايتين الآتيتين :

1- $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x+2\right)$

2- $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x+2\right)$

1) لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x+2\right)=+\infty$

لأن $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$ (لأن) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}$ (علاحظة)

$= \lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

$= +\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$

2) حساب $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x+2\right)$

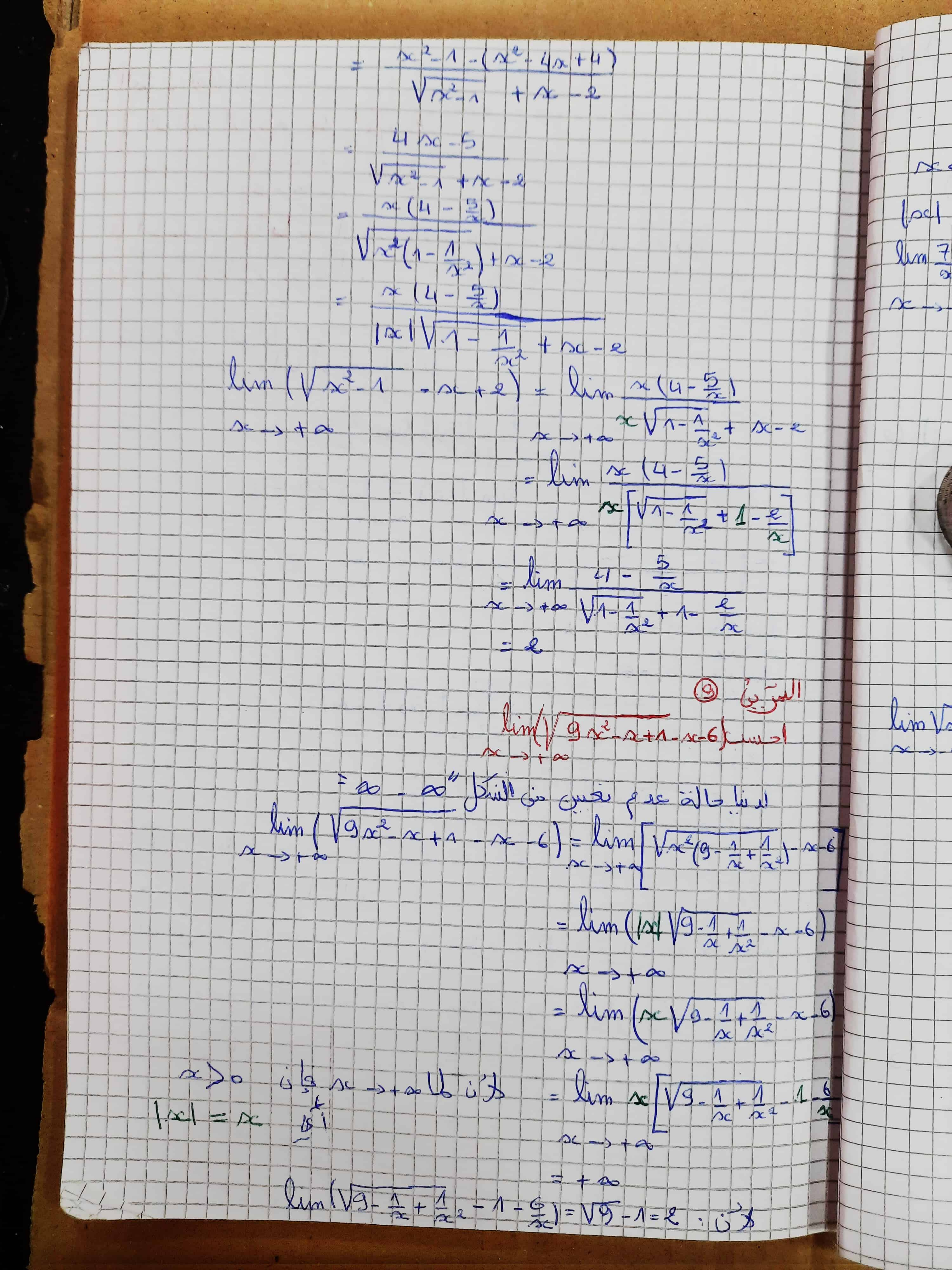
لدينا ح ع ت من الشكل "$\infty-\infty$"

لإزالة ح ع ت نكتب

$$\sqrt{x^2-1}-x+2=\sqrt{x^2-1}-(x-2)$$

$$=\frac{\left[\sqrt{x^2-1}-(x-2)\right]\left[\sqrt{x^2-1}+(x-2)\right]}{\sqrt{x^2-1}+(x-2)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-1}+(x-2)}$$



$$= \frac{x^2-1-(x^2-4x+4)}{\sqrt{x^2-1}+x-2}$$

$$= \frac{4x-5}{\sqrt{x^2-1}+x-2}$$

$$= \frac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+x-2}$$

$$= \frac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x+2\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x-2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}{x\left[\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}}$$

$$= 2$$

التمرين ⑨

احسب $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-x+1}-x-6\right)$

لدينا حالة عدم تعيين من الشكل "$\infty - \infty$"

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-x+1}-x-6\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2\left(9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x-6\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x-6\right)$$

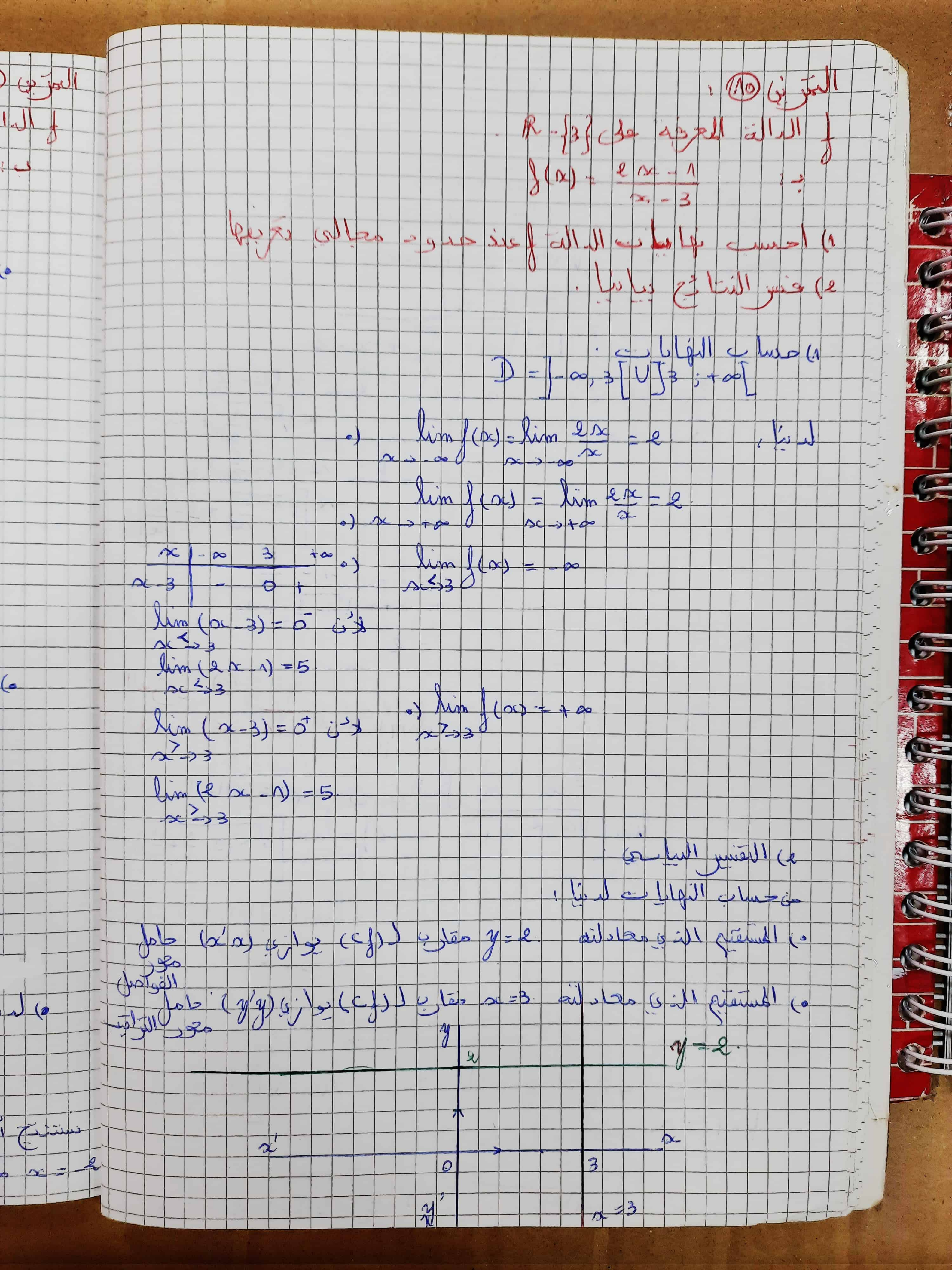
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x-6\right)$$

لأن لما $x\to+\infty$ فإن $x>0$ أي $|x| = x$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1-\frac{6}{x}\right]$$

$$= +\infty$$

لأن: $\lim\left(\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1-\frac{6}{x}\right) = \sqrt{9}-1 = 2$



التمرين (15) :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ ب: $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

1) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجالي تعريفها

2) فسر النتائج بيانيا.

1) حساب النهايات:

$$D =]-\infty, 3[\cup]3 ; +\infty[$$

لدينا:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$
- $\lim_{x \overset{<}{\to} 3} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

لأن: $\lim_{x \overset{<}{\to} 3} (x-3) = 0^-$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 3} (2x-1) = 5$

- $\lim_{x \overset{>}{\to} 3} f(x) = +\infty$

لأن: $\lim_{x \overset{>}{\to} 3} (x-3) = 0^+$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 3} (2x-1) = 5$

2) التفسير البياني

من حساب النهايات لدينا:

- المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب لـ (C_f) يوازي $(x'x)$ حامل محور الفواصل
- المستقيم الذي معادلته $x=3$ مقارب لـ (C_f) يوازي $(y'y)$ حامل محور التراتيب

التمرين (٨٨)

f الدالة المعرفة على $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

بـ : $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-4}}$

عين المستقيمات المقاربة لـ (C_f) منحنى الدالة f.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(2-\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$ ح.ع.ت "$\frac{\infty}{\infty}$"

(ارجع للتمرين المشابه رقم 7)

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(2-\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$

$= -2$

إذن المستقيم الذي معادلته $y=-2$ مقارب لـ (C_f)

يوازي $(x'x)$ (عند $-\infty$ أو بجوار $-\infty$)

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(2-\frac{1}{x})}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$

$= 2$

إذن المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب لـ (C_f) يوازي $(x'x)$ (عند $+\infty$ أو بجوار $+\infty$)

• لدينا $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2} f(x) = \lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-4}}$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2} (2x-1) = -5$ لأن

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2} \sqrt{x^2-4} = 0^+$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=-2$ مقارب لـ (C_f) يوازي $(y'y)$

---

x | $x-3$

$\lim$ (... $x\overset{<}{\to}$

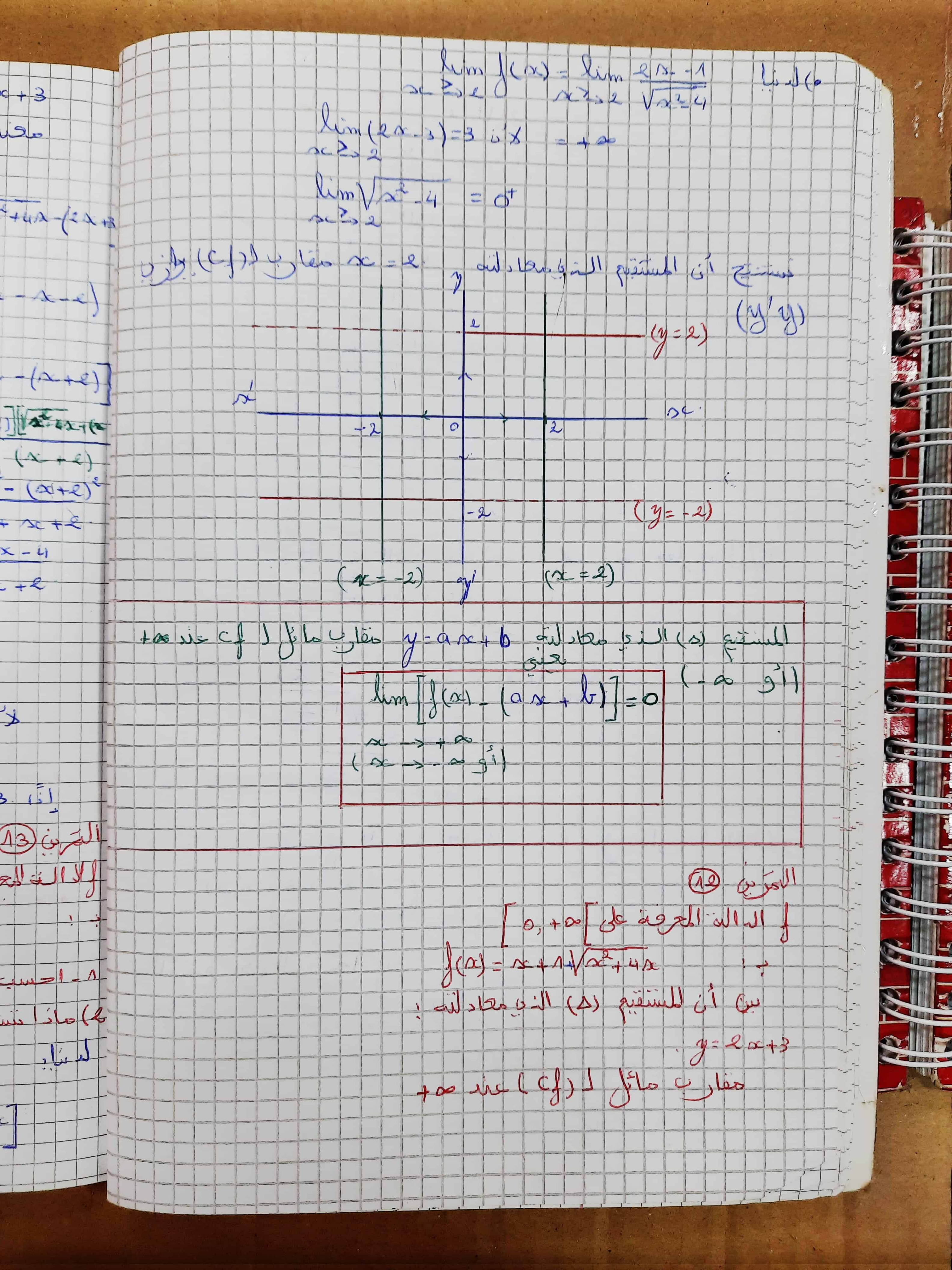
$\lim$ (... $x\overset{<}{\to}$

$\lim$ (... $x\overset{>}{\to}$

$\lim$ (... $x\overset{>}{\to}$

حامل محور الفواصل

حامل محور التراتيب


لدينا
lim f(x) = lim (2x-1)/√(x²-4)
x → 2 >
lim (2x-1) = 3
lim √(x²-4) = 0+
= +∞
نستنتج أن المستقيم الذي معادلته x = 2 مقارب لـ (Cf) يوازي (y'y)
(y=2)
(y=-2)
(x=-2)
(x=2)
-2
0
2
-2
المستقيم (Δ) الذي معادلته y = ax + b مقارب مائل لـ Cf عند +∞ (أو -∞)
يعني
lim [f(x) - (ax + b)] = 0
x → +∞
(أو x → -∞)
التمرين 12
f الدالة المعرفة على [0, +∞[
بـ: f(x) = x + 1 + √(x²+4x)
بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته:
y = 2x + 3
مقارب مائل لـ (Cf) عند +∞

$(\Delta): y = 2x + 3$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

معناه: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x+3)] = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x+3)] = \lim_{x \to +\infty} [x + 1 + \sqrt{x^2+4x} - (2x+3)]$$

ح ع ت من الشكل "$\infty - \infty$" $= \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+4x} - x - 2)$

$$= \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2+4x} - (x+2)]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{[\sqrt{x^2+4x} - (x+2)][\sqrt{x^2+4x} + (x+2)]}{\sqrt{x^2+4x} + (x+2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x})^2 - (x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2+4x} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2+4x} + x + 2}$$

$$= 0$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+4x} + x + 2) = +\infty$

إذا: $(\Delta): y = 2x + 3$ مقارب مائل لـ C_f عند $+\infty$

التمرين 13

الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$

بـ: $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{x+2}$

1- احسب $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - 5x]$

2) ماذا نستنتج بالنسبة لـ (C_f) منحنى الدالة f ؟

الحل:

$D_f =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$

$$\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - 5x] = \lim_{|x| \to +\infty} \left[\frac{5x^2 - 3x + 1}{x+2} - 5x\right]$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1 - 5x(x+2)}{x+2}$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{-13x + 1}{x+2}$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{-13x}{x}$$

$$= -13$$

ج/ الاستنتاج :

بما أن $\lim_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - 5x\right] = -13$

إذن $\lim_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - 5x\right] + 13 = 0$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - 5x + 13\right] = 0$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - (5x - 13)\right] = 0$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y = 5x - 13$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

التمرين (14) :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$$

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c ، d حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$$

2) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

3) حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

نتيجة

إذا كانت $f(x) = ax + b + g(x)$

و $\lim_{|x| \to +\infty} g(x) = 0$

فإن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f)

عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

1) تعيين a ، b ، c ، d

ط1)

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{ax(x+1)^2 + b(x+1)^2 + cx + d}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{ax(x^2+2x+1) + b(x^2+2x+1) + cx + d}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{ax^3 + 2ax^2 + ax + bx^2 + 2bx + b + cx + d}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2} = \frac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (a+2b+c)x + b + d}{(x+1)^2}$$

وبالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 3 \\ a + 2b + c = 6 \\ b + d = 3 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 3 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

ط2) طريقة القسمة الإقليدية

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 6x + 3 & x^2 + 2x + 1 \\ -x^3 - 2x^2 - x & \overline{x + 1} \\ \hline x^2 + 5x + 3 & \\ -x^2 - 2x - 1 & \\ \hline 3x + 2 & \end{array}$$

ومنه $f(x) = x + 1 + \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

أي

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 3 \\ d = 2 \end{cases}$$

2) الإستنتاج

بما أن

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

و

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{3x+2}{(x+1)^2} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

المستقيم الذي معادلته $y = x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

3) تحديد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) الذي معادلته $y = ax+b$ نحسب الفرق $f(x) - y$ ثم ندرس اشارته

لدينا:

$$f(x) - y = x + 1 + \frac{3x+2}{(x+1)^2} - (x+1)$$

$$= \frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

ندرس إشارة $f(x) - y$

x		-1		$-\frac{2}{3}$	
$3x+2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$f(x)-y = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$	$-$	‖	$-$	0	$+$
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

$(C_f) \cap (\Delta) = \{A\}$

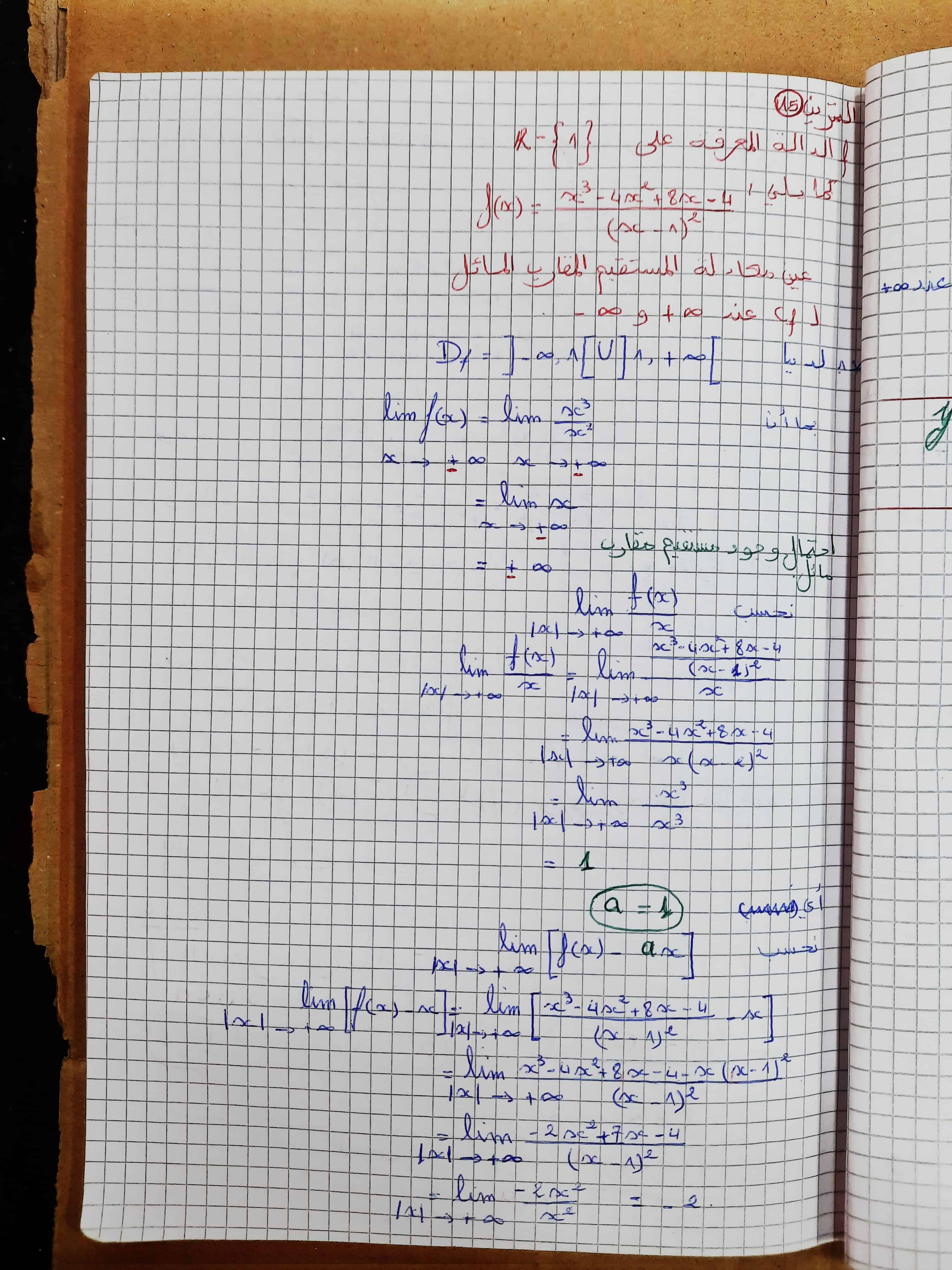
$A\left(-\frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$

من أجل $x = -\frac{2}{3}$

$y = x + 1$

$= -\frac{2}{3} + 1$

$= \frac{1}{3}$



التمرين (15)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

عين معادلة المستقيم المقارب المائل لـ C_f عند $+\infty$ و $-\infty$.

لدينا $D_f =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

بما أن

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty} x=\pm\infty$$

احتمال وجود مستقيم مقارب مائل

نحسب $\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}}{x}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3-4x^2+8x-4}{x(x-1)^2}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}$$

$$=1$$

أي $a=1$

نحسب $\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-ax]$

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}-x\right]$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3-4x^2+8x-4-x(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-2x^2+7x-4}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=-2.$$

أي: $b = -2$

إذن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f)

عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

ط) لدينا

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 8x - 4 & x^2 - 2x + 1 \\ -x^3 + 2x^2 - x & \overline{x - 2} \\ \hline 0 - 2x^2 + 7x - 4 & \\ + 2x^2 - 4x + 2 & \\ \hline 3x - 2 & \end{array}$$

ومنه $f(x) = x - 2 + \dfrac{3x - 2}{(x-1)^2}$

وبما أن $\lim\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{3x - 2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{3x}{x^2} = \lim\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{3}{x} = 0$

إذن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب مائل لـ C_f

عند $+\infty$ أو $-\infty$.

ملاحظة:

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$$

$(\Delta): y = 2x + 3$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

$(\Delta'): y = -1$ مقارب لـ (C_f) يوازي $(x'x)$ عند $-\infty$

العدد المشتق

تعريف:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

a عدد حقيقي من I

f يقبل الاشتقاق عند a يعني: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

حيث $l \in \mathbb{R}$

l يسمى العدد المشتق للدالة f عند a ونرمز له بالرمز

$$f'(a) = l$$

التمرين (16)

باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

1) حساب $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}$

ح ع ت من الشكل "$\frac{0}{0}$"

نضع $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ حيث $D_f =]-\infty ; +\infty[$

(أي $f(1) = \sqrt{2}$)

بما أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

(وبصفة خاصة قابلة للاشتقاق عند 1)

إذن $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

ومنه $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

لأن $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

sin, مشتق, cos, -sin, -cos

$\sin 0 = 0$

$\cos 0 = 1$

2) حساب $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

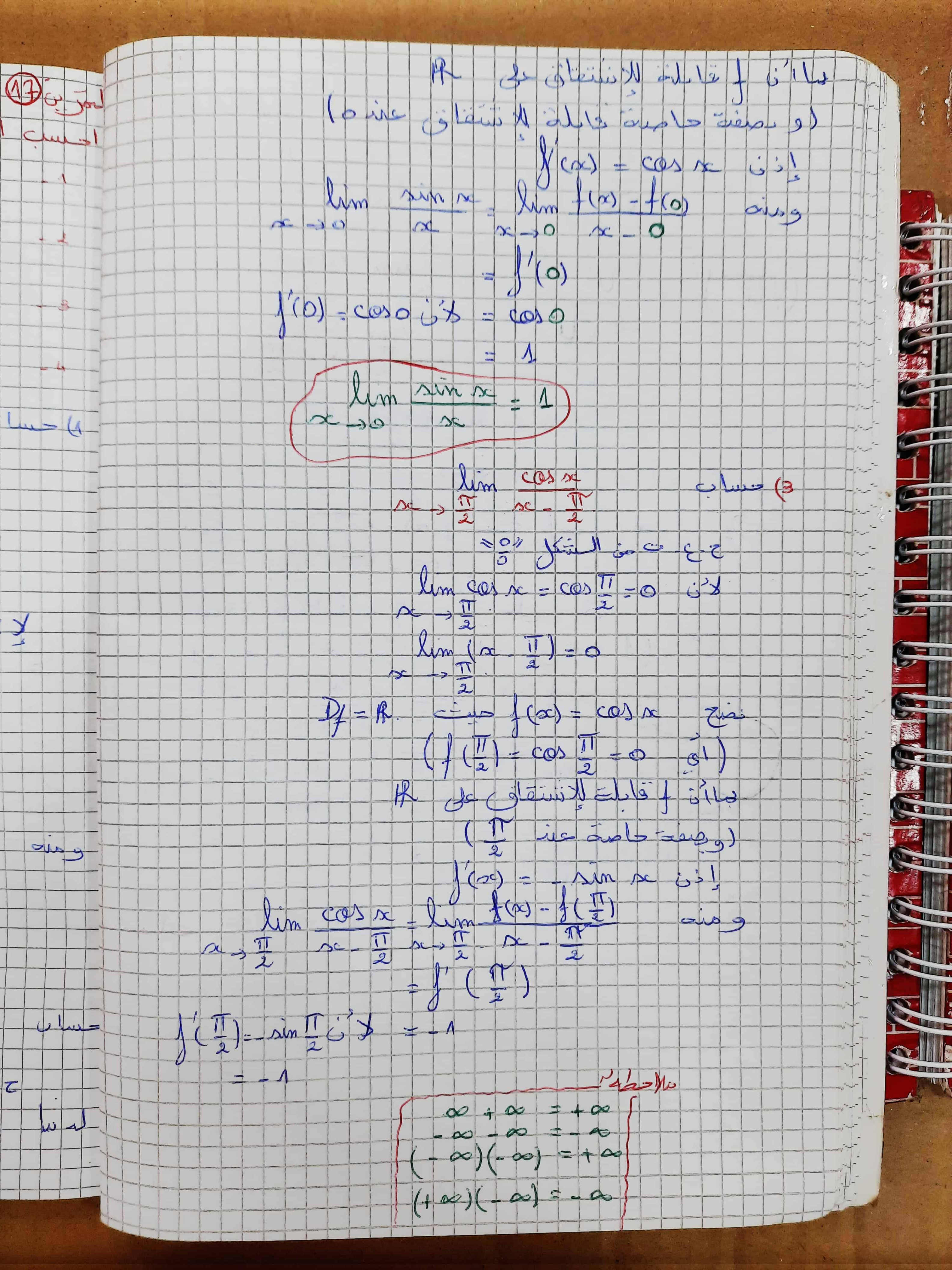
ح ع ت من الشكل "$\frac{0}{0}$"

لأن $\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$

$\lim_{x \to 0} x = 0$

نضع $f(x) = \sin x$ حيث $D_f = \mathbb{R}$

(أي $f(0) = \sin 0 = 0$)



بما أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

(و بصفة خاصة قابلة للاشتقاق عند 0)

إذن $f'(x) = \cos x$

ومنه

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= f'(0)$$

لأن $f'(0) = \cos 0$

$$= \cos 0$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

3) حساب

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

ح ع ت من الشكل « $\frac{0}{0}$ »

لأن $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

نضع $f(x) = \cos x$ حيث $D_f = \mathbb{R}$.

(أي $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$)

بما أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

(وبصفة خاصة عند $\frac{\pi}{2}$)

إذن $f'(x) = -\sin x$

ومنه

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$= f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

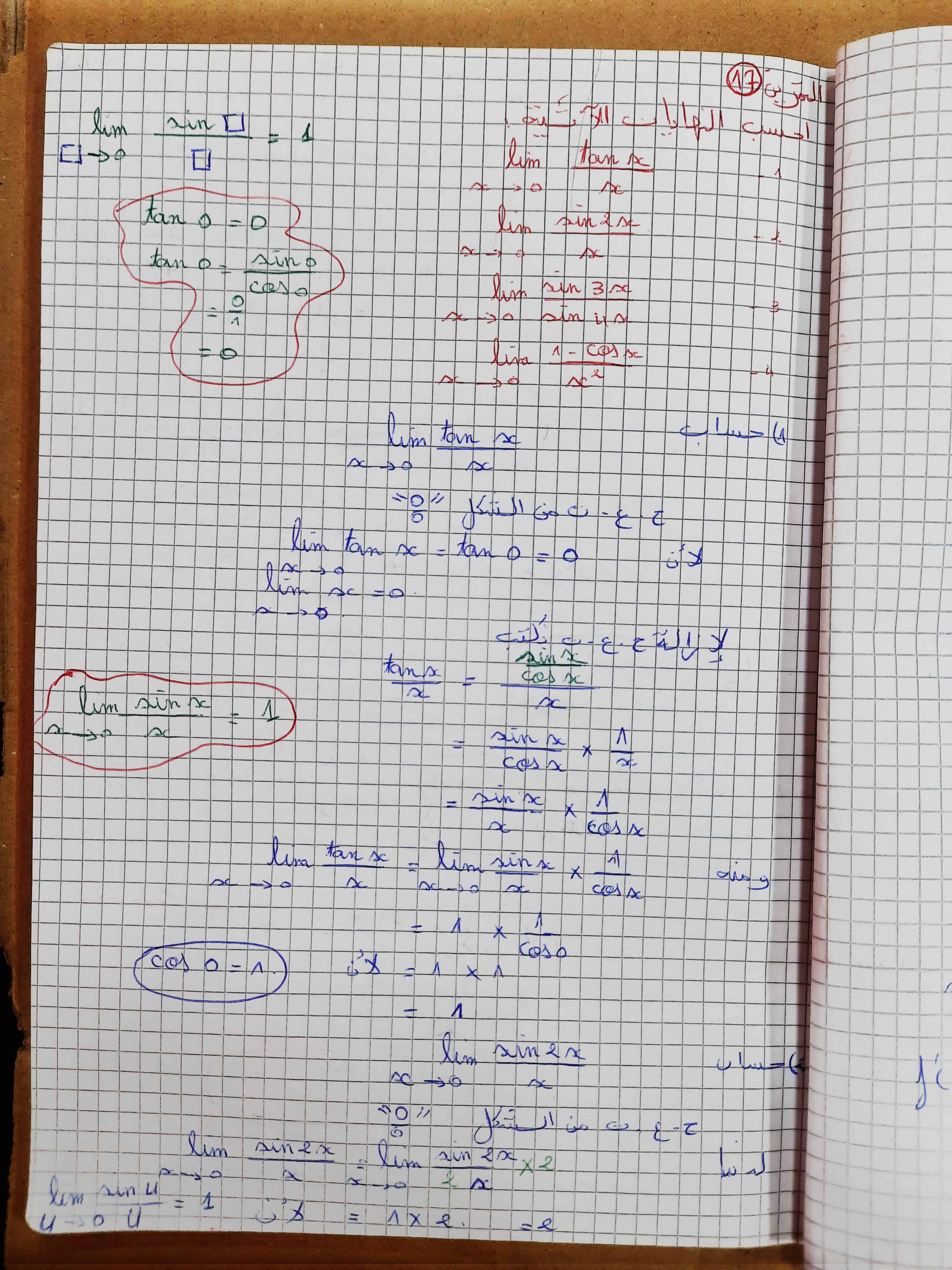
لأن $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2}$

$$= -1$$

$$= -1$$

ملاحظة

$$-\infty + \infty = +\infty$$
$$-\infty - \infty = -\infty$$
$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$
$$(+\infty)(-\infty) = -\infty$$



التمرين 17

احسب النهايات الآتية:

1- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

2- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

3- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

4- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$$\lim_{\square \to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

$\tan 0 = 0$

$\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$

1) حساب $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

ح ع ت من الشكل "$\frac{0}{0}$"

لأن $\lim_{x \to 0} \tan x = \tan 0 = 0$

$\lim_{x \to 0} x = 0.$

لإزالة ح ع ت نكتب

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ومنه $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$

$= 1 \times \frac{1}{\cos 0}$

$\cos 0 = 1.$

لأن $= 1 \times 1$

$= 1$

2) حساب $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

ح ع ت من الشكل "$\frac{0}{0}$"

لدينا $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times 2$

$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

لأن $= 1 \times 2. = 2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 2 \frac{\sin x}{x} \cos x = 2$$

3) لدينا

ح ع ت من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3x}{4x} \times \frac{4x}{\sin 4x}$$

$$= 1 \times \frac{3}{4} \times 1$$

$$= \frac{3}{4}.$$

4) لدينا

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$$

لأن $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= 1 \times \frac{1}{1 + \cos 0}$$

$$= 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$

$\cos^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$

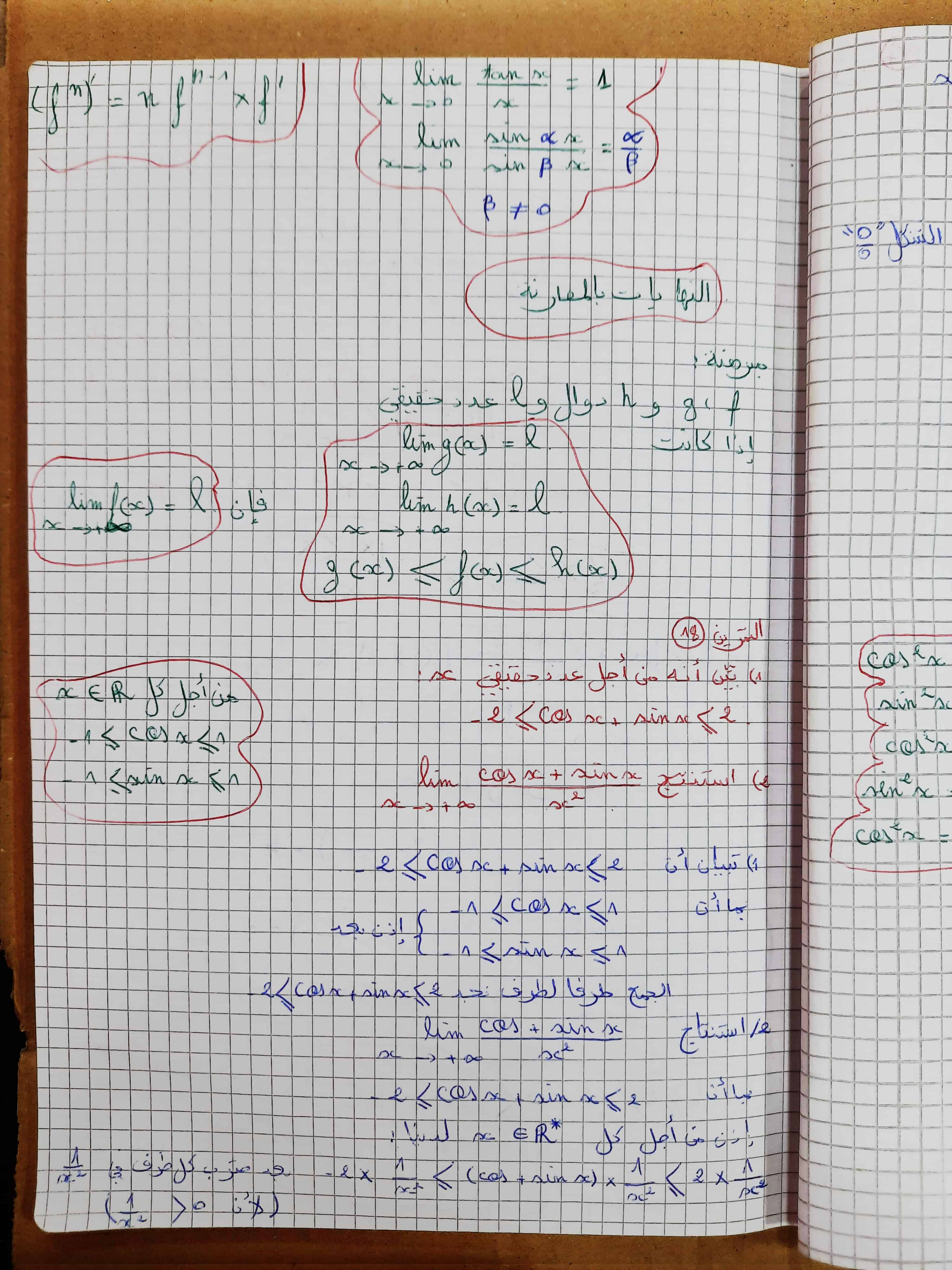
ملاحظة:

- $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\cos x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\cos x}{x} = -\infty$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$$



$$(f^n)' = n f^{n-1} \times f'$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$\beta \neq 0$

الشكل "$\frac{0}{0}$"

النهايات بالمقارنة

مبرهنة:

f ، g و h دوال و l عدد حقيقي

إذا كانت

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = l$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = l$$

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

التمرين (18)

1) بيّن أنه من أجل عدد حقيقي x:

$$-2 \leqslant \cos x + \sin x \leqslant 2$$

2) استنتج $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x + \sin x}{x^2}$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

1) تبيان أن $-2 \leqslant \cos x + \sin x \leqslant 2$

بما أن
$\begin{cases} -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \end{cases}$
إذن نجد

الجمع طرفا لطرف نجد $-2 \leqslant \cos x + \sin x \leqslant 2$

2/ استنتاج $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos + \sin x}{x^2}$

بما أن $-2 \leqslant \cos x + \sin x \leqslant 2$

إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا:

$$-2 \times \frac{1}{x^2} \leqslant (\cos + \sin x) \times \frac{1}{x^2} \leqslant 2 \times \frac{1}{x^2}$$

نجد بضرب كل طرف في $\frac{1}{x^2}$ (لأن $\frac{1}{x^2} > 0$)

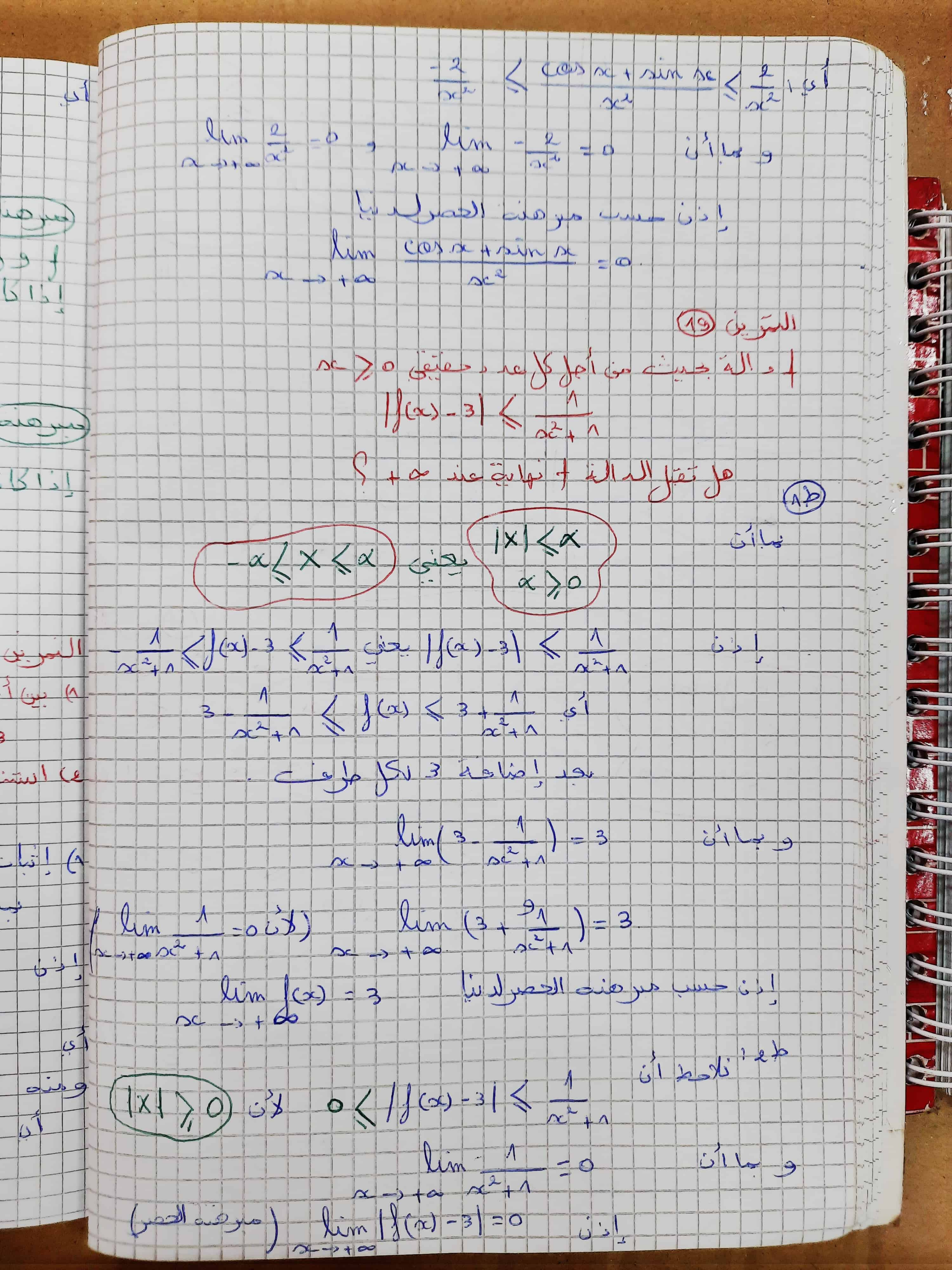
$\cos^2 x$

$\sin^2 x$

$\cos^2 x$

$\sin^2 x$

$\cos^2 x =$



أي: $-\frac{2}{x^2} \leq \frac{\cos x + \sin x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$

وبما أن $\lim_{x \to +\infty} -\frac{2}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

إذن حسب مبرهنة الحصر لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x + \sin x}{x^2} = 0.$$

التمرين 19

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$

$$|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2+1}$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

ط1

بما أن: $|X| \leq \alpha$ ، $\alpha \geq 0$ يعني $-\alpha \leq X \leq \alpha$

إذن $|f(x)-3| \leq \frac{1}{x^2+1}$ يعني $-\frac{1}{x^2+1} \leq f(x) - 3 \leq \frac{1}{x^2+1}$

أي $3 - \frac{1}{x^2+1} \leq f(x) \leq 3 + \frac{1}{x^2+1}$

بعد إضافة 3 لكل طرف.

وبما أن $\lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{x^2+1}\right) = 3$

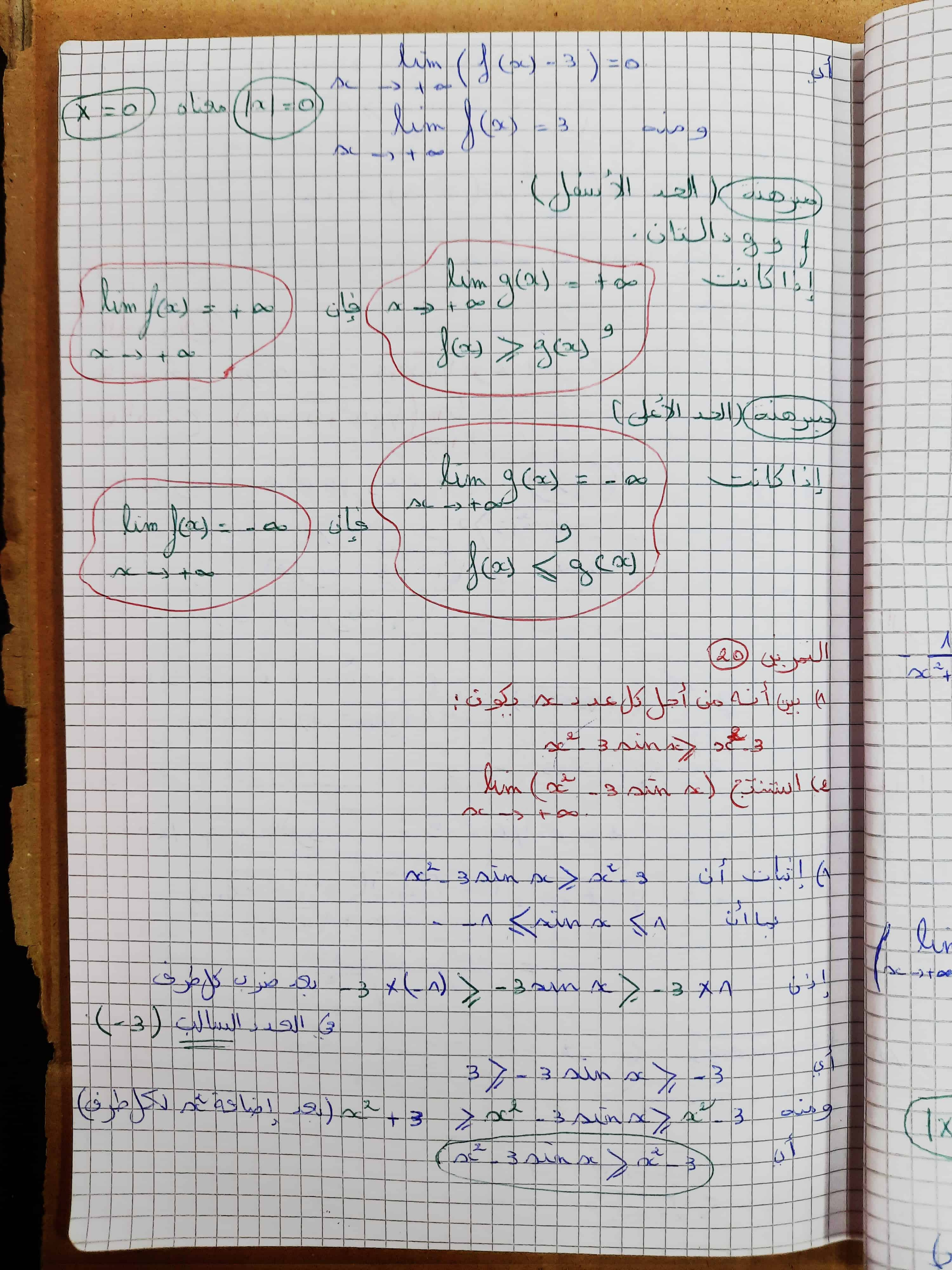
و $\lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2+1}\right) = 3$ (لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$)

إذن حسب مبرهنة الحصر لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

ط2: نلاحظ أن $0 \leq |f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2+1}$ لأن $|X| \geq 0$

وبما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$

إذن $\lim_{x \to +\infty} |f(x) - 3| = 0$ (مبرهنة الحصر)



أي $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3)=0$

و منه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$

$|x|=0$ معناه $x=0$

مبرهنة (الحد الأسفل)

f و g دالتان.

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $f(x)\geq g(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

مبرهنة (الحد الأعلى)

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ و $f(x)\leq g(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

التمرين 20

1) بين أنه من أجل كل عدد x يكون: $x^2-3\sin x\geq x^2-3$

2) استنتج $\lim_{x\to+\infty}(x^2-3\sin x)$

1) إثبات أن $x^2-3\sin x\geq x^2-3$

نعلم أن $-1\leq \sin x\leq 1$

إذن $-3\times(-1)\geq -3\sin x\geq -3\times 1$ بعد ضرب كل طرف في العدد السالب (-3)

أي $3\geq -3\sin x\geq -3$

ومنه $x^2+3\geq x^2-3\sin x\geq x^2-3$ (بعد إضافة x^2 لكل طرف)

أي $x^2-3\sin x\geq x^2-3$

2) استنتاج $\lim (x^2 - 3\sin x)$

بما أن $x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$

و $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3) = +\infty$

إذن حسب مبرهنة الحد الأسفل لدينا:

$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3\sin x) = +\infty$

التمرين 21

1) من أجل $x > 0$ قارن $\sqrt{4x^2+5}$ و $2x$.

2) استنتج $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+5} - x)$

1) مقارنة $\sqrt{4x^2+5}$ و $2x$ حيث $x > 0$

ط1/ بما أن $2x > 0$ و $\sqrt{4x^2+5} > 0$

إذن لمقارنة $\sqrt{4x^2+5}$ و $2x$ نقارن بين مربعيهما.

بما أن $\begin{cases} (2x)^2 = 4x^2 \\ (\sqrt{4x^2+5})^2 = 4x^2+5 \end{cases}$ إذن $(2x)^2 < (\sqrt{4x^2+5})^2$

ومنه $2x < \sqrt{4x^2+5}$

ط2/ نحسب الفرق $2x - \sqrt{4x^2+5}$

لدينا $2x - \sqrt{4x^2+5} = \dfrac{(2x - \sqrt{4x^2+5})(2x + \sqrt{4x^2+5})}{2x + \sqrt{4x^2+5}}$

$= \dfrac{4x^2 - (4x^2+5)}{2x + \sqrt{4x^2+5}}$

$= \dfrac{-5}{2x + \sqrt{4x^2+5}} < 0$

لأن $-5 < 0$ و $2x + \sqrt{4x^2+5} > 0$

ومنه $2x - \sqrt{4x^2+5} < 0$

أي $2x < \sqrt{4x^2+5}$

٢) استنتاج $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+5} - x)$

بما أن $2x < \sqrt{4x^2+5}$

إذن $2x - x < \sqrt{4x^2+5} - x$ بعد إضافة $-x$ للطرفين

أي $x < \sqrt{4x^2+5} - x$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ إذن حسب مبرهنة الحد الأسفل

$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+5} - x) = +\infty$ لدينا

التمرين (22)

١) من أجل $x > 1$، قارن $\sqrt{2x^2-1}$ و $2x$

٢) استنتج $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{2x^2-1} - 3x)$

١) مقارنة $\sqrt{2x^2-1}$ و $2x$ حيث $x > 1$.

لدينا $(2x)^2 = 4x^2$ لأن $2x > 0$

$(\sqrt{2x^2-1})^2 = 2x^2-1$ و $\sqrt{2x^2-1} > 0$

بما أن $4x^2 - (2x^2-1) = 2x^2+1 > 0$

إذن $4x^2 > 2x^2-1$ ومنه $2x > \sqrt{2x^2-1}$

٢) استنتاج $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{2x^2-1} - 3x)$

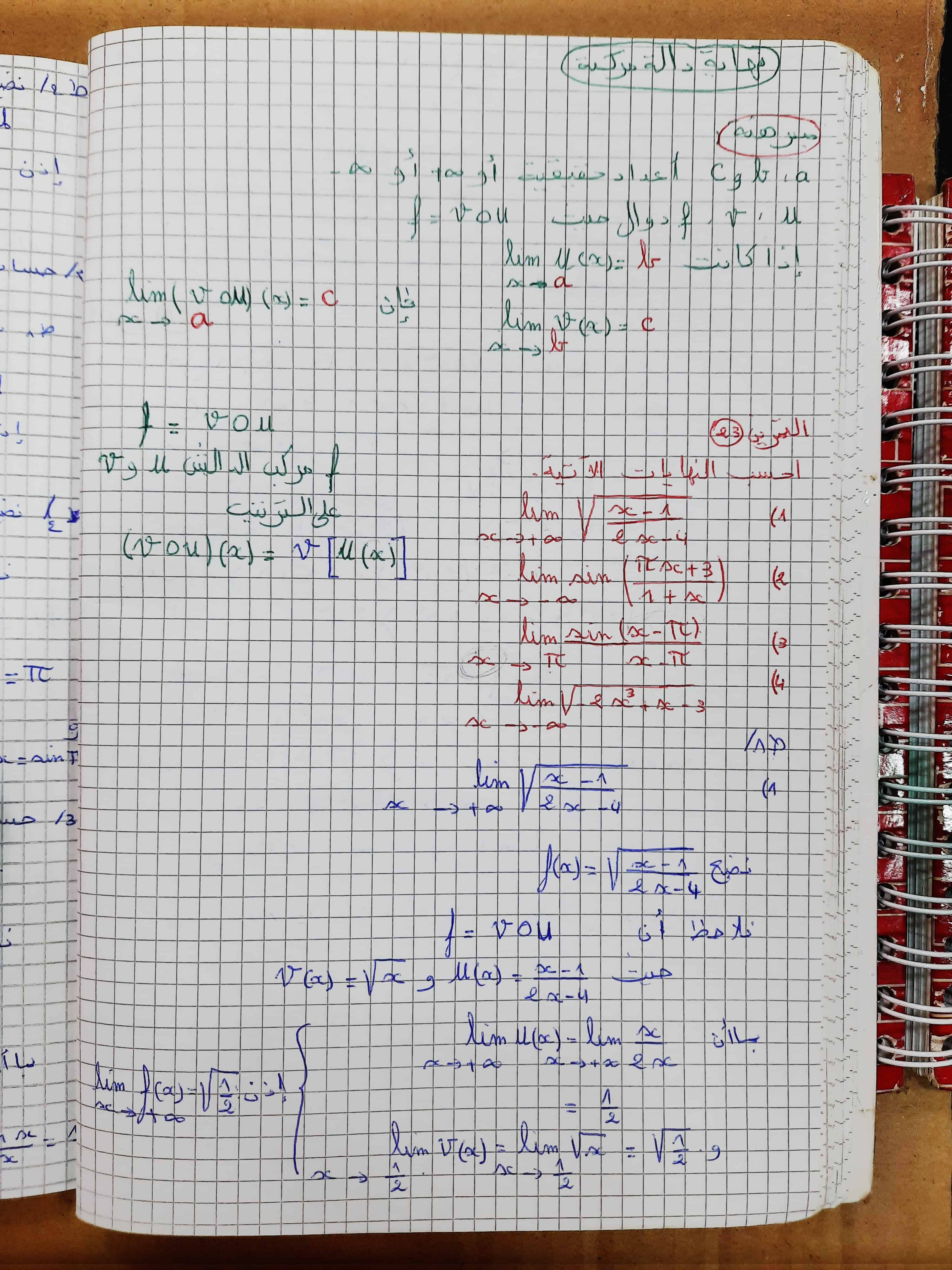
بما أن $2x > \sqrt{2x^2-1}$

إذن $2x - 3x > \sqrt{2x^2-1} - 3x$ بعد إضافة $-3x$ للطرفين

$-x > \sqrt{2x^2-1} - 3x$

وبما أن $\lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$

إذن $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{2x^2-1} - 3x) = -\infty$ (مبرهنة الحد الأعلى)



نهاية دالة مركبة

مبرهنة

a، b و c أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

u، v، f دوال حيث $f = v \circ u$

إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$

و $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$

فإن $\lim\limits_{x \to a} (v \circ u)(x) = c$

$f = v \circ u$

f مركب الدالتين u و v على الترتيب

$(v \circ u)(x) = v\left[u(x)\right]$

التمرين 23

احسب النهايات الآتية.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x-1}{2x-4}}$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x + 3}{1 + x}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-2x^3 + x - 3}$

حل/

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x-1}{2x-4}}$

نضع $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x-4}}$

نلاحظ أن $f = v \circ u$

حيث $u(x) = \dfrac{x-1}{2x-4}$ و $v(x) = \sqrt{x}$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

و $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} v(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \sqrt{x} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$

نضع /2 ط $t = \frac{x-1}{2x-4}$

لما $x \to +\infty$ فإن $t \to \frac{1}{2}$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{2x-4}} = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \sqrt{t} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

/2 حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1+x}\right)$

/1 نضع $y = \frac{\pi x + 3}{1+x}$

لما $x \to -\infty$ فإن $y \to \pi$

إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1+x}\right) = \lim\limits_{y \to \pi} \sin y = \sin \pi = 0$

/2 نضع $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1+x}\right)$

نلاحظ أن $f = v \circ u$

حيث $u(x) = \frac{\pi x + 3}{1+x}$ و $v(x) = \sin x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\pi x}{x} = \pi$

و

$\lim\limits_{x \to \pi} v(x) = \lim\limits_{x \to \pi} \sin x = \sin \pi = 0$

إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

/3 حساب $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$

نضع $f(x) = \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$

نلاحظ أن $f = v \circ u$

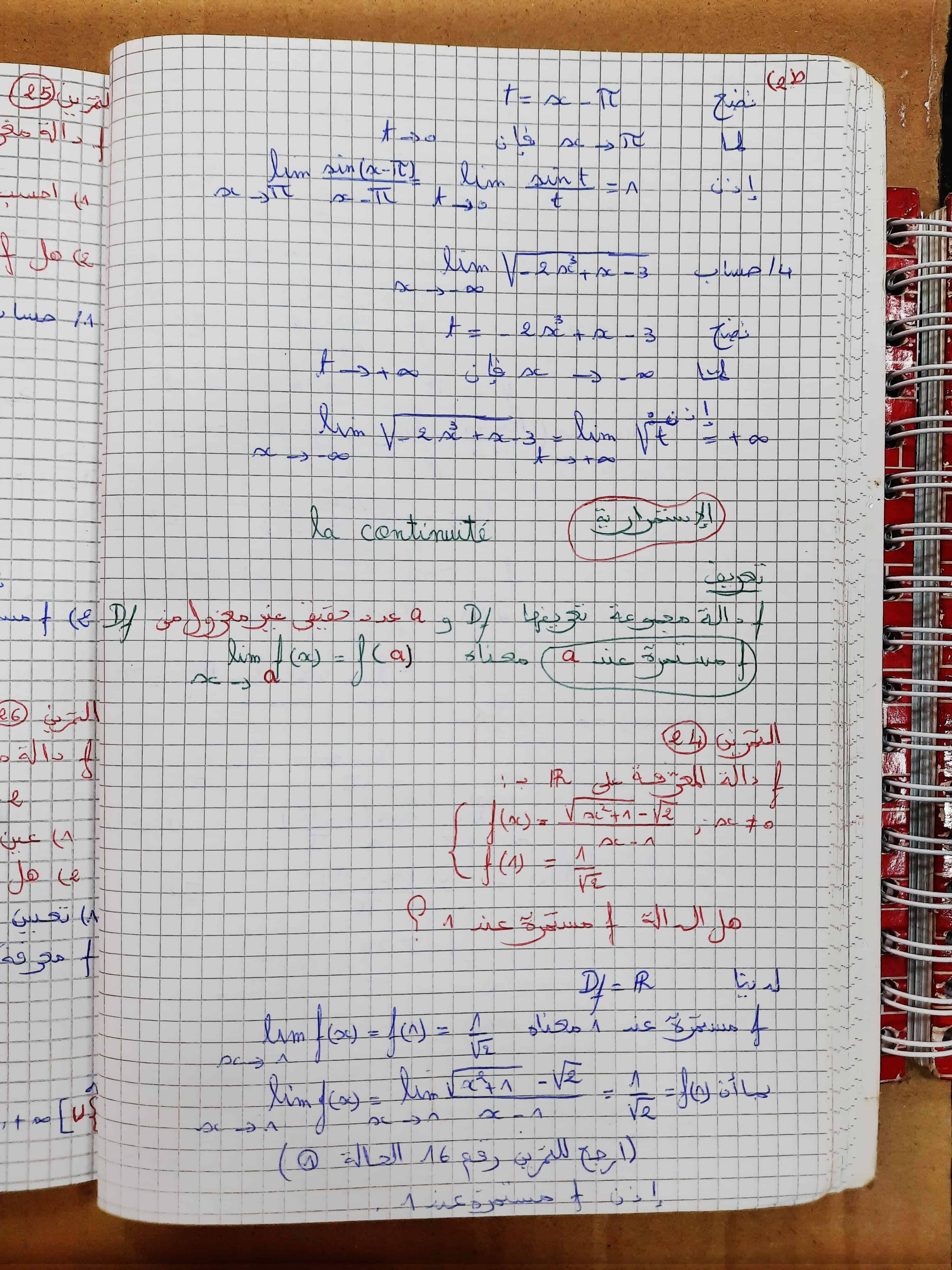
حيث $u(x) = x - \pi$

$v(x) = \frac{\sin x}{x}$

بما أن $\lim\limits_{x \to \pi} u(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} v(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

إذن $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = 1$



(2ط

نضع $t = x - \pi$

لما $x \to \pi$ فإن $t \to 0$

إذن $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

4/ حساب $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-2x^3 + x - 3}$

نضع $t = -2x^3 + x - 3$

لما $x \to -\infty$ فإن $t \to +\infty$

إذن $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-2x^3 + x - 3} = \lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} = +\infty$

الإستمرارية la continuité

تعريف

f دالة مجموعة تعريفها D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f

f مستمرة عند a معناه $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

التمرين 24

f دالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} \quad ; x \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

هل الدالة f مستمرة عند 1 ؟

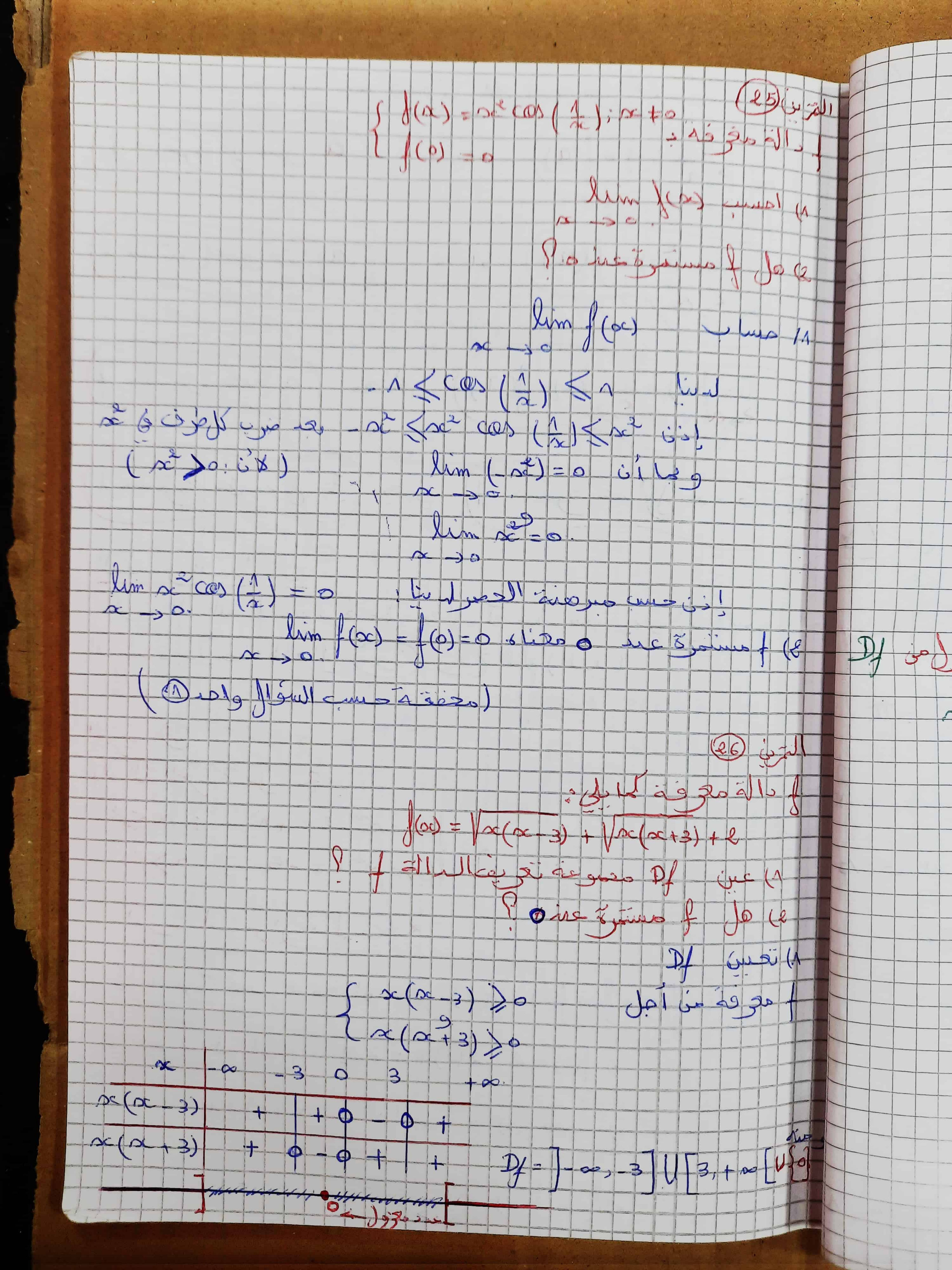
لدينا $D_f = \mathbb{R}$

f مستمرة عند 1 معناه $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

بما أن $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = f(1)$

(ارجع للتمرين رقم 16 الحالة ①)

إذن f مستمرة عند 1 .



التمرين 25

f الدالة معرفة ب:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) احسب $\lim_{x \to 0} f(x)$

2) هل f مستمرة عند 0؟

1) حساب $\lim_{x \to 0} f(x)$

لدينا $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

إذن $-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$ بعد ضرب كل طرف في x^2 (لأن $x^2 > 0$)

وبما أن $\lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

إذن حسب مبرهنة الحصر لدينا: $\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

2) f مستمرة عند 0 معناه $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

(محققة حسب السؤال واحد ①)

التمرين 26

f دالة معرفة كما يلي:

$$f(x) = \sqrt{x(x-3)} + \sqrt{x(x+3)} + 2$$

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ؟

2) هل f مستمرة عند 0 ؟

1) تعيين D_f

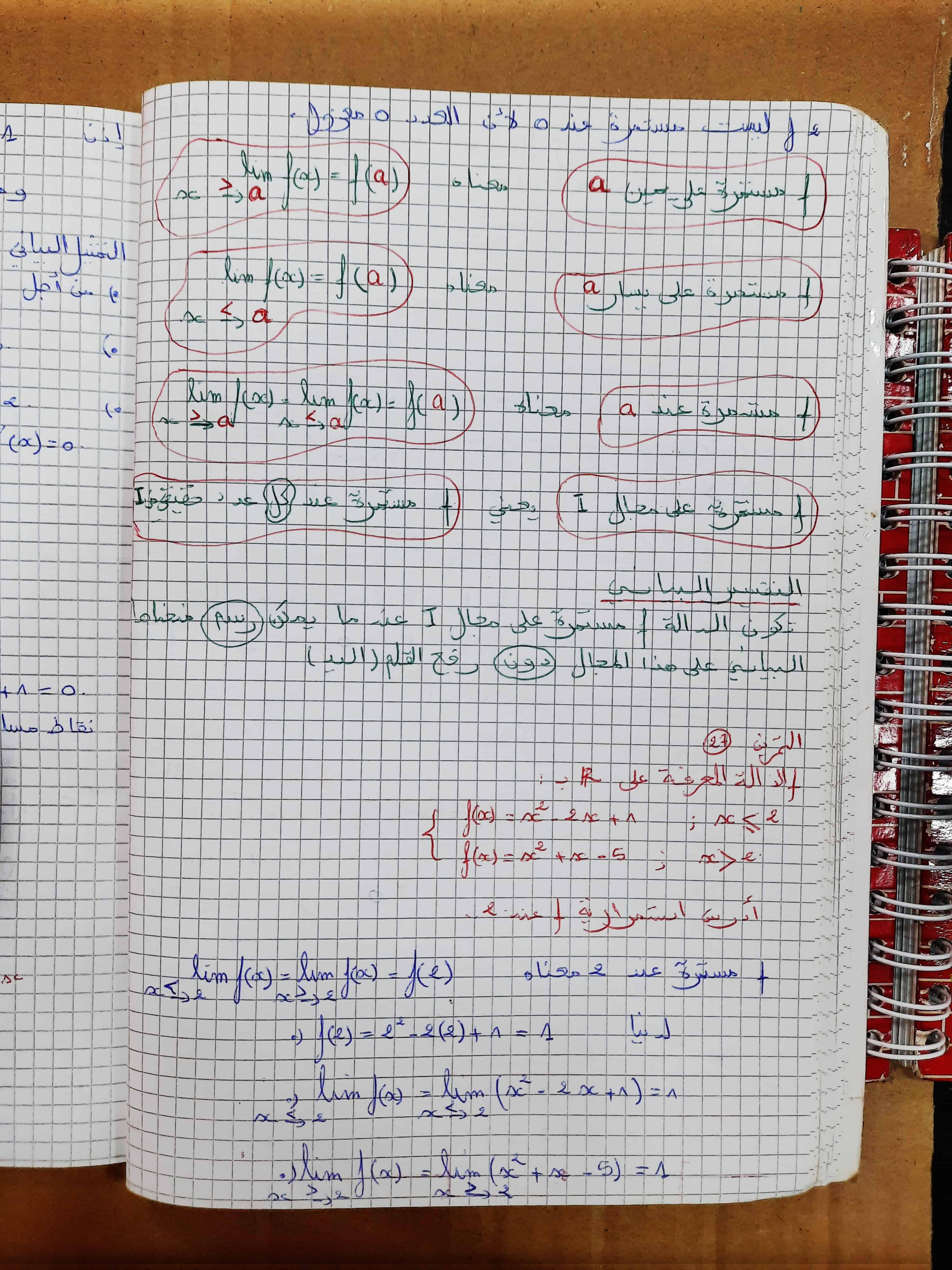
f معرفة من أجل

$$\begin{cases} x(x-3) \geq 0 \\ \text{و} \\ x(x+3) \geq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$x(x-3)$		+	|	+	0	−	0	+	
$x(x+3)$		+	0	−	0	+	|	+	

$$D_f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[\cup \{0\}$$

0 ← عدد معزول



و f ليست مستمرة عند 0 لأن العدد 0 معزول.

f مستمرة على يمين a معناه $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$

f مستمرة على يسار a معناه $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

f مستمرة عند a معناه $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

f مستمرة على مجال I يعني f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I

التفسير البياني

تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحناها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد)

التمرين 27

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1 & ; x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + x - 5 & ; x > 2 \end{cases}$$

أدرس استمرارية f عند 2.

f مستمرة عند 2 معناه $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = f(2)$

لدينا:

* $f(2) = 2^2 - 2(2) + 1 = 1$
* $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (x^2 - 2x + 1) = 1$
* $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x^2 + x - 5) = 1$

إذن $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = f(2) = 1$

ومنه f مستمرة عند 2.

التمثيل البياني للدالة f

1) من أجل $x \in]-\infty, 2]$ لدينا $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty.$$ (2

$$f'(x) = 2x - 2.$$ (3

$f'(x) = 0$ معناه $2x - 2 = 0$

$x = 1$

x	$-\infty$	1	2
$f'(x) = 2x - 2$	$-$	0	$+$

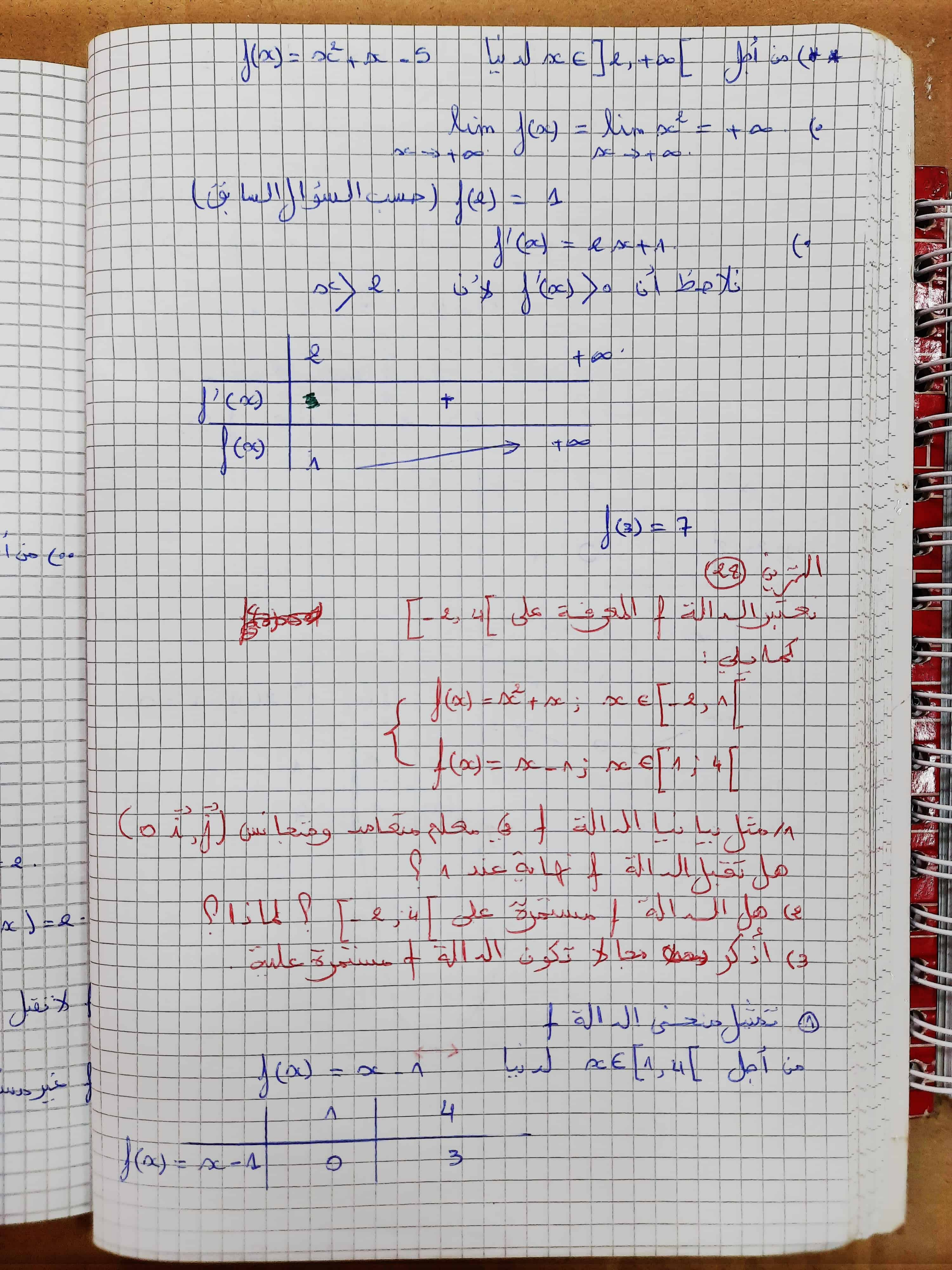
x	$-\infty$	1	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ 1

$f(1) = 1^2 - 2(1) + 1 = 0.$

نقاط مساعدة

x	0	-1
$f(x)$	1	4

y, 4, 1, x', 0, x, -1, 1, 2, 3, y'



*) من أجل $x \in]2,+\infty[$ لدينا $f(x) = x^2 + x - 5$

) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$f(2) = 1$ (حسب السؤال السابق)

) $f'(x) = 2x + 1$

نلاحظ أن $f'(x) > 0$ لأن $x > 2$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(3) = 7$

التمرين (22)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2,4[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x \ ; \ x \in [-2,1[\\ f(x) = x - 1 \ ; \ x \in [1;4[\end{cases}$$

1/ مثل بيانيا الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هل تقبل الدالة f نهاية عند 1 ؟

2) هل الدالة f مستمرة على $]-2,4[$ ؟ لماذا؟

3) أذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

(1) تمثيل منحنى الدالة f

من أجل $x \in [1,4[$ لدينا $f(x) = x - 1$

x	1	4
$f(x) = x - 1$	0	3

من أجل $x \in [-2, 1[$ لدينا $f'(x) = x^2 + x$

لدينا $f'(x) = 2x + 1$

$f'(x) = 0$ معناه $x = -\frac{1}{2}$.

x	-2		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x) = 2x+1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	2

$f(-2) = (-2)^2 + (-2) = 2.$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} (x^2 + x) = 2.$

$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

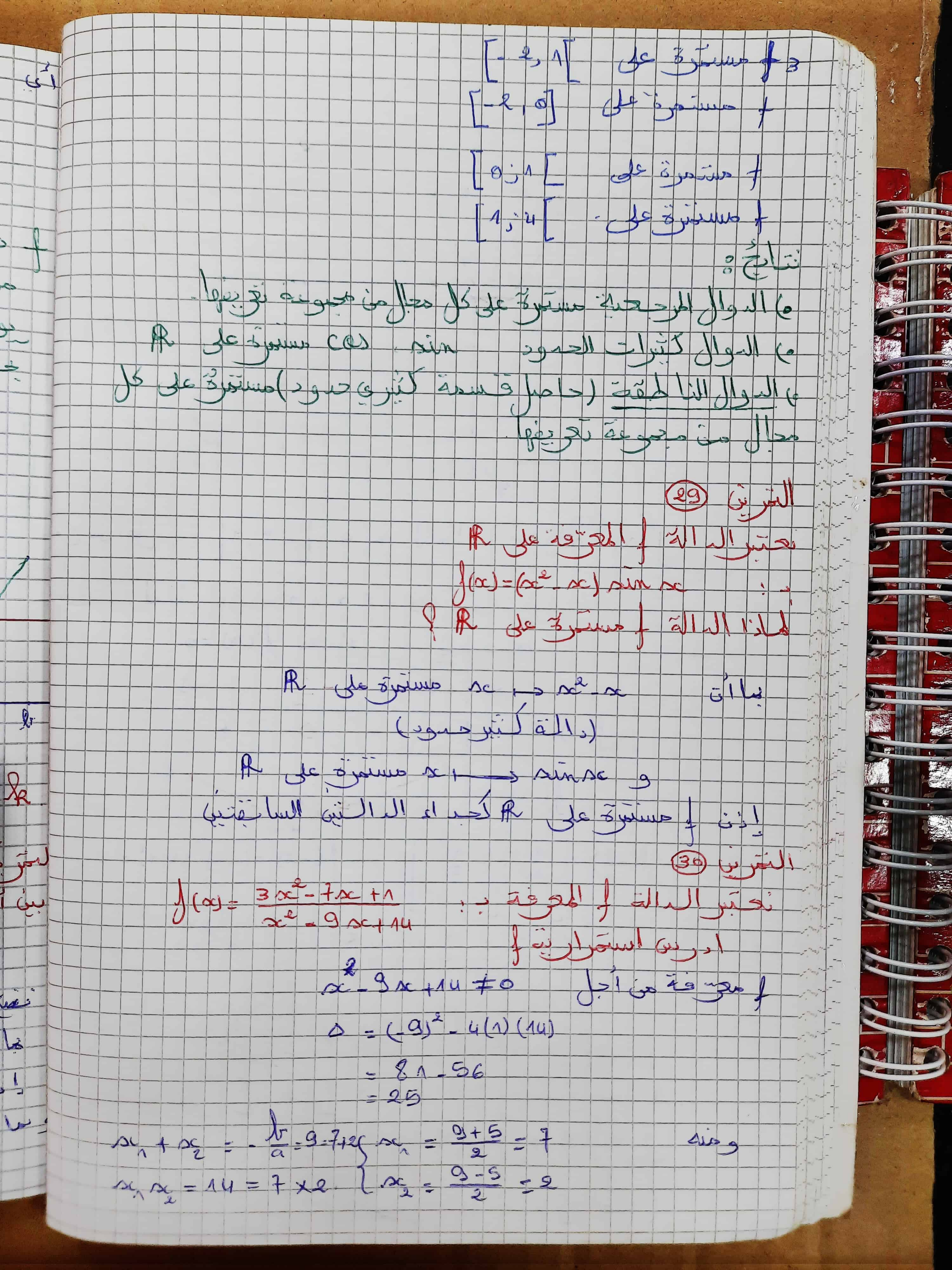
$= \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$

f لاتقبل نهاية عند 1 لأن $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$.

f غير مستمرة على $[-2, 4[$ لأن f ليست مستمرة عند 1.

(لأن $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$)

(أو تم رسم (C_f) برفع القلم.)



و f مستمرة على $]-2,1[$

f مستمرة على $[-2,0]$

f مستمرة على $[0;1[$

f مستمرة على $[1;4[$

نتائج :

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود $\sin$ ، $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

التمرين 29

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$f(x) = (x^2 - x)\sin x$

لماذا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

بما أن $x \mapsto x^2 - x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ (دالة كثير حدود)

و $x \mapsto \sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$

إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$ كجداء الدالتين السابقتين

التمرين 30

نعتبر الدالة f المعرفة ب :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 1}{x^2 - 9x + 14}$$

ادرس استمرارية f

f معرفة من أجل $x^2 - 9x + 14 \neq 0$

$\Delta = (-9)^2 - 4(1)(14)$

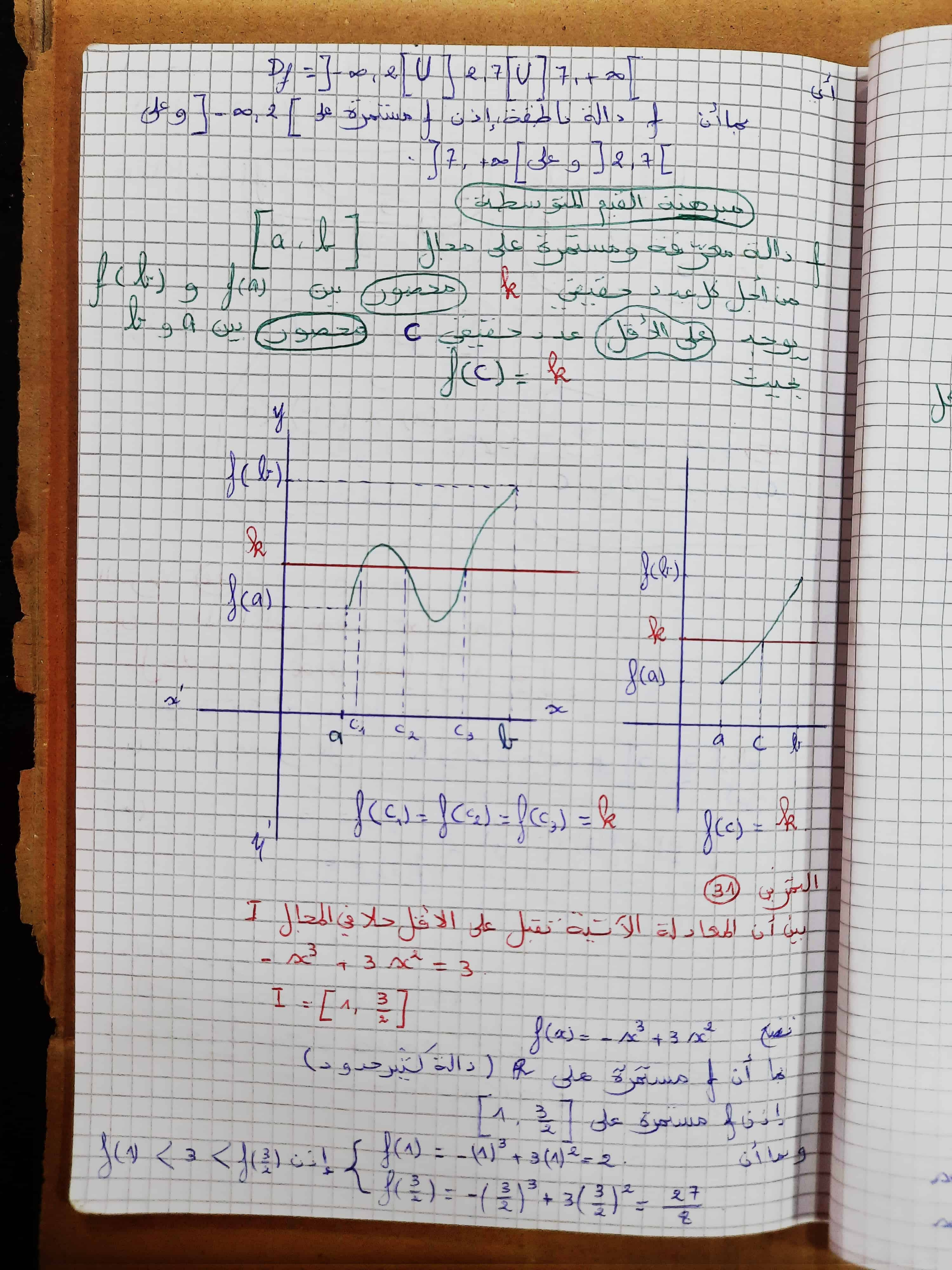
$= 81 - 56$

$= 25$

ومنه $\begin{cases} x_1 = \frac{9+5}{2} = 7 \\ x_2 = \frac{9-5}{2} = 2 \end{cases}$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 9 = 7+2$

$x_1 x_2 = 14 = 7 \times 2$



$D_f =]-\infty, 2[\cup]2, 7[\cup]7, +\infty[$

أي

بما أن f دالة ناطقة، إذن f مستمرة على $]-\infty, 2[$ وعلى $]2, 7[$ وعلى $]7, +\infty[$.

مبرهنة القيم المتوسطة

f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a, b]$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b

بحيث $f(c) = k$

$f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = k$

$f(c) = k$

التمرين 31

بين أن المعادلة الآتية تقبل على الأقل حلا في المجال I

$$-x^3 + 3x^2 = 3$$

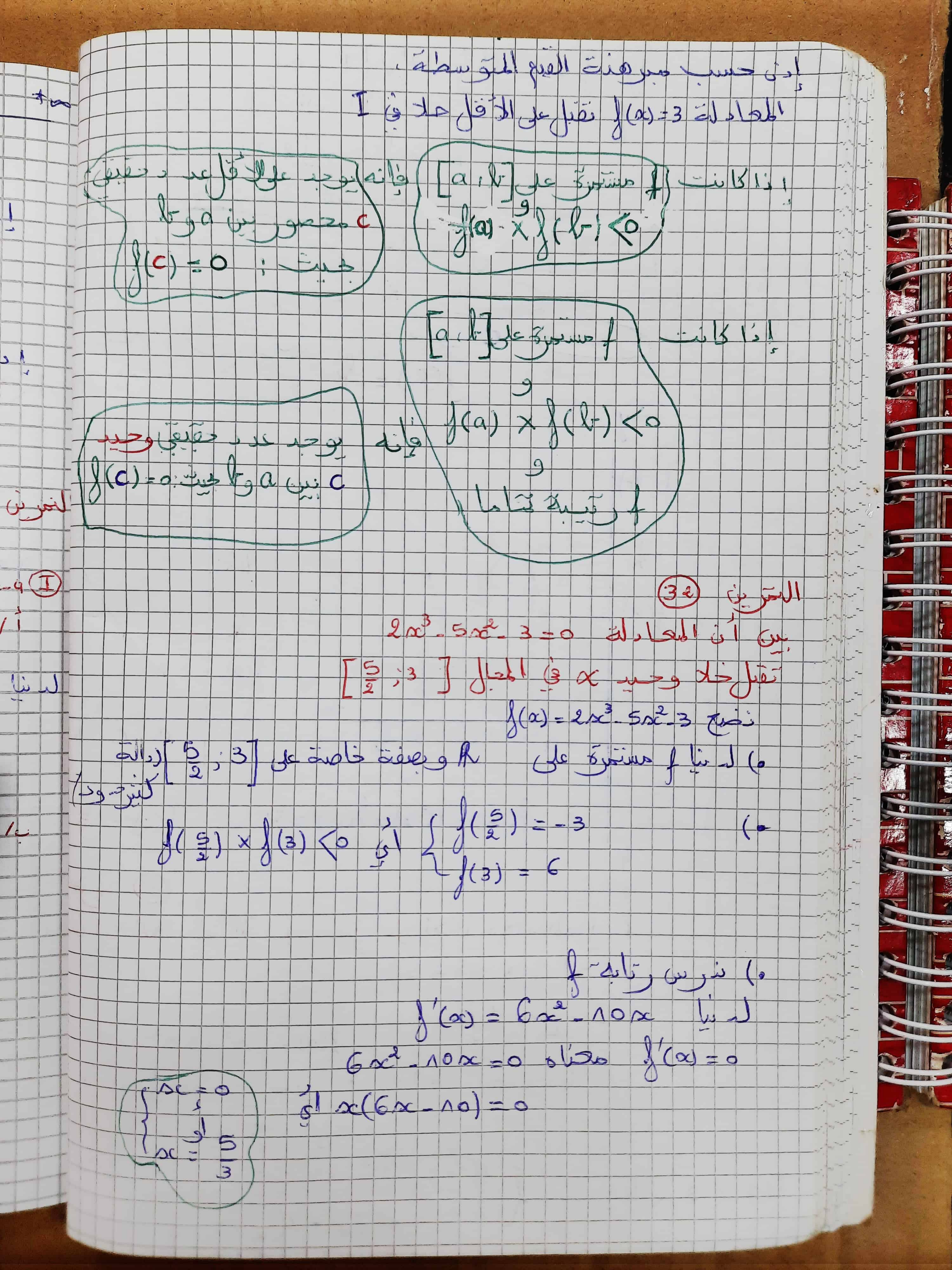
$$I = [1, \tfrac{3}{2}]$$

نضع $f(x) = -x^3 + 3x^2$

بما أن f مستمرة على $\mathbb{R}$ (دالة كثير حدود)

إذن f مستمرة على $[1, \frac{3}{2}]$

وبما أن
$$\begin{cases} f(1) = -(1)^3 + 3(1)^2 = 2 \\ f(\frac{3}{2}) = -(\frac{3}{2})^3 + 3(\frac{3}{2})^2 = \frac{27}{8} \end{cases}$$
إذن $f(1) < 3 < f(\frac{3}{2})$



إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة
المعادلة $f(x)=3$ تقبل على الأقل حلا في I

إذا كانت f مستمرة على $[a;b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b حيث: $f(c)=0$

إذا كانت f مستمرة على $[a;b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ و f رتيبة تماما فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد c بين a و b حيث $f(c)=0$

التمرين 32

بين أن المعادلة $2x^3-5x^2-3=0$ تقبل حلا وحيدا x في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$

نضع $f(x)=2x^3-5x^2-3$

•) لدينا f مستمرة على $\mathbb{R}$ وبصفة خاصة على $\left[\frac{5}{2};3\right]$ (دالة كثيرة حدود)

•) $\begin{cases} f\left(\frac{5}{2}\right)=-3 \\ f(3)=6 \end{cases}$ أي $f\left(\frac{5}{2}\right)\times f(3)<0$

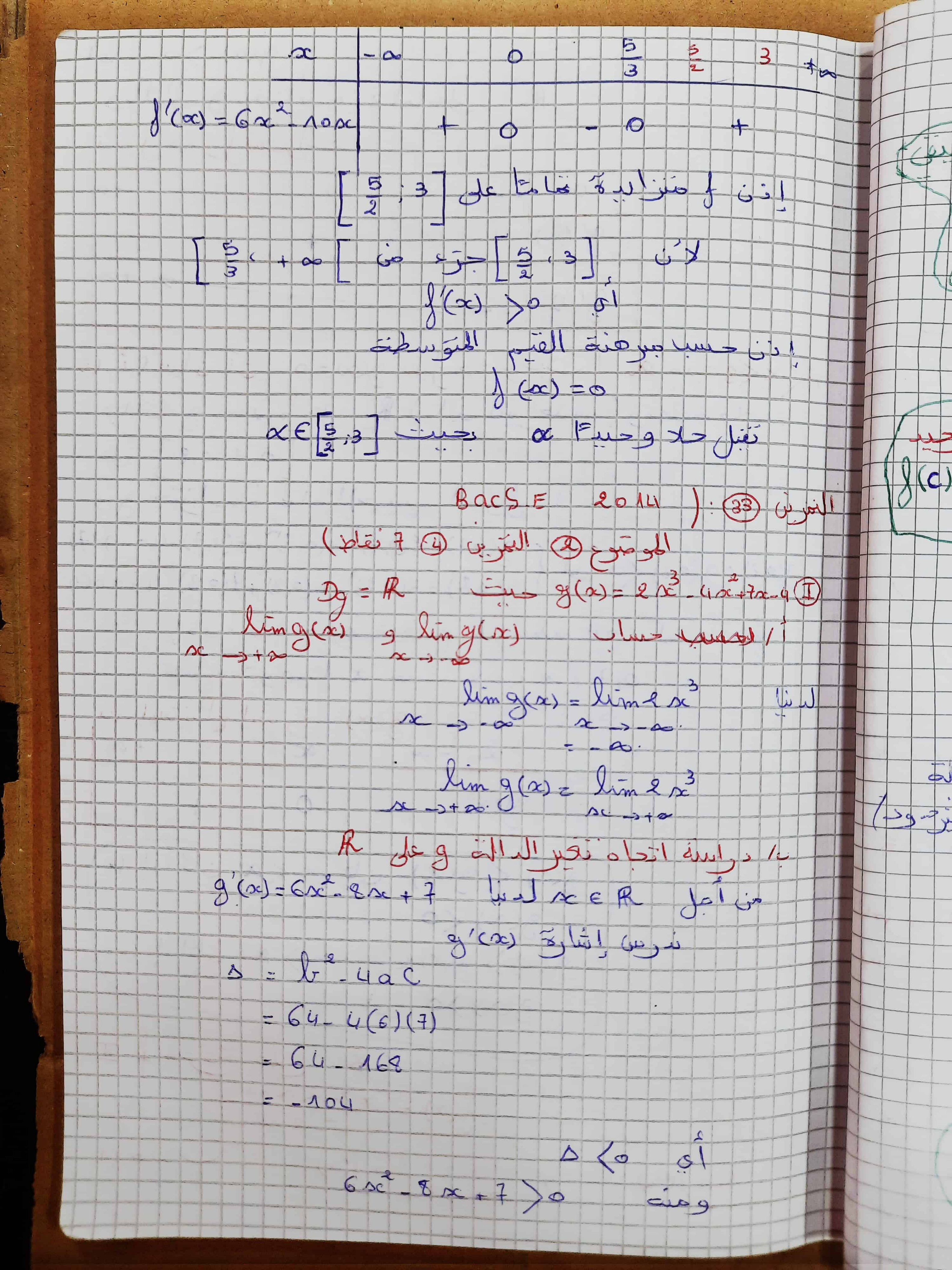
•) ندرس رتابة f

لدينا $f'(x)=6x^2-10x$

$f'(x)=0$ معناه $6x^2-10x=0$

أي $x(6x-10)=0$ أي

$\begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \\ x=\frac{5}{3} \end{cases}$



x	$-\infty$		0		$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$	3		$+\infty$
$f'(x) = 6x^2 - 10x$		$+$	0	$-$	0			$+$	

إذن f متزايدة تماما على $\left[\frac{5}{2} ; 3\right]$

لأن $\left[\frac{5}{2} , 3\right]$ جزء من $\left[\frac{5}{3} , +\infty\right[$

أي $f'(x) > 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة

$f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α بحيث $\alpha \in \left[\frac{5}{2} ; 3\right]$

التمرين (33): (BacS.E 2014)

الموضوع (2) التمرين (4) (7 نقاط)

(I) $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 9$ حيث $D_g = \mathbb{R}$

أ/ حساب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

لدينا

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$

من أجل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

ندرس إشارة $g'(x)$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 64 - 4(6)(7)$$
$$= 64 - 168$$
$$= -104$$

أي $\Delta < 0$

ومنه $6x^2 - 8x + 7 > 0$

أي $g'(x) > 0$

وبالتالي g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

تشكيل جدول التغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) أ) تبيان أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7<\alpha<0,8$

بما أن g مستمرة على $\mathbb{R}$ (دالة كثير حدود) وبصفة خاصة على $[0,7;0,8]$

و g متزايدة تماما (حسب السؤال 1) ب)

$$\begin{cases} g(0,7)=2(0,7)^3-4(0,7)^2+7(0,7)-4=-0,374 \\ g(0,8)=2(0,8)^3-4(0,8)^2+7(0,8)-4=0,064 \end{cases}$$

أي $g(0,7)\times g(0,8)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7<\alpha<0,8$

ب) استنتاج اشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

*) إذا كان $x<\alpha$ فإن $g(x)<g(\alpha)$

$g(x)<0$

**) إذا كان $x>\alpha$ فإن $g(x)>g(\alpha)$

أي $g(x)>0$

II f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$

1) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

٢) أ) تبيان أن $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$ حيث $x\in\mathbb{R}$

من أجل $x\in\mathbb{R}$ لدينا

$$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{2x^3-2x^2+x+2x^2-2x+1-3x+1}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{2(x^3-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$

$$= f(x)$$

ط2

Division of x^3-2x+1 by $2x^2-2x+1$ (quotient $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$):

$x^3 \qquad -2x+1$

$-x^3+x^2-\frac{1}{2}x$

$x^2-\frac{5}{2}x+1$

$-x^2+x-\frac{1}{2}$

$-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}{2x^2-2x+1}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{-3x+1}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب) استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)

بما أن $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-3x}{4x^2} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-3}{4x} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}(x+1)$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ وعند $-\infty$

ج) - دراسة وضعية (C_f) و (Δ)

نحسب $f(x) - y$ ثم ندرس إشارتها

لدينا

$$f(x) - y = \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$1-3x$		+	0	-	
$2(2x^2-2x+1)$		+		+	
$f(x)-y$		+	0	-	
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)		(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	

(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$

من أجل $x = \frac{1}{3}$

لدينا :

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

3) أ) تبيان أن $f'(x) = \frac{x\, g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

بما أن f الناطقة فهي قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها $\mathbb{R}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2} \quad \text{مع } v \neq 0$$

ومنه :

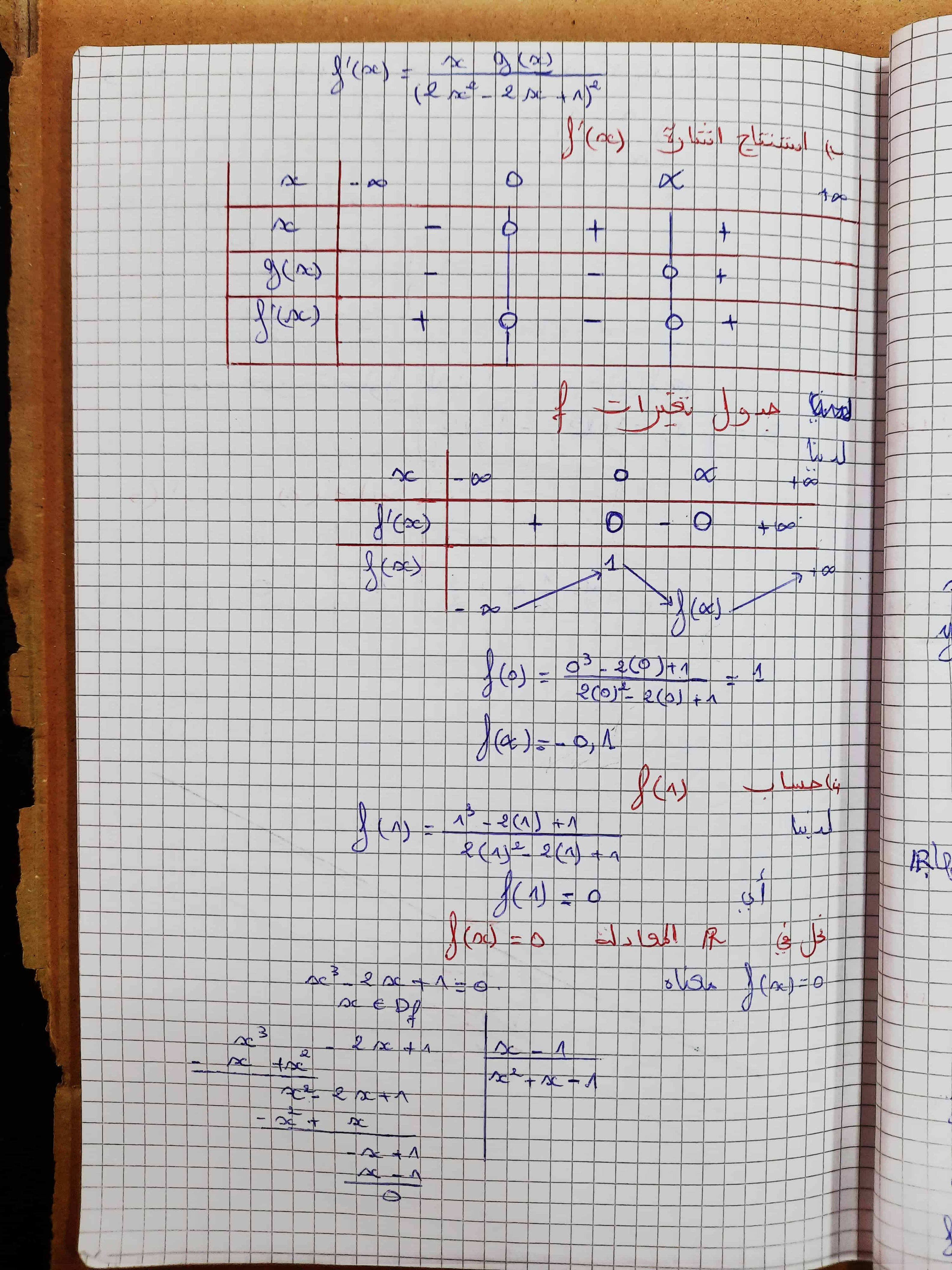
$$f'(x) = \frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

لأن :

$$f'(x) = \frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2}$$



$$f'(x) = \frac{x\, g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

ب) استنتاج اشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات f

لدينا

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$$f(0) = \frac{0^3 - 2(0) + 1}{2(0)^2 - 2(0) + 1} = 1$$

$$f(\alpha) = -0{,}1$$

4) حساب $f(1)$

لدينا

$$f(1) = \frac{1^3 - 2(1) + 1}{2(1)^2 - 2(1) + 1}$$

أي

$$f(1) = 0$$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$

معناه $f(x) = 0$

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$
$$x \in D_f$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \quad\quad - 2x + 1 & x - 1 \\ \hline -\ x^3 + x^2 & x^2 + x - 1 \\ \quad x^2 - 2x + 1 & \\ -\ x^2 + x & \\ \quad\quad -x + 1 & \\ \quad\quad\ x - 1 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

ومنه $f(x)=0$ معناه $(x-1)(x^2+x-1)$

أي

$$\begin{cases} x-1=0 \\ \text{أو} \\ x^2+x-1=0 \end{cases}$$

$\Delta=(1)^2-4(1)(-1)=5$

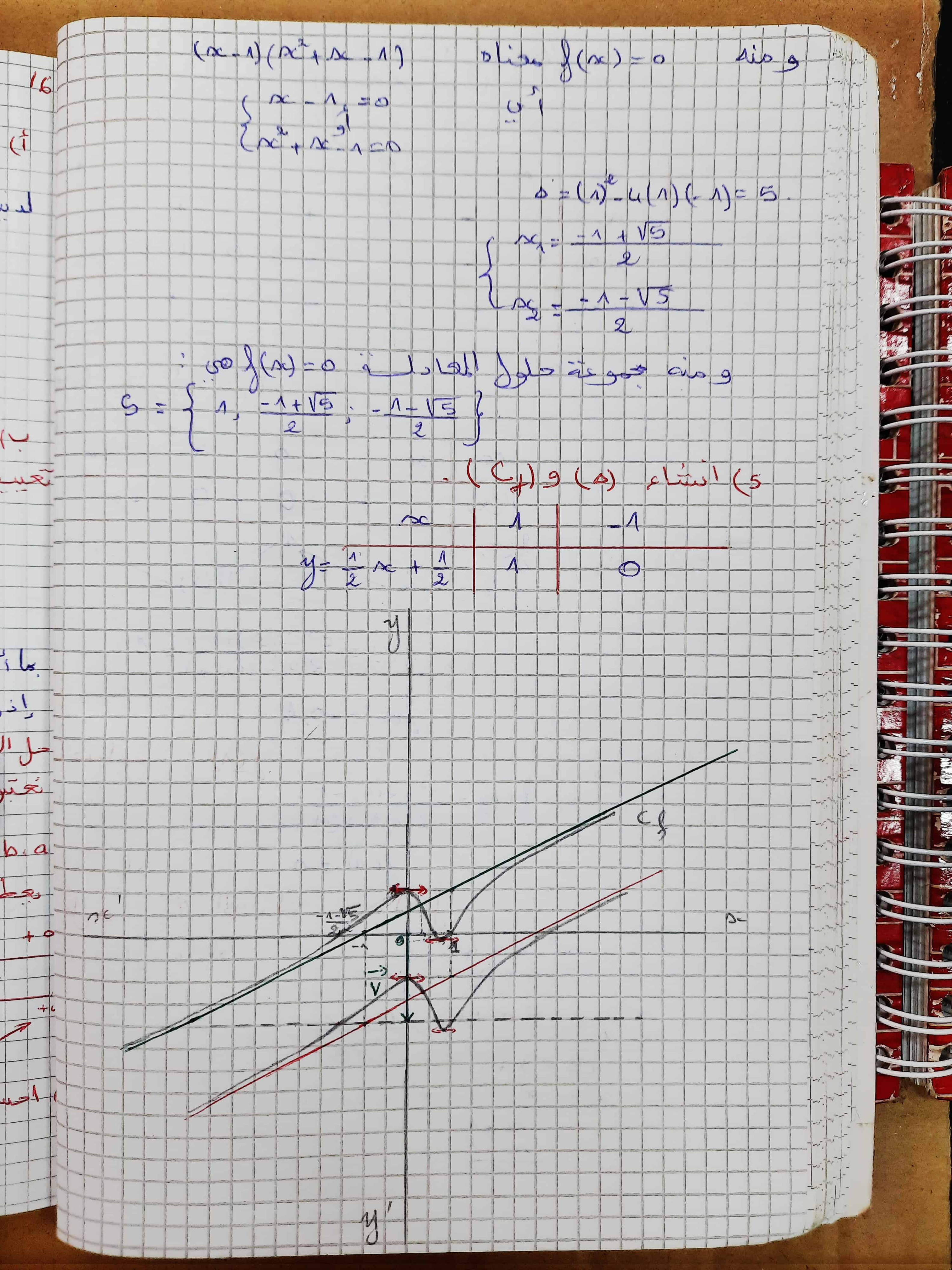
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

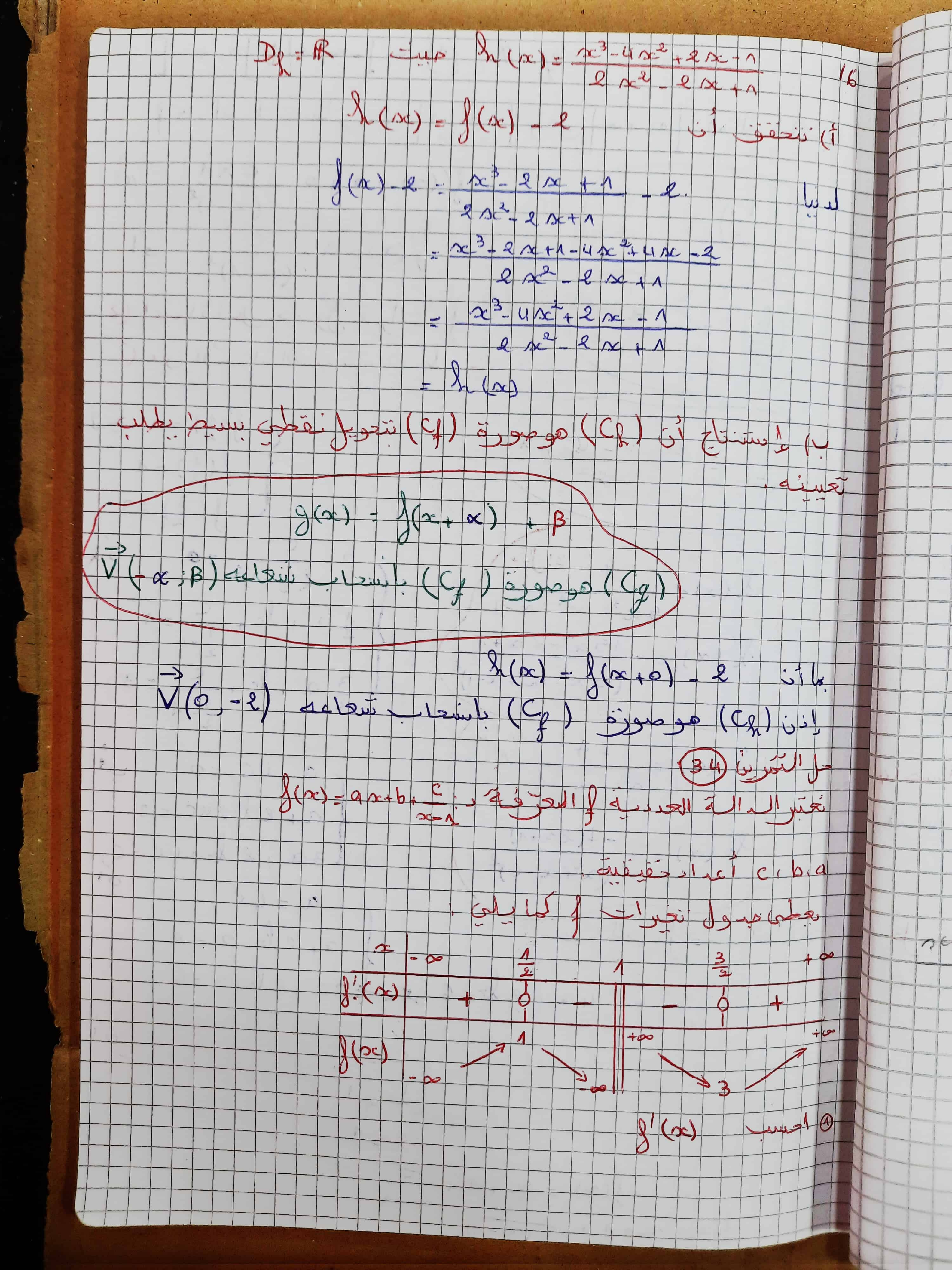
ومنه مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي:

$$S=\left\{1,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

5) انشاء (Δ) و (C_f).

x	1	-1
$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$	1	0





$D_h = \mathbb{R}$ حيث $h(x) = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$

أ) نتحقق أن $h(x) = f(x) - 2$

لدينا $f(x)-2 = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1} - 2$

$= \frac{x^3-2x+1-4x^2+4x-2}{2x^2-2x+1}$

$= \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$

$= h(x)$

ب) إستنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه.

$g(x) = f(x+\alpha) + \beta$

(C_g) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{V}(-\alpha;\beta)$

بما أن $h(x) = f(x+0) - 2$

إذن (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{V}(0,-2)$

حل التمرين (34)

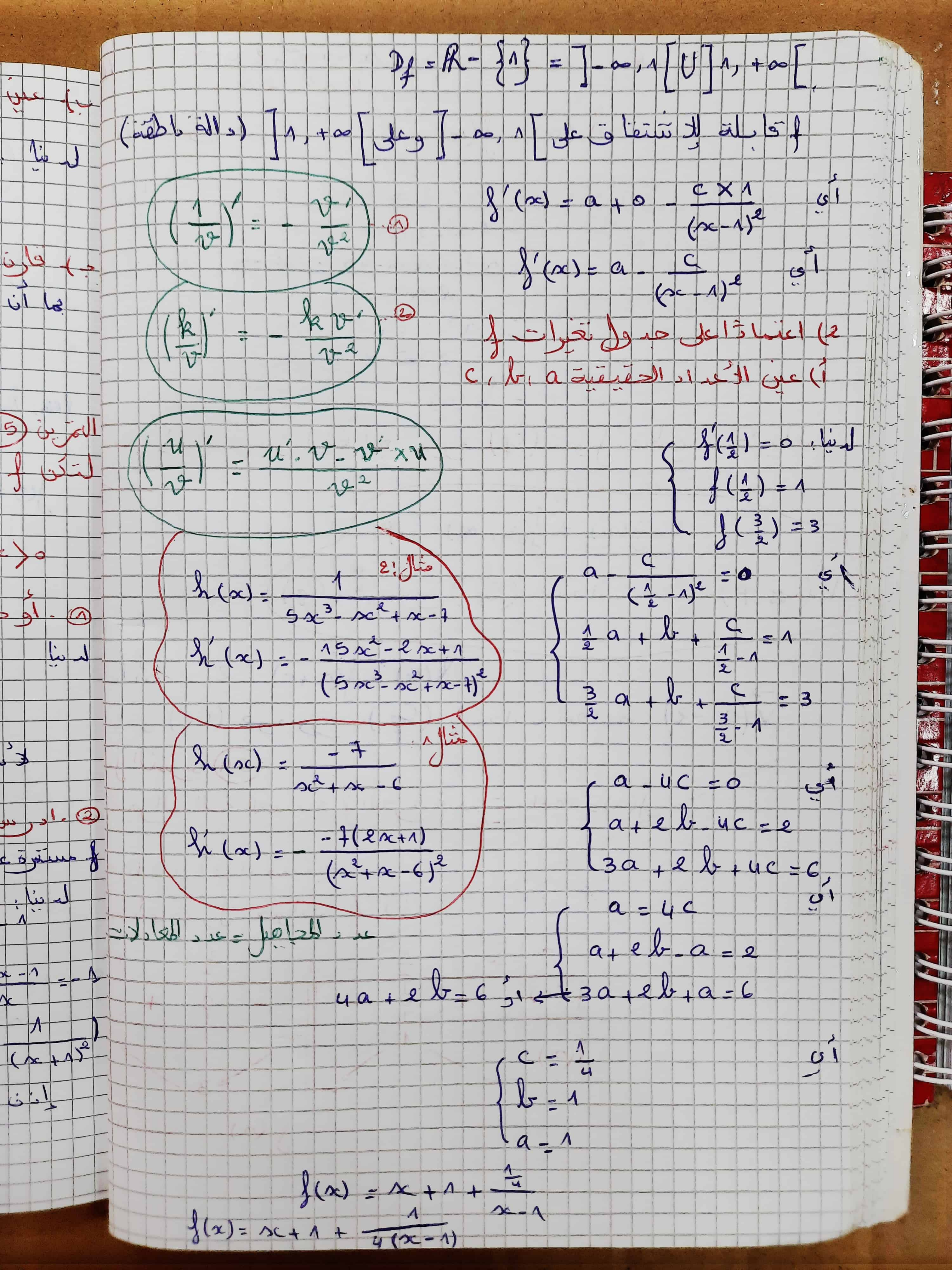
نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ $f(x) = ax+b+\frac{c}{x-1}$

a، b، c أعداد حقيقية.

نعطي جدول تغيرات f كما يلي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

1) احسب $f'(x)$



$D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

f قابلة للإشتقاق على $]-\infty, 1[$ وعلى $]1, +\infty[$ (دالة ناطقة)

أي $f'(x) = a + 0 - \frac{c \times 1}{(x-1)^2}$

أي $f'(x) = a - \frac{c}{(x-1)^2}$

$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ ①

$\left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{k v'}{v^2}$ ②

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \times u}{v^2}$

2) اعتمادا على جدول تغيرات f

أ) عين الأعداد الحقيقية a، b، c

لدينا:
$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \end{cases}$$

مثال 2:

$h(x) = \frac{1}{5x^3 - x^2 + x - 7}$

$h'(x) = -\frac{15x^2 - 2x + 1}{(5x^3 - x^2 + x - 7)^2}$

أي
$$\begin{cases} a - \frac{c}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = 0 \\ \frac{1}{2}a + b + \frac{c}{\frac{1}{2} - 1} = 1 \\ \frac{3}{2}a + b + \frac{c}{\frac{3}{2} - 1} = 3 \end{cases}$$

مثال 1:

$h(x) = \frac{-7}{x^2 + x - 6}$

$h'(x) = -\frac{-7(2x+1)}{(x^2 + x - 6)^2}$

أي
$$\begin{cases} a - 4c = 0 \\ a + 2b - 4c = 2 \\ 3a + 2b + 4c = 6 \end{cases}$$

عدد المجاهيل = عدد المعادلات

أي
$$\begin{cases} a = 4c \\ a + 2b - a = 2 \\ 3a + 2b + a = 6 \end{cases}$$

أي $4a + 2b = 6$

أي
$$\begin{cases} c = \frac{1}{4} \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x - 1}$

$f(x) = x + 1 + \frac{1}{4(x-1)}$

ب) عين $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$

لدينا: $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$

جـ) قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة f معللا إجابتك

بما أن $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ إذن $f(\frac{1}{2}) > f(\frac{3}{4})$

لأن f متناقصة تماما على $[\frac{1}{2} ; 1[$

التمرين (35)

لتكن f الدالة العددية حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+2x-1}{1-2x} ; & x \leq 0 \\ 2x - \dfrac{1}{(x+1)^2} ; & x > 0 \end{cases}$$

① أوجد مجموعة تعريف الدالة f

لدينا $D_f =]-\infty, 0] \cup]0, +\infty[$

$D_f =]-\infty ; +\infty[$

لأن $\frac{1}{2} \notin]-\infty, 0]$ و $-1 \notin]0, +\infty[$

② أدرس استمرارية f عند 0

f مستمرة عند 0 معناه $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$

لدينا:

• $f(0) = \frac{3(0)^2+2(0)-1}{1-2(0)} = -1$

• $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{3x^2+2x-1}{1-2x} = -1$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (2x - \frac{1}{(x+1)^2}) = -1$

إذن $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0) = -1$

ومنه f مستمرة عند 0

ب) أدرس قابلية اشتقاق f عند 0

قابلية الإشتقاق عند x_0

معناه

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$$

حيث: $l \in \mathbb{R}$

f قابلة للإشتقاق عند 0 معناه $l \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = l$

لدينا $f(0) = -1$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2x - \frac{1}{(x+1)^2} - (-1)}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{2x(x+1)^2 - 1 + (x+1)^2}{(x+1)^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2x(x^2+2x+1) - 1 + x^2 + 2x + 1}{x(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 + 2x}{x(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x}{x(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x(2x^2+5x+4)}{x(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2x^2+5x+4}{(x+1)^2}$$

$$= 4$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\frac{3x^2+2x-1}{1-2x} - (-1)}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{3x^2 + 2x - 1 + (1-2x)}{x(1-2x)}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{3x^2}{x(1-2x)}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{3x^2}{x(1-2x)}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{3x}{1-2x}$$

$$= 0$$

ومنه: $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

أي f غير قابلة للإشتقاق عند 0

ملاحظة:

• بما أن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 4$

إذن f قابلة للإشتقاق على يمين 0

ونكتب $f'_d(0) = 4$

(العدد المشتق للدالة f على يمين 0)

$f'_d(0) = 4$ هو معامل توجيه (أو ميل) نصف المماس لـ (C_f) على يمين 0

معادلة نصف المماس على يمين 0

هي $\begin{cases} y = f'(0)(x-0) + f(0) \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} y = 4x - 1 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

*) بما أن $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

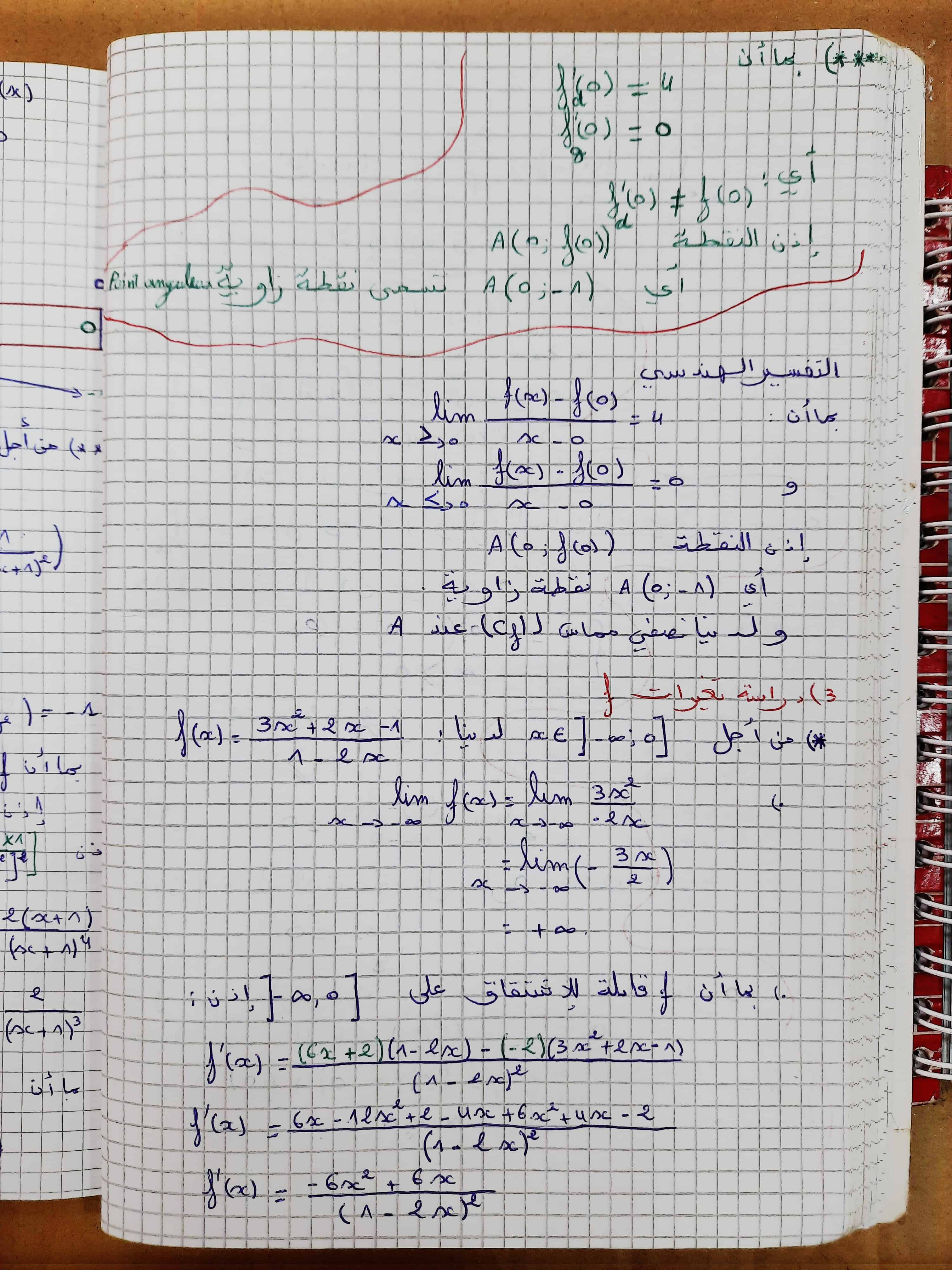
إذن f قابلة للإشتقاق على يسار 0 ونكتب:

$$f'_g(0) = 0$$

$f'(0)=0$ هو معامل توجيه نصف المماس لـ (C_f) على يسار 0

معادلة نصف المماس لـ (C_f) على يسار 0

هي: $\begin{cases} y = f(0)(x-0) + f(0) \\ x \leqslant 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} y = -1 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$



(*** بما أن

$f'_d(0) = 4$

$f'_g(0) = 0$

أي: $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

إذن النقطة $A(0; f(0))$

أي $A(0;-1)$ تسمى نقطة زاوية Point angulaire

التفسير الهندسي

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 4$

و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

إذن النقطة $A(0;f(0))$

أي $A(0;-1)$ نقطة زاوية.

ولدينا نصفي مماس لـ (C_f) عند A

3) دراسة تغيرات f

* من أجل $x \in]-\infty;0[$ لدينا: $f(x) = \frac{3x^2+2x-1}{1-2x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{-2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{3x}{2}\right)$$

$$= +\infty$$

بما أن f قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0[$ إذن:

$$f'(x) = \frac{(6x+2)(1-2x)-(-2)(3x^2+2x-1)}{(1-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x-12x^2+2-4x+6x^2+4x-2}{(1-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^2+6x}{(1-2x)^2}$$

$x \in]-\infty;0]$ لأن $(1-2x)^2 > 0$ $-6x^2+6x$ إشارة $f'(x)$ لها

$-6x^2+6x=0$ معناه $6x(-x+1)=0$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$ أو

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1

(** من أجل $x \in]0,+\infty[$ لدينا:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2x - \frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$= +\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(2x - \frac{1}{(x+1)^2}\right) = -1$$

بما أن f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$

إذن

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$f'(x) = 2 - \left[-\frac{2(x+1)\times 1}{[(x+1)^2]^2}\right]$$ إذن

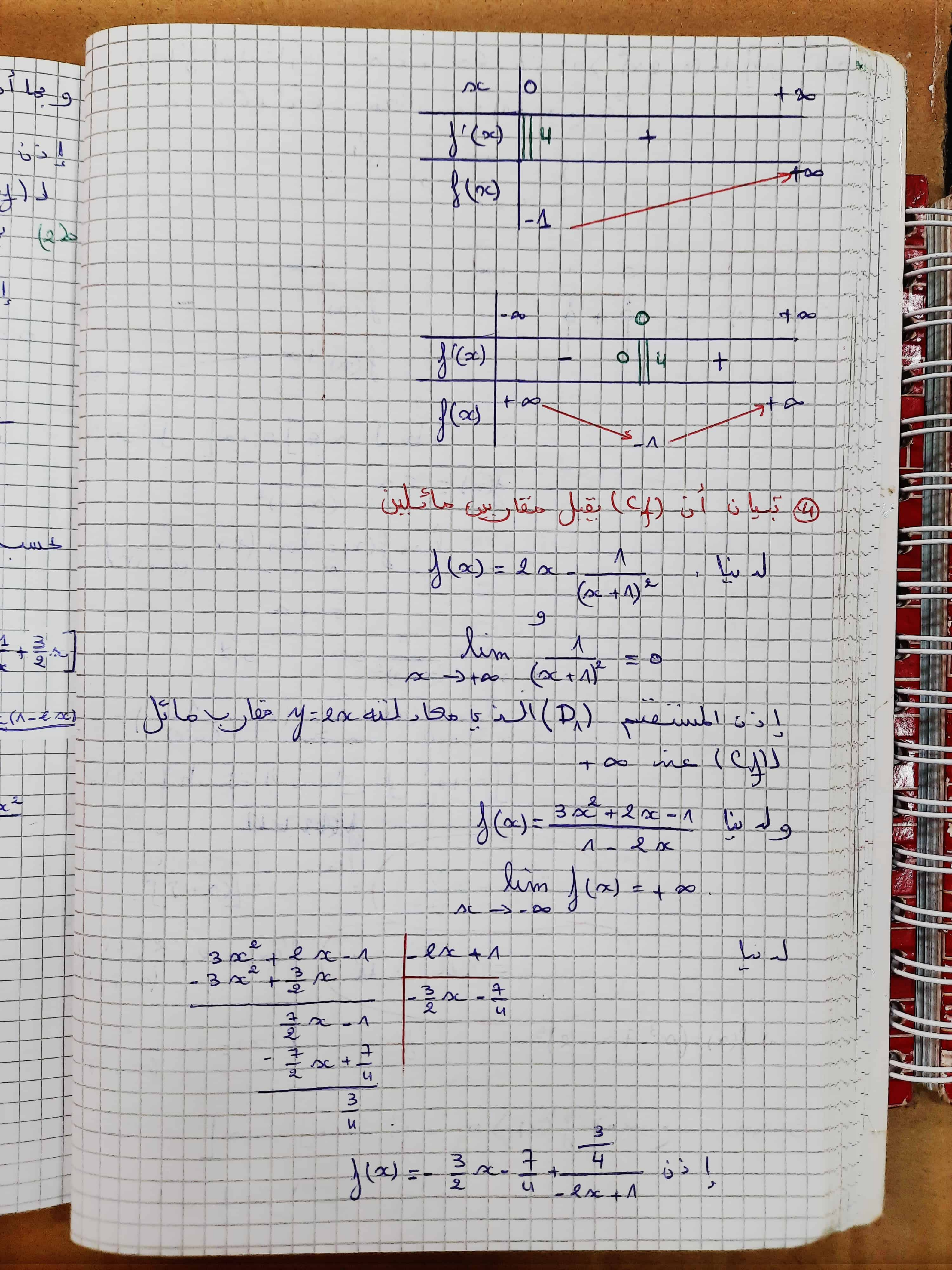
$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$$

$$f'(x) = 2 + \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{2}{(x+1)^3}$$

بما أن $x \in]0,+\infty[$ إذن $f'(x) > 0$ (مجموع عددين موجبين)

أي f متزايدة تماما



x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖ 4	$+$	
$f(x)$	-1	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 ‖ 4	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

④ تبيان أن (C_f) يقبل مقاربين مائلين

لدينا: $f(x) = 2x - \frac{1}{(x+1)^2}$

و

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

إذن المستقيم (D_1) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ولدينا $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{1 - 2x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

لدينا

$3x^2 + 2x - 1$	$-2x + 1$
$-3x^2 + \frac{3}{2}x$	$-\frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$
$\frac{7}{2}x - 1$	
$-\frac{7}{2}x + \frac{7}{4}$	
$\frac{3}{4}$	

إذن $f(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{4} + \frac{\frac{3}{4}}{-2x+1}$

وبما أن $\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3}{4}}{-2x+1} = 0$

إذن المستقيم (D_2) الذي معادلته $y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

ط2) بما أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

إذن نحسب $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3x^2+2x-1}{1-2x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x(1-2x)}$$

$$= \lim \frac{3x^2}{-2x^2} = -\frac{3}{2}$$

أي $a = -\frac{3}{2}$

نحسب:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{3x^2+2x-1}{1-2x} + \frac{3}{2}x\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2(3x^2+2x-1)+3x(1-2x)}{2(1-2x)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{6x^2+4x-2+3x-6x^2}{2(1-2x)}$$

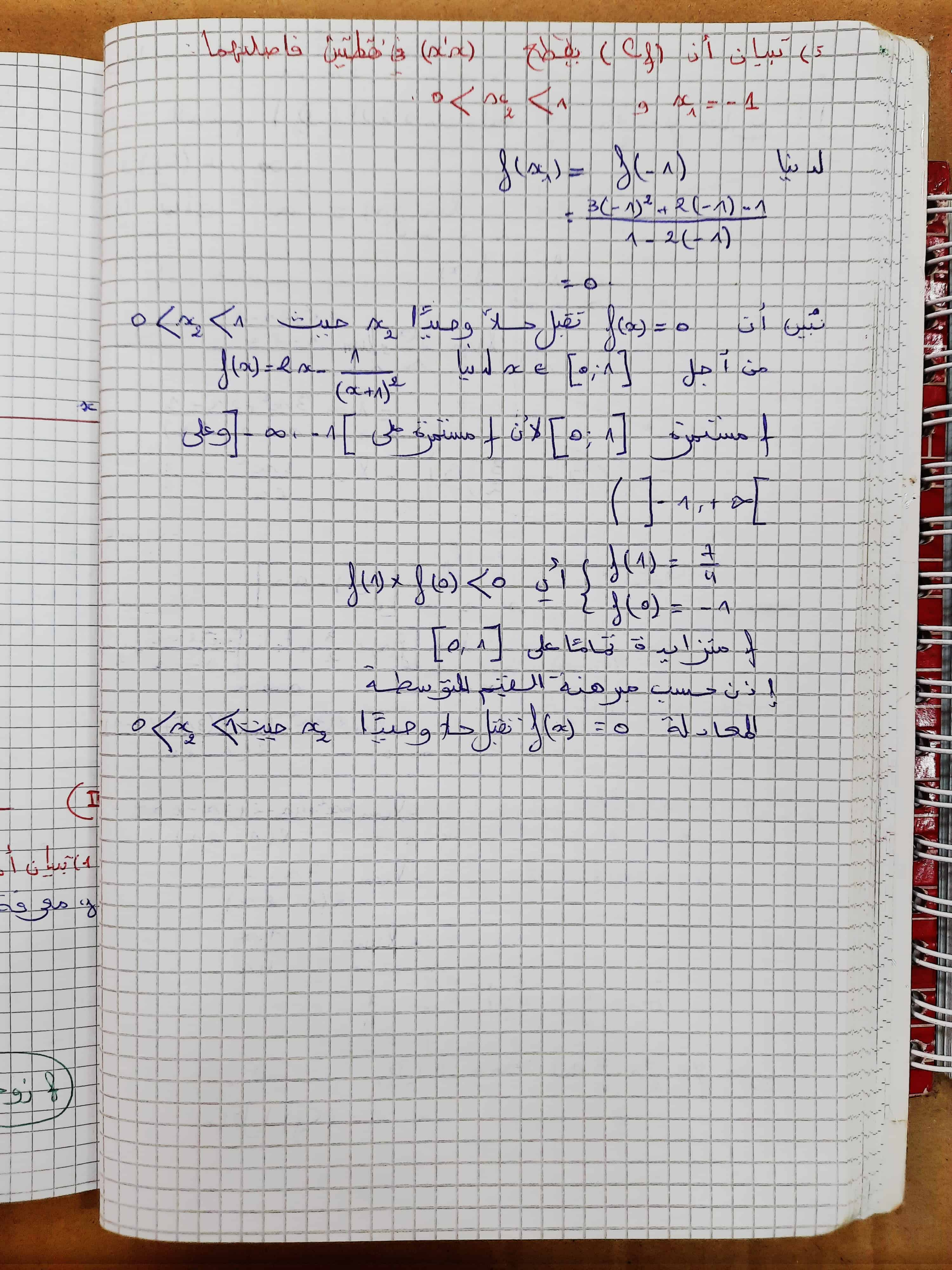
$$= \lim \frac{7x-2}{2(1-2x)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{7x}{-4x}$$

$$= -\frac{7}{4}$$

أي $b = -\frac{7}{4}$

إذن المستقيم (D_2) الذي معادلته $y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$



5) تبيان أن (C_f) يقطع $(x'x)$ في نقطتين فاصلتهما :

$x_1 = -1$ و $0 < x_2 < 1$.

لدينا $f(x_1) = f(-1)$

$= \frac{3(-1)^2 + 2(-1) - 1}{1 - 2(-1)}$

$= 0$.

نثبت أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_2 حيث $0 < x_2 < 1$

من أجل $x \in [0;1]$ لدينا $f(x) = 2x - \frac{1}{(x+1)^2}$

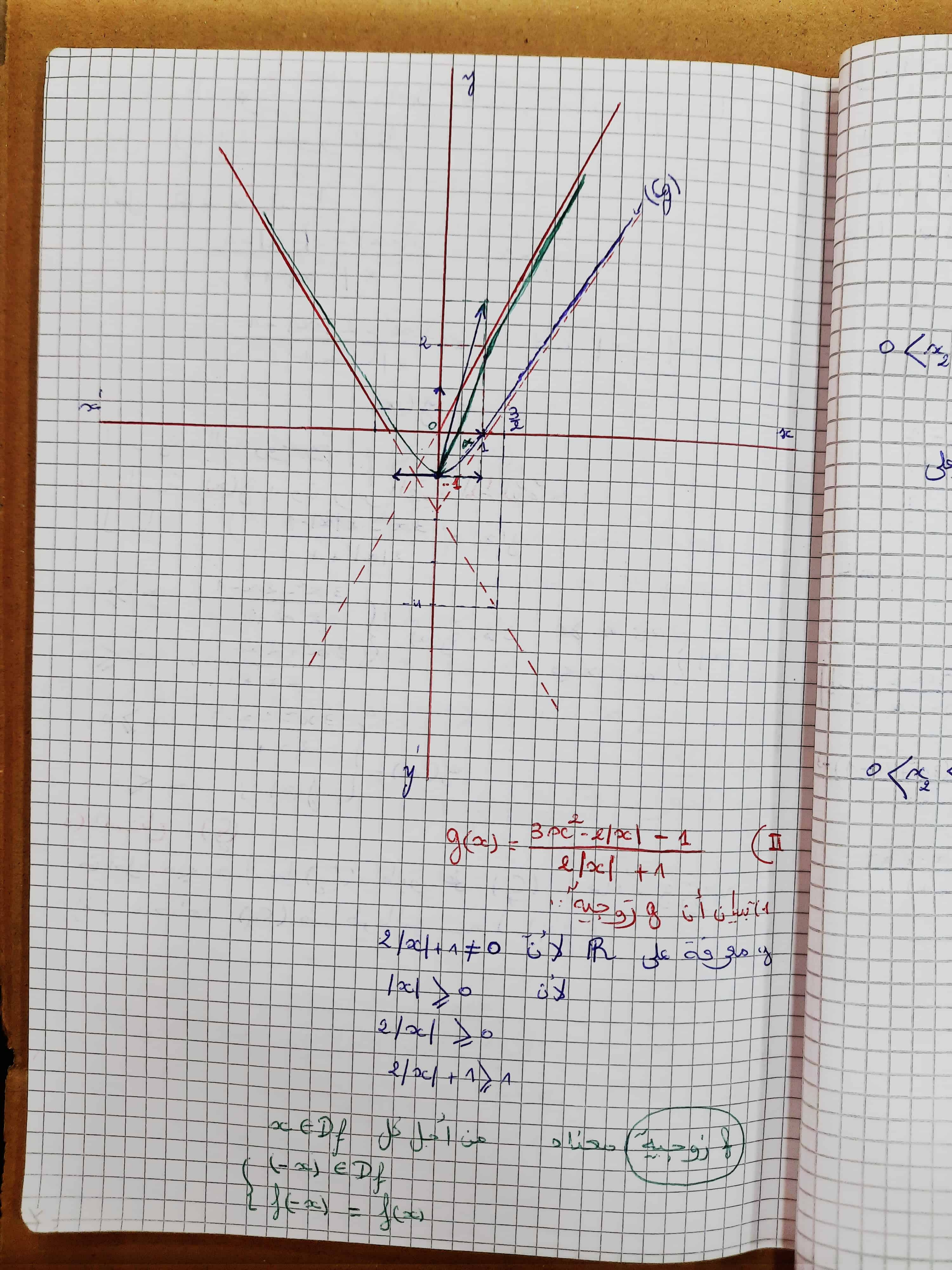
f مستمرة $[0;1]$ لأن f مستمرة على $]-\infty, -1[$ وعلى $]-1, +\infty[$)

$\begin{cases} f(1) = \frac{7}{4} \\ f(0) = -1 \end{cases}$ أي $f(1) \times f(0) < 0$

f متزايدة تماما على $[0,1]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_2 حيث $0 < x_2 < 1$



II) $g(x) = \dfrac{3x^2 - 2|x| - 1}{2|x| + 1}$

1) تبيان أن g زوجية:

g معرفة على $\mathbb{R}$ لأن $2|x|+1 \neq 0$

لأن $|x| \geq 0$

$2|x| \geq 0$

$2|x| + 1 \geq 1$

f زوجية معناه من أجل كل $x \in D_f$

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

منحنى الدالة الزوجية في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ يقبل $(y'y)$ كمحور تناظر

من أجل $x \in \mathbb{R}$ لدينا

$$g(-x) = \frac{3(-x)^2 - 2|-x| - 1}{2|-x| + 1}$$

$$= \frac{3x^2 - 2|x| - 1}{2|x| + 1}$$ لأن $|-x| = |x|$

$$= g(x)$$

إذن g دالة زوجية

2) كتابة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

لدينا $g(x) = \dfrac{3x^2 - 2|x| - 1}{2|x| + 1}$

$$g(x) \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x + 1} ; & x \geq 0 \\ \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{-2x + 1} ; & x \leq 0 \end{cases}$$ لأن $|x| \begin{cases} x ; & x \geq 0 \\ -x ; & x \leq 0 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x + 1} ; & x \geq 0 \\ f(x) ; & x \leq 0 \end{cases}$$

3) استنتاج (C_g)

من أجل $0 \leq x$ لدينا (C_g) ينطبق على (C_f) وبما أن g زوجية

إذن منحناها (C_g) متناظر بالنسبة لـ $(y'y)$

4) مناقشة حسب قيم m إشارة وحلول المعادلة

$$3x^2 - 2m|x| - m = 0$$

المعادلة تكتب

$$3x^2 = 2m|x| + m$$

$$3x^2 = (2|x| + 1)m$$

$$\frac{3x^2}{2|x|+1} = m$$

$$\frac{3x^2}{2|x|+1} - 1 = m - 1$$

$$g(x) = m - 1$$

أي

$$\begin{cases} y = g(x) \\ y = m - 1 = \alpha \end{cases}$$

حلول المعادلة المعطاة هي فواصل نقاط تقاطع (C_g) مع المستقيم الذي معادلته $y = m - 1$

إذا كان $\alpha < -1$ أي $m - 1 < -1$ أي $m < 0$ لا توجد حلول

إذا كان $\alpha = -1$ أي $m - 1 = -1$ أي $m = 0$ حل وحيد هو 0

إذا كان $\alpha > -1$ أي $m - 1 > -1$ أي $m > 0$ حلان مختلفان في الإشارة

التمرين 36

بسط العبارات الآتية:

1) $(e^x)^3 \times e^{-5x} \times \frac{1}{e^x}$

2) $\frac{e^{3x-1}}{e^{2x}}$

3) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$

1) لدينا $(e^x)^3 \times e^{-5x} \times \frac{1}{e^x} = e^{3x} \times e^{-5x} \times e^{-x}$ لأن

$$= e^{3x - 5x - x}$$

$$= e^{-3x}$$

$$= \frac{1}{e^{3x}}$$

$(e^x)^n = e^{nx}$

$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

$e^x \times e^y = e^{x+y}$

2) $\frac{e^{3x-1}}{e^{2x}} = e^{3x-1-2x}$ لأن $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

$= e^{x-1}$

3) لدينا $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} = \frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{e^{2x}}$ $\qquad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$= e^{x-2x} + e^{-x-2x}$

$= e^{-x} + e^{-3x}$

طـ2) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} = (e^x + e^{-x}) \times \frac{1}{e^{2x}}$

$= (e^x + e^{-x}) \times e^{-2x}$

$= e^x \times e^{-2x} + e^{-x} \times e^{-2x}$

$= e^{-x} + e^{-3x}$

التمرين 37

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x

1) $\frac{e^x}{2+e^x} = \frac{1}{2e^{-x}+1}$

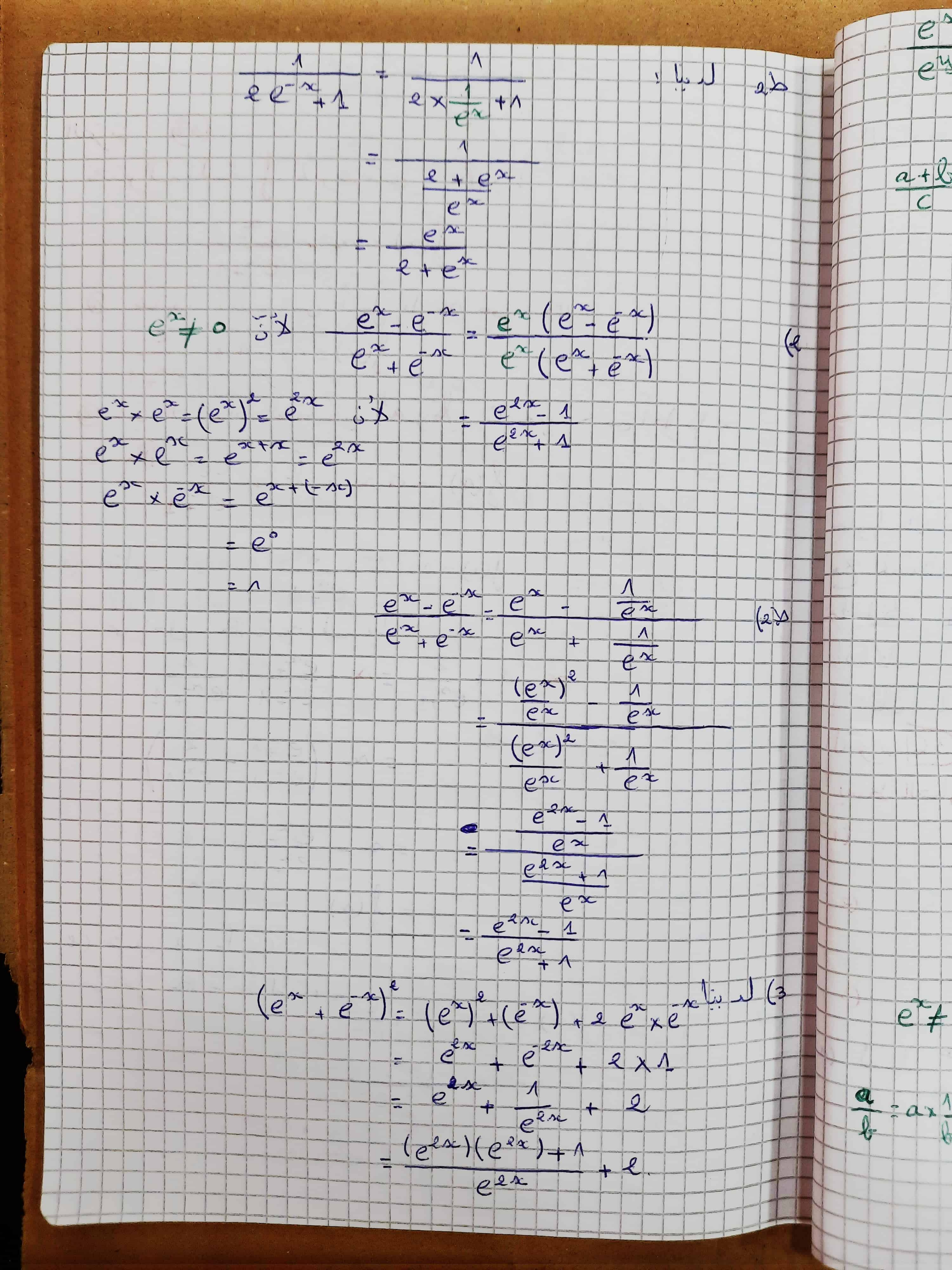
2) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

3) $(e^x + e^{-x})^2 = \frac{e^{4x}+1}{e^{2x}} + 2$

1 لدينا $\frac{e^x}{2+e^x} = \frac{e^x}{e^x\left(\frac{2}{e^x}+1\right)}$

$= \frac{1}{2 \times \frac{1}{e^x} + 1}$ لأن $e^x > 0$ أي $e^x \neq 0$

$= \frac{1}{2e^{-x}+1}$ لأن $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\qquad \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$



ط2) لدينا :

$$\frac{1}{2e^{-x}+1} = \frac{1}{2\times\frac{1}{e^x}+1} = \frac{1}{\frac{2+e^x}{e^x}} = \frac{e^x}{2+e^x}$$

(2

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x(e^x-e^{-x})}{e^x(e^x+e^{-x})} \quad \text{لأن } e^x \neq 0$$

$$= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

لأن $e^x \times e^x = (e^x)^2 = e^{2x}$

$e^x \times e^x = e^{x+x} = e^{2x}$

$e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)}$

$= e^0$

$= 1$

(2ب

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{(e^x)^2}{e^x} - \frac{1}{e^x}}{\frac{(e^x)^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

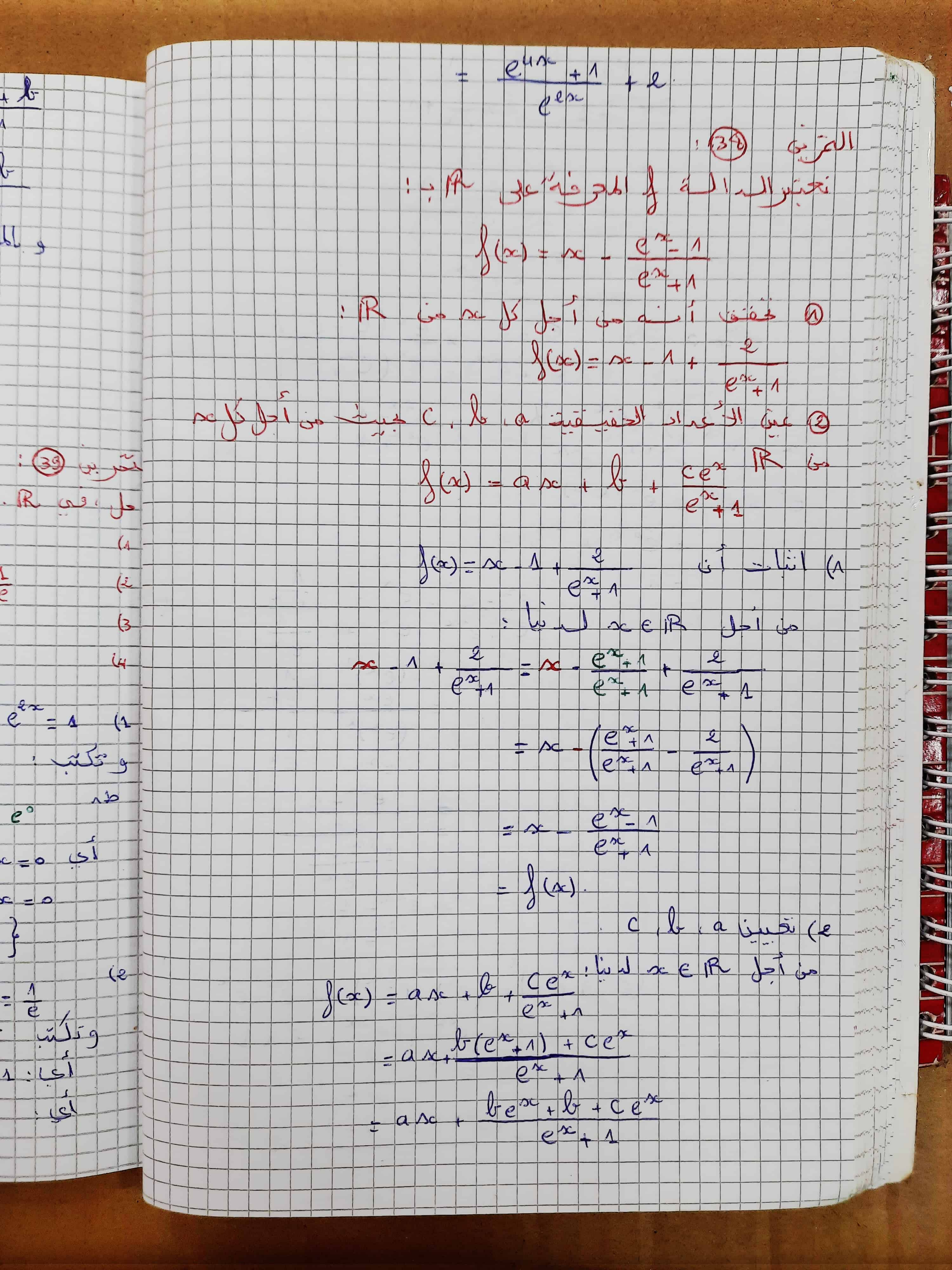
3) لدينا

$$(e^x+e^{-x})^2 = (e^x)^2+(e^{-x})^2+2e^x\times e^{-x}$$

$$= e^{2x}+e^{-2x}+2\times 1$$

$$= e^{2x}+\frac{1}{e^{2x}}+2$$

$$= \frac{(e^{2x})(e^{2x})+1}{e^{2x}}+2$$



$$= \frac{e^{4x}+1}{e^{2x}} + 2$$

التمرين 34 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

2) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$f(x) = ax + b + \frac{ce^x}{e^x + 1}$$

1) اثبات أن $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$

من أجل $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = x - \frac{e^x+1}{e^x+1} + \frac{2}{e^x+1}$$

$$= x - \left(\frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{2}{e^x+1}\right)$$

$$= x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$= f(x)$$

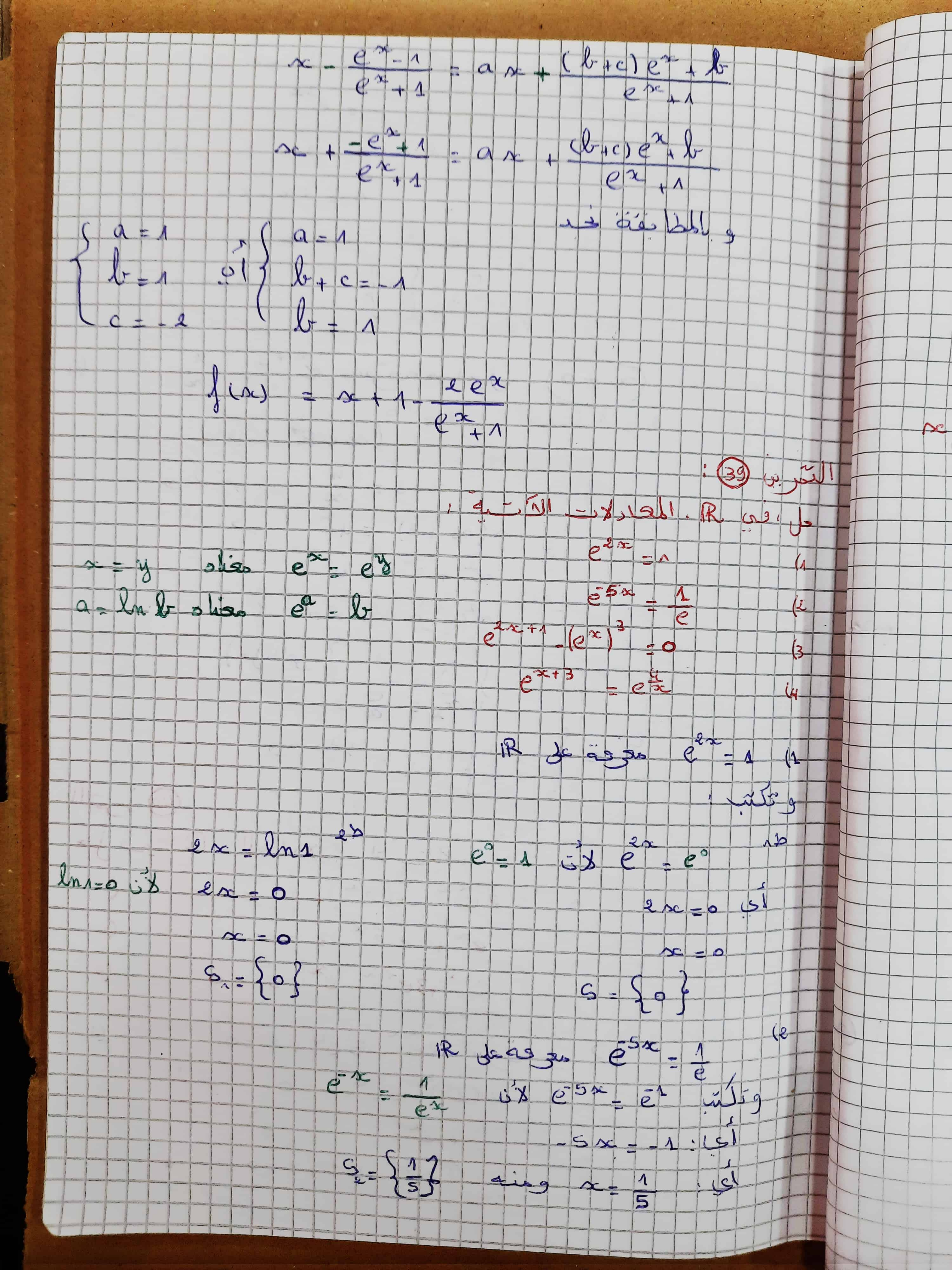
2) تعيين a ، b ، c .

من أجل $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$f(x) = ax + b + \frac{ce^x}{e^x+1}$$

$$= ax + \frac{b(e^x+1) + ce^x}{e^x+1}$$

$$= ax + \frac{be^x + b + ce^x}{e^x+1}$$



$$x - \frac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1} = ax + \frac{(b+c)e^{x} + b}{e^{x}+1}$$

$$x + \frac{-e^{x} + 1}{e^{x}+1} = ax + \frac{(b+c)e^{x} + b}{e^{x}+1}$$

و بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + c = -1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$$

التمرين (39):

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية:

1) $e^{2x} = 1$

2) $e^{-5x} = \frac{1}{e}$

3) $e^{2x+1} - (e^{x})^{3} = 0$

4) $e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}}$

$e^{x} = e^{y}$ معناه $x = y$

$e^{a} = b$ معناه $a = \ln b$

1) $e^{2x} = 1$ معرفة على $\mathbb{R}$

وتكتب:

ط1: $e^{2x} = e^{0}$ لأن $e^{0} = 1$

أي $2x = 0$

$x = 0$

$S = \{0\}$

ط2: $2x = \ln 1$

$2x = 0$ لأن $\ln 1 = 0$

$x = 0$

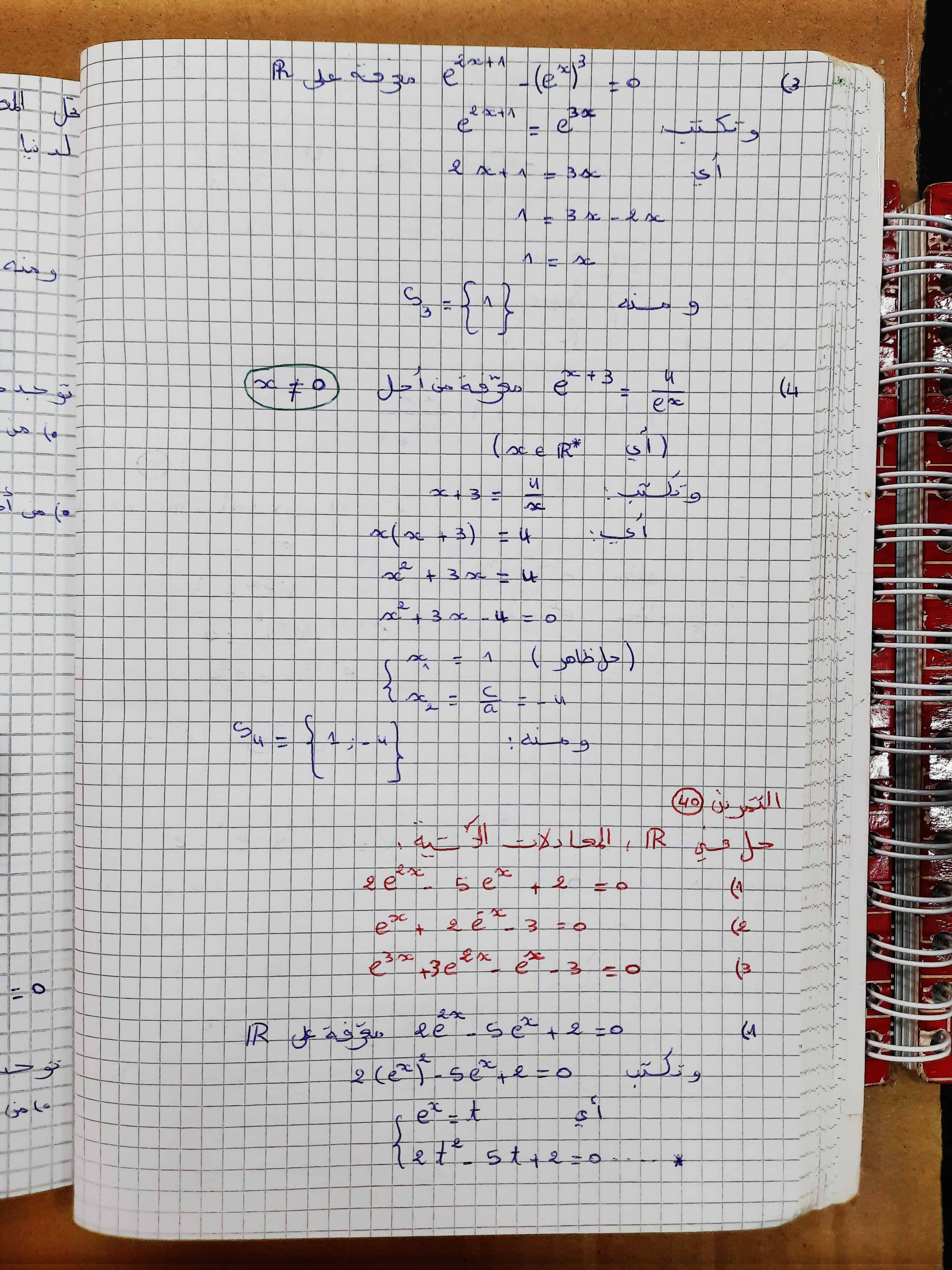
$S_1 = \{0\}$

2) $e^{-5x} = \frac{1}{e}$ معرفة على $\mathbb{R}$

وتكتب: $e^{-5x} = e^{-1}$ لأن $e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$

أي: $-5x = -1$

أي: $x = \frac{1}{5}$ ومنه $S_2 = \left\{\frac{1}{5}\right\}$



3) $e^{2x+1} - (e^{x})^{3} = 0$ معرفة على $\mathbb{R}$

ونكتب: $e^{2x+1} = e^{3x}$

أي $2x+1 = 3x$

$1 = 3x - 2x$

$1 = x$

ومنه $S_3 = \{1\}$

4) $e^{x+3} = \dfrac{4}{e^{x}}$ معرفة من أجل $x \neq 0$

(أي $x \in \mathbb{R}^*$)

ونكتب: $x+3 = \dfrac{4}{x}$

أي: $x(x+3) = 4$

$x^2 + 3x = 4$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$\begin{cases} x_1 = 1 & \text{(حل ظاهر)} \\ x_2 = \dfrac{c}{a} = -4 \end{cases}$

ومنه: $S_4 = \{1 ; -4\}$

التمرين 40

حل في $\mathbb{R}$، المعادلات الآتية:

1) $2e^{2x} - 5e^{x} + 2 = 0$

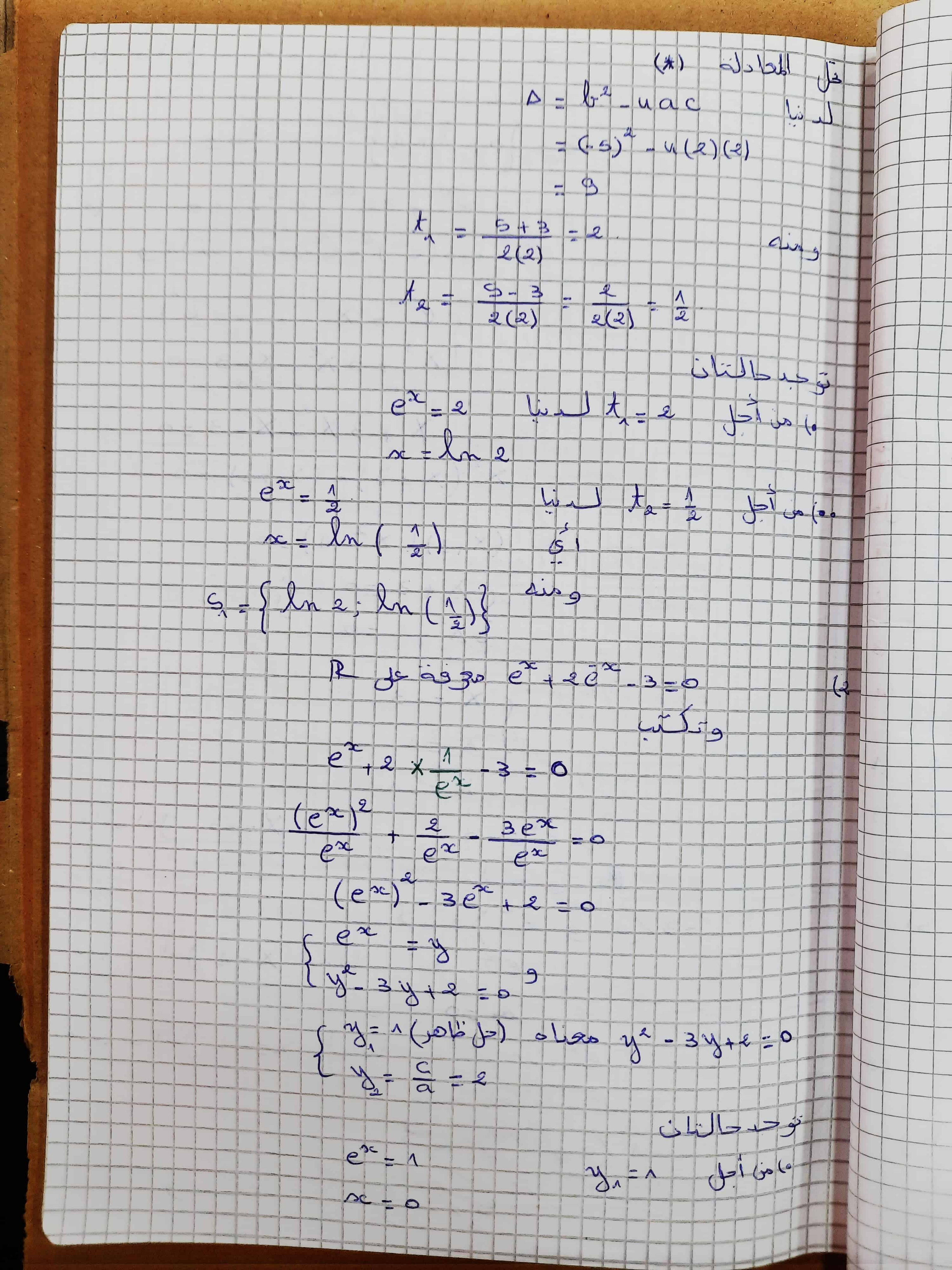
2) $e^{x} + 2e^{-x} - 3 = 0$

3) $e^{3x} + 3e^{2x} - e^{x} - 3 = 0$

1) $2e^{2x} - 5e^{x} + 2 = 0$ معرفة على $\mathbb{R}$

ونكتب $2(e^{x})^2 - 5e^{x} + 2 = 0$

أي $\begin{cases} e^{x} = t \\ 2t^2 - 5t + 2 = 0 \ldots\ldots * \end{cases}$



حل المعادلة (*)

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-5)^2 - 4(2)(2)$

$= 9$

ومنه $t_1 = \frac{5+3}{2(2)} = 2$

$t_2 = \frac{5-3}{2(2)} = \frac{2}{2(2)} = \frac{1}{2}$

توجد حالتان

1) من أجل $t_1 = 2$ لدينا $e^x = 2$

$x = \ln 2$

2) من أجل $t_2 = \frac{1}{2}$ لدينا $e^x = \frac{1}{2}$

أي $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

ومنه $S_1 = \left\{ \ln 2 \,;\, \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$

2) $e^x + 2e^{-x} - 3 = 0$ معرفة على $\mathbb{R}$

وتكتب

$e^x + 2 \times \frac{1}{e^x} - 3 = 0$

$\frac{(e^x)^2}{e^x} + \frac{2}{e^x} - \frac{3e^x}{e^x} = 0$

$(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$

$\begin{cases} e^x = y \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$ و

$y^2 - 3y + 2 = 0$ معناه $\begin{cases} y_1 = 1 \text{ (حل ظاهر)} \\ y_2 = \frac{c}{a} = 2 \end{cases}$

توجد حالتان

1) من أجل $y_1 = 1$: $e^x = 1$

$x = 0$

... من أجل $y_2 = 2$ لدينا $e^x = 2$

أي $x = \ln 2$

ومنه $S_2 = \{0 ; \ln 2\}$

3) $e^{3x} + 3e^{2x} - e^x - 3 = 0$

ونكتب: $(e^x)^3 + 3(e^x)^2 - e^x - 3 = 0$

أي
$$\begin{cases} e^x = X \\ X^3 + 3X^2 - X - 3 = 0 \end{cases}$$

$$X^3 + 3X^2 - X - 3 = 0$$

$$X^2(X+3) - (X+3) = 0$$

$$(X+3)(X^2-1) = 0$$

أي أو
$$\begin{cases} X + 3 = 0 \\ X^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = -3 \\ X = 1 \\ X = -1 \end{cases}$$

•) من أجل $X = -3$ لدينا $e^x = -3$

مستحيلة في $\mathbb{R}$

لأن $e^x > 0$ و $-3 < 0$

..) من أجل $X = 1$ لدينا $e^x = 1$

أي $x = 0$

...) من أجل $X = -1$ لدينا $e^x = -1$

مستحيلة في $\mathbb{R}$

لأن $e^x > 0$ و $-1 < 0$

ومنه $S_3 = \{0\}$

التمرين (٢٨)

احسب

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$$

ح ع ت من الشكل « $\frac{0}{0}$ »

لأن

$$\lim_{x \to 0} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}\right)$$

$$= \sqrt{1+\sin 0} - \sqrt{1-\sin 0}$$

$$= \sqrt{1} - \sqrt{1} \quad \text{لأن} \quad \sin 0 = 0$$

$$= 0$$

$$\frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^2 - \left(\sqrt{1-\sin x}\right)^2}{x\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$= \frac{1 + \sin x - 1 + \sin x}{x\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$= \frac{2\sin x}{x\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right)}$$

و منه

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} = \lim \frac{2\sin x}{x\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$= 1 \times \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

التمرين (42):

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$$

1) أ) أحسب $f(-1)$ و $f(-3)$

ب) استنتج تحليلا للعبارة $f(x)$

2) أ- حل في $\mathbb{R}$، المعادلة $f(x) = 0$

ب- استنتج حلول المعادلة:

$$e^{2x} - 4e^{x} - 29 - 24e^{-x} = 0$$

1) أ) لدينا $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 29(-1) - 24$

$f(-1) = -1 - 4 + 29 - 24$

أي $f(-1) = 0$

$f(-3) = (-3)^3 - 4(-3)^2 - 29(-3) - 24$

$= -27 - 36 - 87 - 24$

أي $f(-3) = 0$

ب) استنتاج تحليل $f(x)$

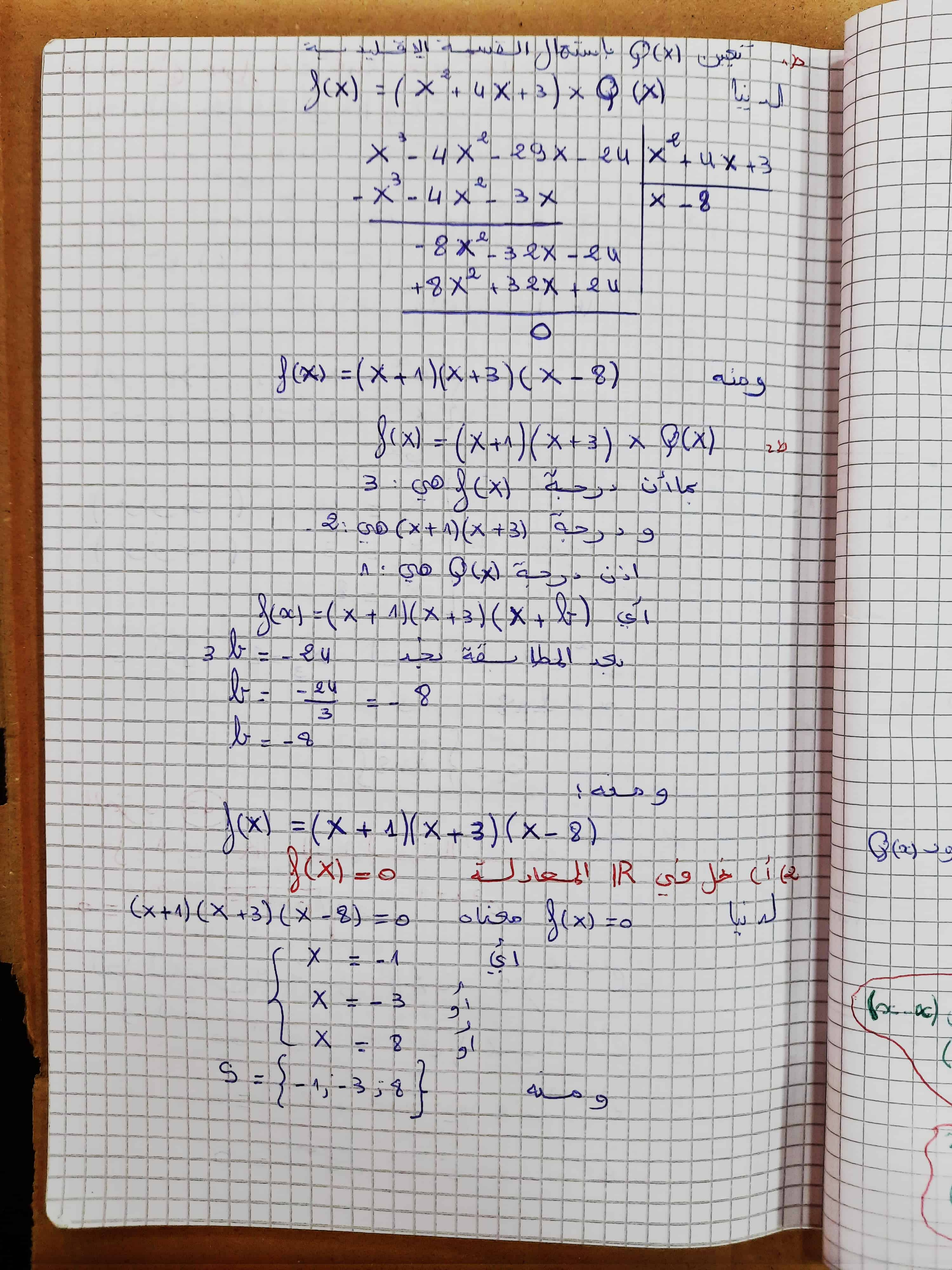
بما أن $f(-1) = 0$ و $f(-3) = 0$ إذن

(-1) و (-3) هما جذرا $f(x)$ أي يوجد كثير حدود $Q(x)$

حيث $f(x) = (x+1)(x+3) \times Q(x)$

إذا كان $P(x)$ يقبل القسمة على $(x-\alpha)$ و $(x-\beta)$ حيث $(\alpha \neq \beta)$

فإن: $P(x)$ يقبل القسمة على $(x-\alpha)(x-\beta)$



ج) تعيين $Q(x)$ باستعمال القسمة الإقليدية

لدينا $f(x) = (x^2+4x+3) \times Q(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2-29x-24 & x^2+4x+3 \\ \hline -x^3-4x^2-3x & x-8 \\ -8x^2-32x-24 & \\ +8x^2+32x+24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه $f(x) = (x+1)(x+3)(x-8)$

ط2) $f(x) = (x+1)(x+3) \times Q(x)$

بما أن درجة $f(x)$ هي : 3

و درجة $(x+1)(x+3)$ هي : 2.

اذن درجة $Q(x)$ هي : 1

أي $f(x) = (x+1)(x+3)(x+b)$

بعد المطابقة نجد $3b = -24$

$b = \frac{-24}{3} = -8$

$b = -8$

ومنه:

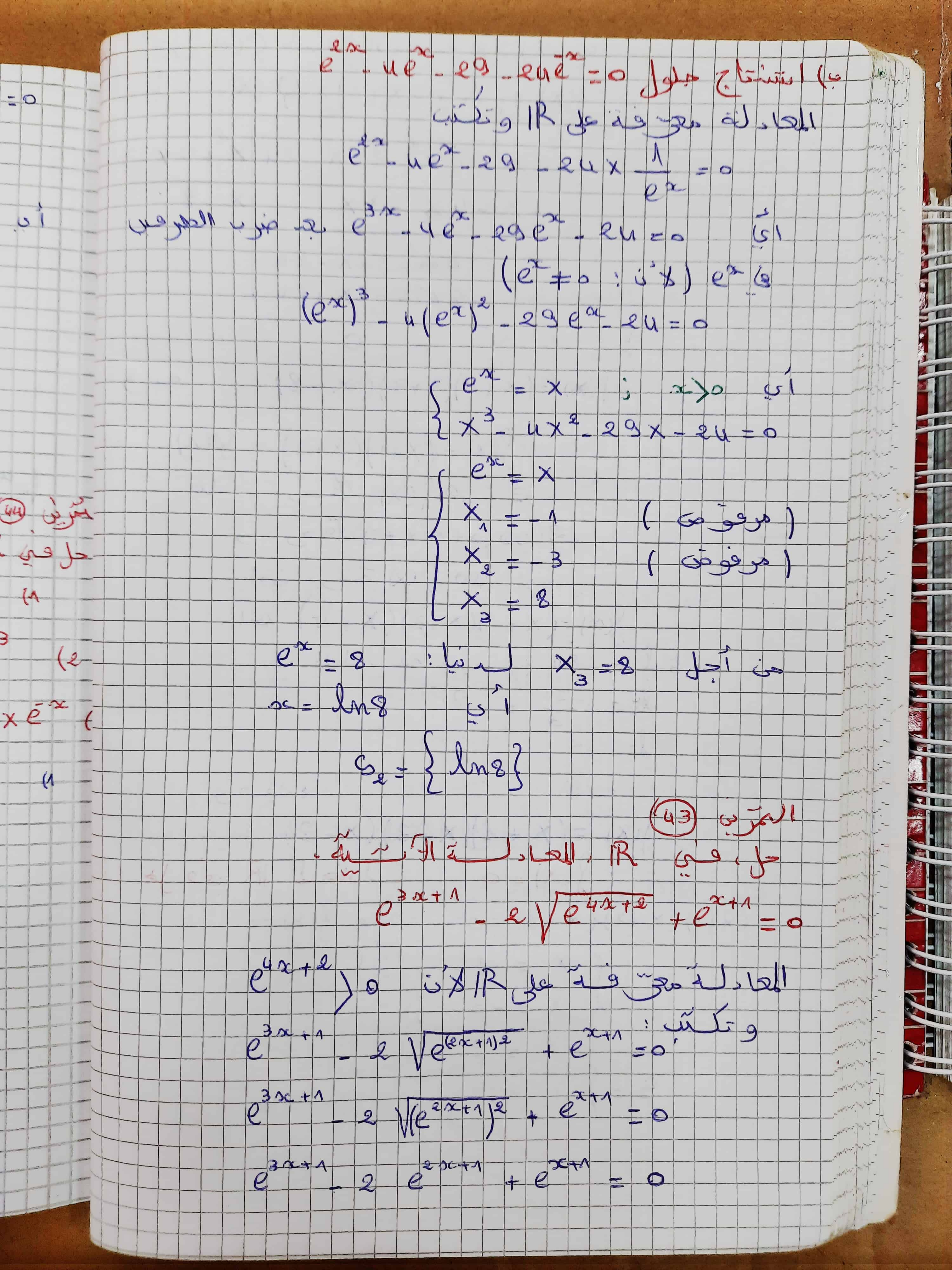
$f(x) = (x+1)(x+3)(x-8)$

2) أ) حل في IR المعادلة $f(x) = 0$

لدينا $f(x) = 0$ معناه $(x+1)(x+3)(x-8) = 0$

أي
$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \\ x = 8 \end{cases}$$
أو / أو

ومنه $S = \{-1; -3; 8\}$



ب) استنتاج حلول $e^{2x}-4e^{x}-29-24e^{-x}=0$

المعادلة معرفة على $\mathbb{R}$ وتكتب

$$e^{2x}-4e^{x}-29-24\times\frac{1}{e^{x}}=0$$

أي $e^{3x}-4e^{2x}-29e^{x}-24=0$ بعد ضرب الطرفين في e^{x} ($e^{x}\neq 0$ لأن)

$$(e^{x})^{3}-4(e^{x})^{2}-29e^{x}-24=0$$

أي

$$\begin{cases} e^{x}=X \; ; \; X>0 \\ X^{3}-4X^{2}-29X-24=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{x}=X \\ X_1=-1 \quad (\text{مرفوض}) \\ X_2=-3 \quad (\text{مرفوض}) \\ X_3=8 \end{cases}$$

من أجل $X_3=8$ لدينا: $e^{x}=8$

أي $x=\ln 8$

$$S_2=\{\ln 8\}$$

التمرين 43

حل، في $\mathbb{R}$، المعادلة الآتية:

$$e^{3x+1}-2\sqrt{e^{4x+2}}+e^{x+1}=0$$

المعادلة معرفة على $\mathbb{R}$ لأن $e^{4x+2}>0$

وتكتب:

$$e^{3x+1}-2\sqrt{e^{(2x+1)2}}+e^{x+1}=0$$

$$e^{3x+1}-2\sqrt{(e^{2x+1})^{2}}+e^{x+1}=0$$

$$e^{3x+1}-2e^{2x+1}+e^{x+1}=0$$

$$e^{3x} \times e^{-1} - 2e^{2x} \times e^{-1} + e^{x} \times e = 0$$

بالإختزال على e $\quad$ $e^{3x} - 2e^{2x} + e^{x} = 0$

$$e^{x}(e^{2x} - 2e^{x} + 1) = 0$$

أي $\quad e^{2x} - 2e^{x} + 1 = 0 \quad$ لأن $\quad e^{x} \neq 0$

$$(e^{x})^2 - 2e^{x} + 1 = 0$$

$$(e^{x} - 1)^2 = 0$$

أي $\quad e^{x} - 1 = 0$

أي $\quad e^{x} = 1$

$$x = 0$$

$$S = \{0\}$$

التمرين (44)

حل في $\mathbb{R}$ ، المتراجحات الآتية:

1) $e^{2x} < 1$

2) $e^{2x^2} \leq e^{5x-3}$

3) $e^{x^2} > (e^{3})^{4} \times e^{-x}$

$e^{x} < e^{y}$ معناه $x < y$

$e^{x} < b$ معناه $x < \ln b$

$b > 0$

1) $e^{2x} < 1$ معرفة على $\mathbb{R}$

ونكتب $\quad e^{2x} < e^{0} \quad$ أي $\quad 2x < 0$

أي $\quad x < 0$

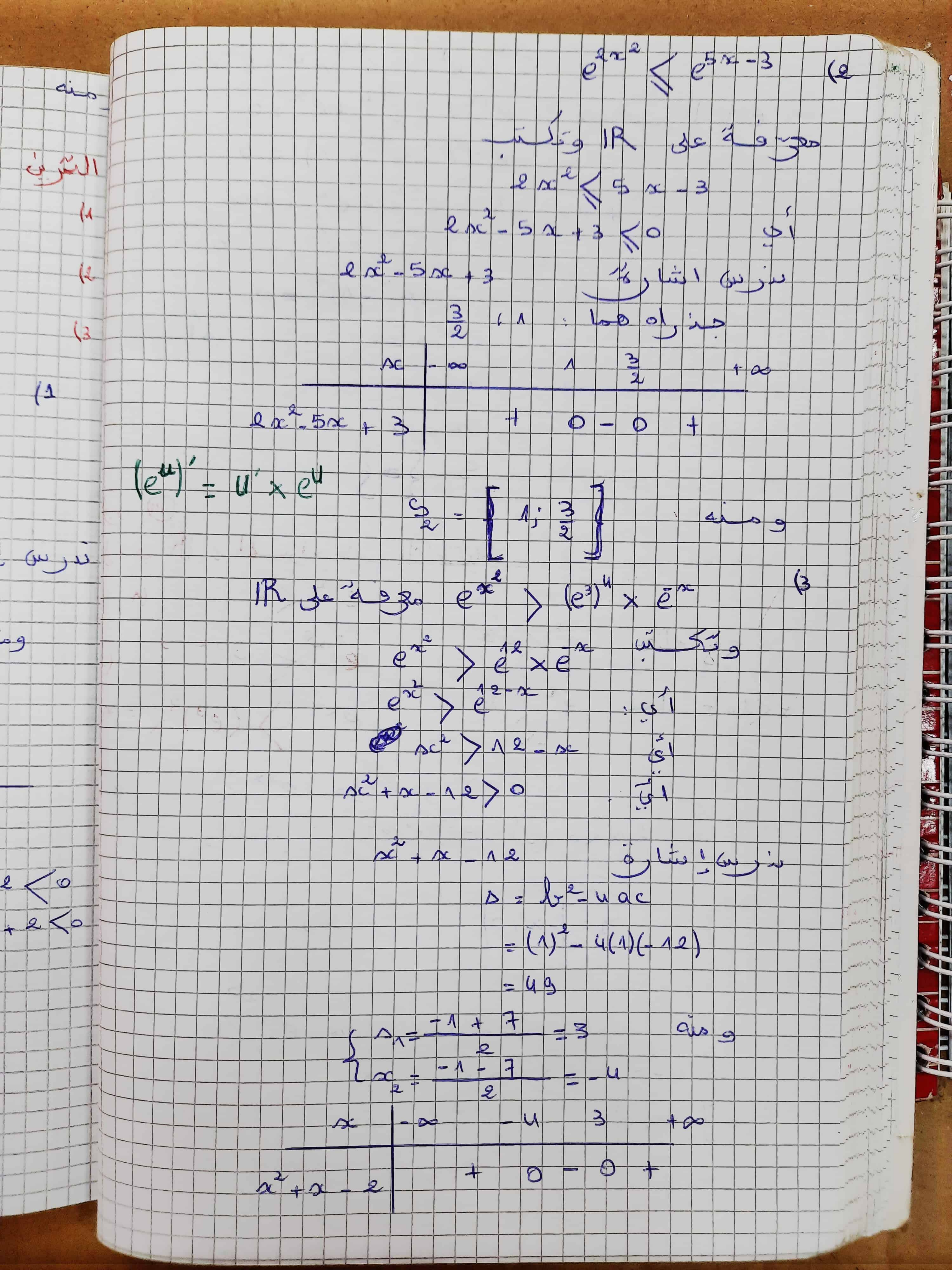
ومنه $\quad S_1 =]-\infty; 0[$

2b

$e^{2x} < 1$ معناه $2x < \ln 1$

أي $\quad 2x < 0 \quad$ لأن $\quad \ln 1 = 0$

أي $\quad x < 0 \quad\quad S_1 =]-\infty; 0[$



2) $e^{2x^2} \leqslant e^{5x-3}$

معرفة على $\mathbb{R}$ ونكتب

$2x^2 \leqslant 5x - 3$

أي $2x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$

ندرس اشارة $2x^2 - 5x + 3$

جذراه هما : 1 ، $\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2-5x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$(e^u)' = u' \times e^u$

ومنه $S_2 = \left[1 ; \frac{3}{2}\right]$

3) $e^{x^2} > (e^3)^4 \times e^{-x}$ معرفة على $\mathbb{R}$

ونكتب $e^{x^2} > e^{12} \times e^{-x}$

أي: $e^{x^2} > e^{12-x}$

أي: $x^2 > 12 - x$

أي: $x^2 + x - 12 > 0$

ندرس إشارة $x^2 + x - 12$

$\Delta = b^2 - 4ac$

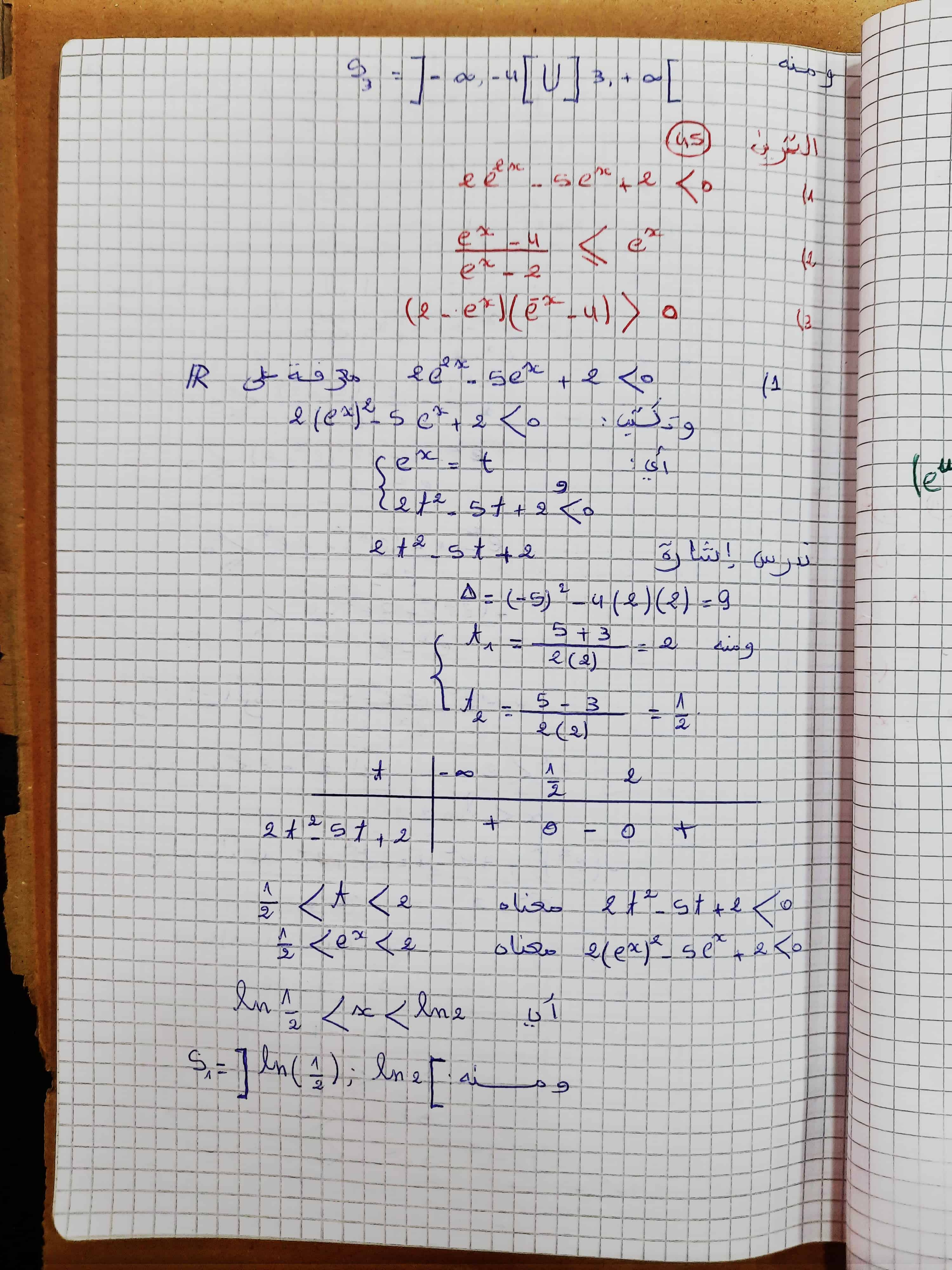
$= (1)^2 - 4(1)(-12)$

$= 49$

ومنه

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+7}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{-1-7}{2} = -4 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	



ومنه $S_3 =]-\infty, -4[\cup]3, +\infty[$

التمرين (45)

1) $2e^{2x} - 5e^{x} + 2 < 0$

2) $\dfrac{e^{x} - 4}{e^{x} - 2} \leq e^{x}$

3) $(2 - e^{x})(e^{-x} - 4) > 0$

1) $2e^{2x} - 5e^{x} + 2 < 0$ معرفة على $\mathbb{R}$

ونكتب: $2(e^{x})^2 - 5e^{x} + 2 < 0$

أي: $\begin{cases} e^{x} = t \\ 2t^2 - 5t + 2 < 0 \end{cases}$

ندرس إشارة $2t^2 - 5t + 2$

$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2) = 9$

ومنه $\begin{cases} t_1 = \dfrac{5+3}{2(2)} = 2 \\ t_2 = \dfrac{5-3}{2(2)} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

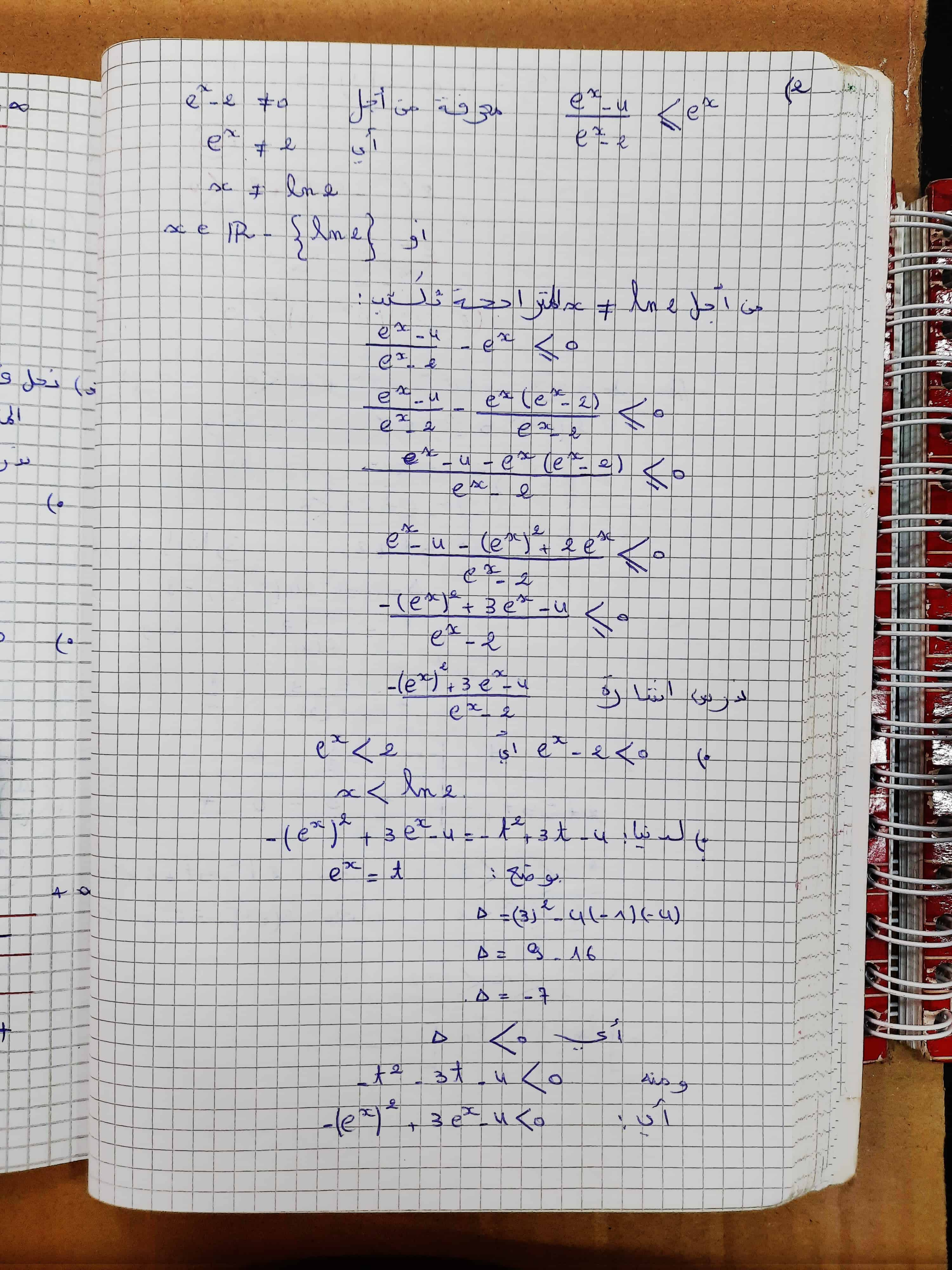
t	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2	
$2t^2 - 5t + 2$		+	0	−	0	+

$2t^2 - 5t + 2 < 0$ معناه $\frac{1}{2} < t < 2$

$2(e^{x})^2 - 5e^{x} + 2 < 0$ معناه $\frac{1}{2} < e^{x} < 2$

أي $\ln\frac{1}{2} < x < \ln 2$

ومنه $S_1 =]\ln(\frac{1}{2}); \ln 2[$



ع)

$\frac{e^x-4}{e^x-2} \leq e^x$ معرفة من أجل $e^x-2 \neq 0$

أي $e^x \neq 2$

$x \neq \ln 2$

أو $x \in \mathbb{R} - \{\ln 2\}$

من أجل $x \neq \ln 2$ المتراجحة تكتب:

$$\frac{e^x-4}{e^x-2} - e^x \leq 0$$

$$\frac{e^x-4}{e^x-2} - \frac{e^x(e^x-2)}{e^x-2} \leq 0$$

$$\frac{e^x-4-e^x(e^x-2)}{e^x-2} \leq 0$$

$$\frac{e^x-4-(e^x)^2+2e^x}{e^x-2} \leq 0$$

$$\frac{-(e^x)^2+3e^x-4}{e^x-2} \leq 0$$

ندرس اشارة $\frac{-(e^x)^2+3e^x-4}{e^x-2}$

أ) $e^x-2<0$ أي $e^x<2$

$x<\ln 2$

ب) لدينا: $-(e^x)^2+3e^x-4 = -t^2+3t-4$

بوضع: $e^x = t$

$\Delta = (3)^2 - 4(-1)(-4)$

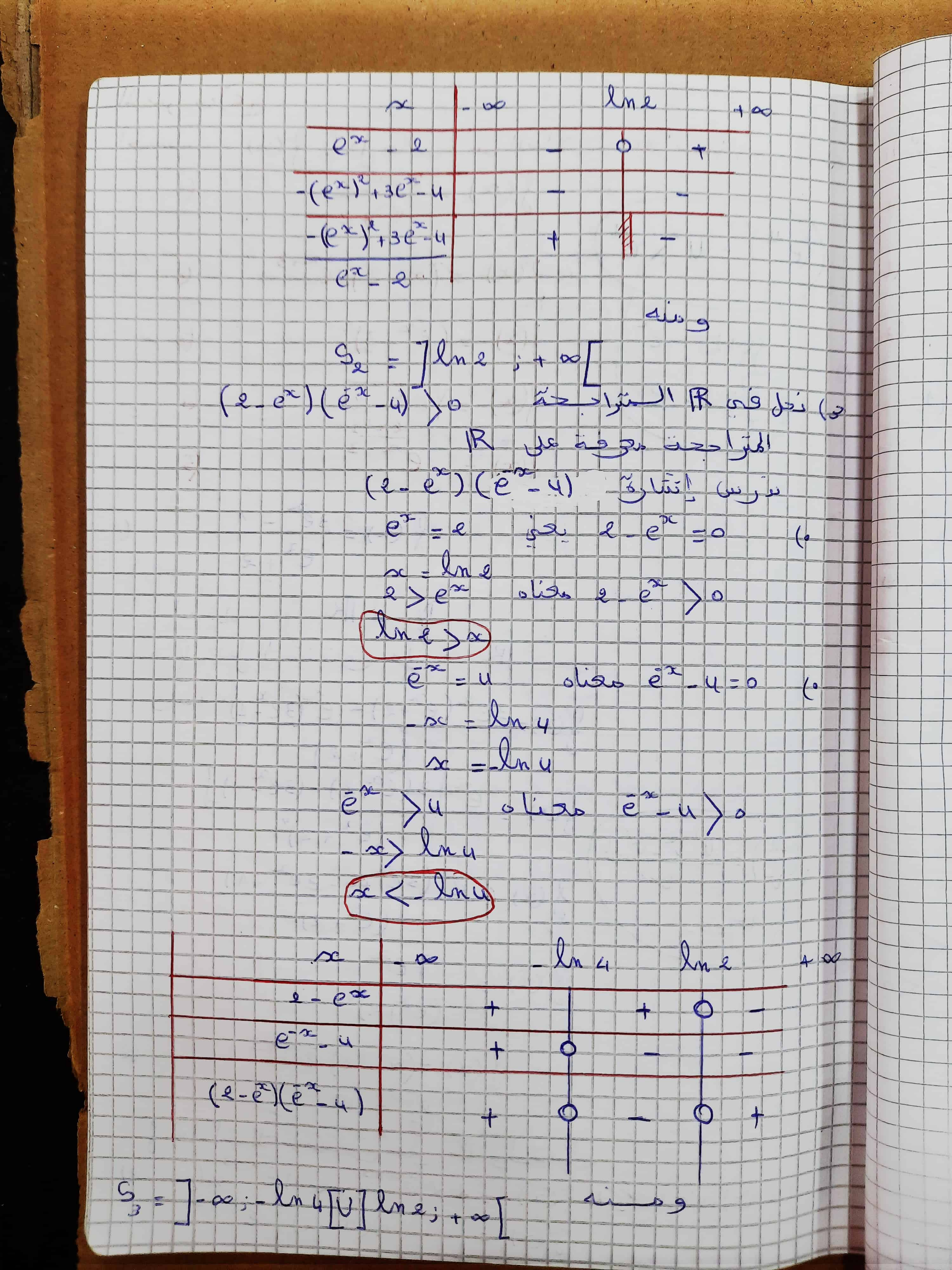
$\Delta = 9 - 16$

$\Delta = -7$

أي $\Delta < 0$

ومنه $-t^2-3t-4<0$

أي: $-(e^x)^2+3e^x-4<0$



x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$e^{x}-2$		$-$	0	$+$	
$-(e^{x})^{2}+3e^{x}-4$		$-$		$-$	
$\dfrac{-(e^{x})^{2}+3e^{x}-4}{e^{x}-2}$		$+$	‖	$-$	

ومنه

$$S_2 =]\ln 2 \, ; +\infty[$$

ج) نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $(2-e^{x})(e^{-x}-4)>0$

المتراجحة معرفة على $\mathbb{R}$

ندرس إشارة $(2-e^{x})(e^{-x}-4)$

•) $2-e^{x}=0$ يعني $e^{x}=2$

$x=\ln 2$

$2-e^{x}>0$ معناه $2>e^{x}$

$\ln 2>x$

•) $e^{-x}-4=0$ معناه $e^{-x}=4$

$-x=\ln 4$

$x=-\ln 4$

$e^{-x}-4>0$ معناه $e^{-x}>4$

$-x>\ln 4$

$x<-\ln 4$

x	$-\infty$		$-\ln 4$		$\ln 2$		$+\infty$
$2-e^{x}$		$+$		$+$	0	$-$	
$e^{-x}-4$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2-e^{x})(e^{-x}-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه

$$S_3 =]-\infty \, ; -\ln 4[\cup]\ln 2 \, ; +\infty[$$

التمرين (46)

احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 2}$

2) $f(x) = (x-2)e^{-x+3}$

3) $f(x) = (e^x - 3)^2$

4) $f(x) = \sqrt{e^x - 2}$

5) $f(x) = e^{\frac{2x-1}{x-3}}$

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$

1) $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 2}$

لدينا $D_f = \mathbb{R}$

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا:

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x+2) - e^x(3e^x-1)}{(e^x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x\left[3(e^x+2) - (3e^x-1)\right]}{(e^x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(3e^x+6-3e^x+1)}{(e^x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7e^x}{(e^x+2)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$
$$v \neq 0$$

2) $f(x) = (x-2)e^{-x+3}$

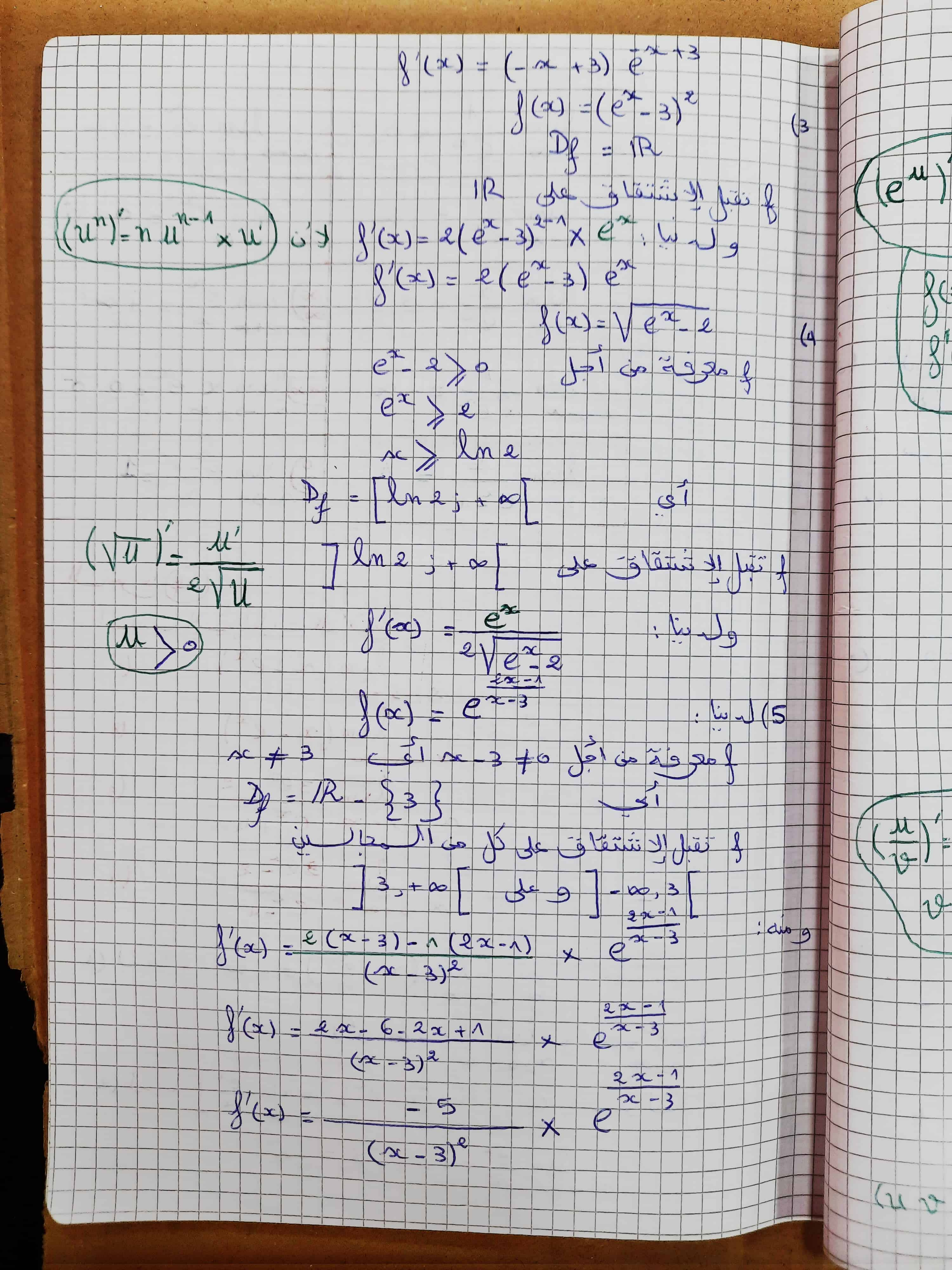
$D_f = \mathbb{R}$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$(uv)' = u'v + uv'$ حيث

$$f'(x) = 1 \times e^{-x+3} + (-1)e^{-x+3} \times (x-2)$$

$$f'(x) = \left[1 + (-1)(x-2)\right]e^{-x+3}$$



$f'(x) = (-x+3)\,e^{-x+3}$

3) $f(x) = (e^{x}-3)^{2}$

$D_f = \mathbb{R}$

f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا: $f'(x) = 2(e^{x}-3)^{2-1} \times e^{x}$ لأن $(u^{n})' = n\,u^{n-1} \times u'$

$f'(x) = 2(e^{x}-3)\,e^{x}$

4) $f(x) = \sqrt{e^{x}-2}$

f معرفة من أجل $e^{x}-2 \geqslant 0$

$e^{x} \geqslant 2$

$x \geqslant \ln 2$

أي $D_f = [\ln 2 ; +\infty[$

f تقبل الإشتقاق على $]\ln 2 ; +\infty[$

$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$u > 0$

ولدينا: $f'(x) = \dfrac{e^{x}}{2\sqrt{e^{x}-2}}$

5) لدينا: $f(x) = e^{\frac{2x-1}{x-3}}$

f معرفة من أجل $x-3 \neq 0$ أي $x \neq 3$

أي $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

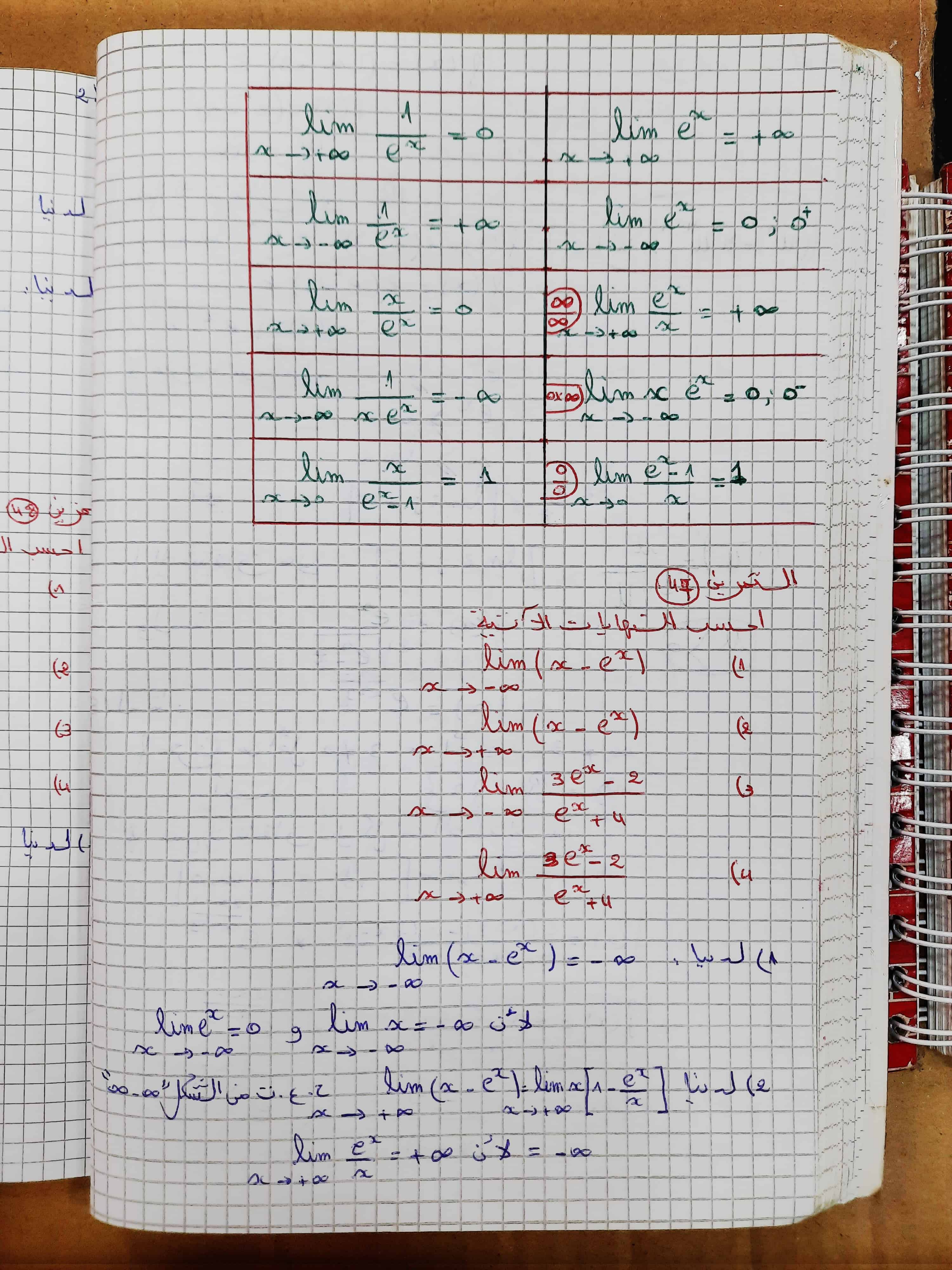
f تقبل الإشتقاق على كل من المجالين

$]-\infty, 3[$ وعلى $]3, +\infty[$

ومنه: $f'(x) = \dfrac{2(x-3) - 1(2x-1)}{(x-3)^{2}} \times e^{\frac{2x-1}{x-3}}$

$f'(x) = \dfrac{2x-6-2x+1}{(x-3)^{2}} \times e^{\frac{2x-1}{x-3}}$

$f'(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^{2}} \times e^{\frac{2x-1}{x-3}}$



$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \,;\, 0^+$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x e^x} = -\infty$	$(0 \times \infty) \lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0 \,;\, 0^-$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$	$\left(\frac{0}{0}\right) \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

التمرين (47)

احسب النهايات الآتية

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - e^x)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^x)$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3e^x - 2}{e^x + 4}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 2}{e^x + 4}$

1) لدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - e^x) = -\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

2) لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[1 - \frac{e^x}{x}\right]$ ح.ع.ت من الشكل "$\infty - \infty$"

$= -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (x - e^x) = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(\frac{x}{e^x} - 1 \right)$$ 2ط

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ و منه $= -\infty$

3) لدينا $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{3e^x - 2}{e^x + 4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

4) لدينا:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 2}{e^x + 4}$ ح ع ت "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 2}{e^x + 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \left(3 - \frac{2}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{4}{e^x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{4}{e^x}}$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ لأن $= 3$

التمرين 42

احسب النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x^2 + 3x}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3x}$

4) $\lim_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$

1) لدينا $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x^2 + 3x}$ ح ع ت "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x(2x + 3)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{2x + 3}$$

$$= 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

2) لدينا $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ ح ع ت من الشكل "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} (e^x - 1) \times \frac{1}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x}$$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ لأن $= 1 \times 1$

$= 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

3) لدينا

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{3}$$

$$= 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

ملاحظة :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3$$

$\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ لأن $= 1 \times 3$

$= 3$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim \frac{(e^x)^3 - 1^3}{x}$$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)\left[(e^x)^2 + e^x + 1\right]}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \left[(e^x)^2 + e^x + 1\right]$$

$$= 1 \times 3 = 3$$

4) لدينا : $\lim_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$ ح ع ت من الشكل "$\frac{0}{0}$"

ط1) نضع $x - 2 = t$ أي $x = 2 + t$

لما $x \to 2$ فإن $t \to 0$

إذن

$$\lim_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{2+t} - e^2}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{e^t \times e^2 - e^2}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(e^t - 1) e^2}{t}$$

$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ لأن

$$= 1 \times e^2$$

$$= e^2$$

ط2) باستعمال تعريف العدد المشتق.

نضع $f(x) = e^x$

أي $f'(x) = e^x$

$$\lim_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= f'(2)$$

$$= e^2$$

التمرين (49)

1) حسب النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x - x}$

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x - x}$

3) $\lim_{x \to -\infty} x^2 . e^x$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

1/ لدينا:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x - x} = \lim_{x \to -\infty} e^x \times \frac{1}{e^x - x}$$

$$= 0$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$

حل لدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}$ ح.ع.ت "$\infty - \infty$"

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ لأن $= 1$

3) $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x$ ح.ع.ت "$0 \times \infty$"

$$\lim_{x \to -\infty} x^n . e^x = 0$$

$n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

نضع $x = 2t$

$x = nt$ المجهول المساعد نضع

لما $x \to -\infty$ فإن $t \to -\infty$

إذن:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 . e^x = \lim_{t \to -\infty} (2t)^2 e^{2t}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} 4t^2 (e^t)^2$$

$$= \lim_{t \to -\infty} 4 (t . e^t)^2$$

$$= 0$$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ ح.ع.ت "$\frac{\infty}{\infty}$"

نضع $x = 2t$

لما $x \to +\infty$ فإن $t \to +\infty$

إذن

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{2t}}{(2t)^2}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{2t}}{4t^2}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{e^t}{t}\right)^2$$

$$= +\infty$$

التمرين 50

I) g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x + x + 1$

1) دراسة تغيرات g:

أ) $D_g =]-\infty, +\infty[$

ب) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^x + x + 1) = -\infty$

لأن $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x + x + 1) = +\infty$

لأن $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

ج) g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (مجموع دالتين)

أي: $g'(x) = e^x + 1$

نلاحظ أن $g'(x) > 0$ (لأن $e^x > 0$ و $1 > 0$)

أي g متزايدة تماما

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

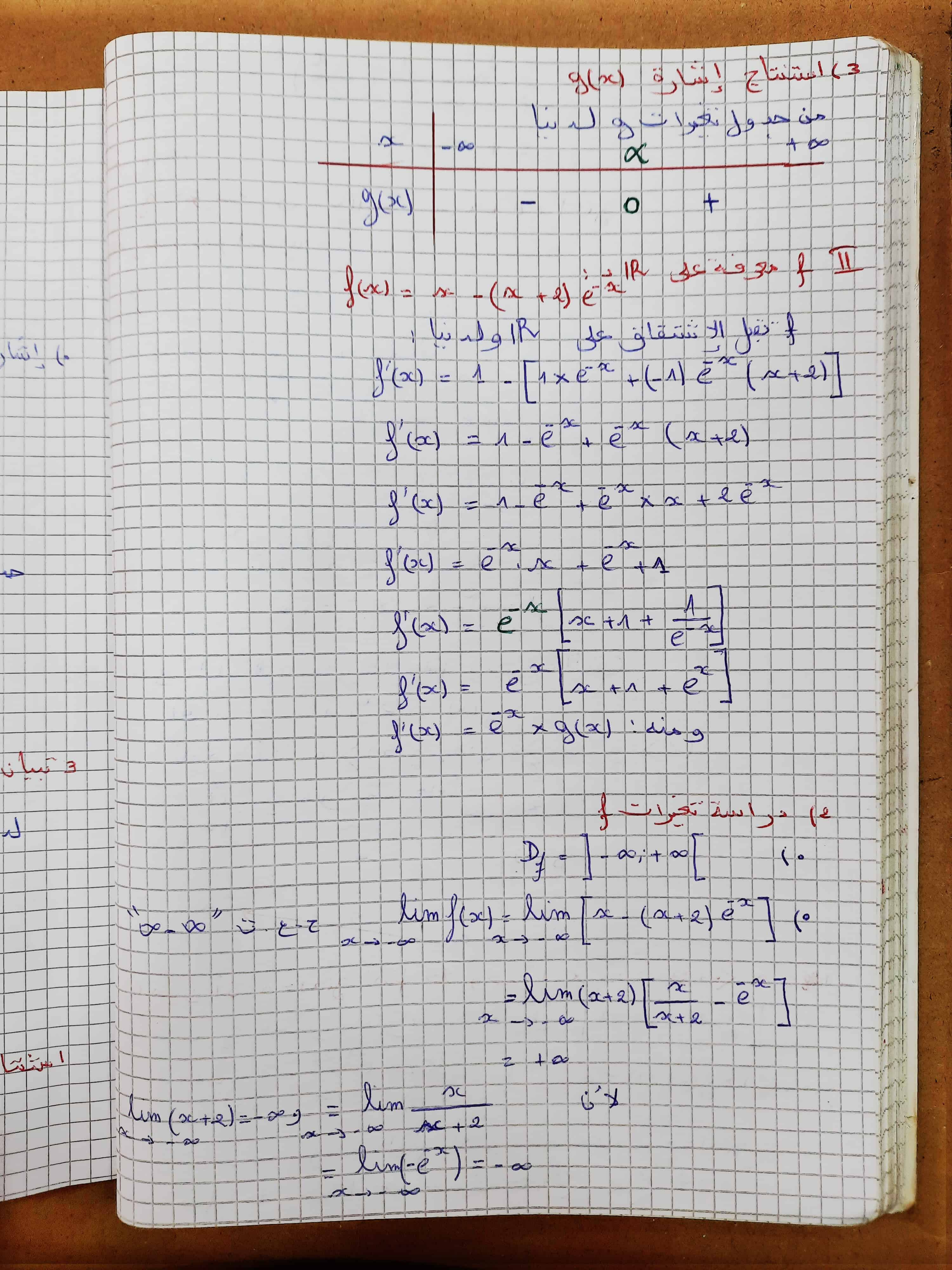
2) تبيان أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,28 < \alpha < -1,27$

بما أن g مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1,28 ; -1,27]$

أي $\begin{cases} g(-1,28) = e^{-1,28} - 1,28 + 1 = -1,36 \\ g(-1,27) = e^{-1,27} - 1,27 + 1 = 0,01 \end{cases}$ $g(-1,28) \times g(-1,27) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$



3) استنتاج إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات g لدينا

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f معرفة على $\mathbb{R}$

$$f(x) = x - (x+2)e^{-x}$$

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \left[1 \times e^{-x} + (-1)e^{-x}(x+2)\right]$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x} + e^{-x}(x+2)$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x} + e^{-x} \times x + 2e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} \cdot x + e^{-x} + 1$$

$$f'(x) = e^{-x}\left[x + 1 + \frac{1}{e^{-x}}\right]$$

$$f'(x) = e^{-x}\left[x + 1 + e^{x}\right]$$

ومنه: $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

2) دراسة تغيرات f

أ. $D_f =]-\infty ; +\infty[$

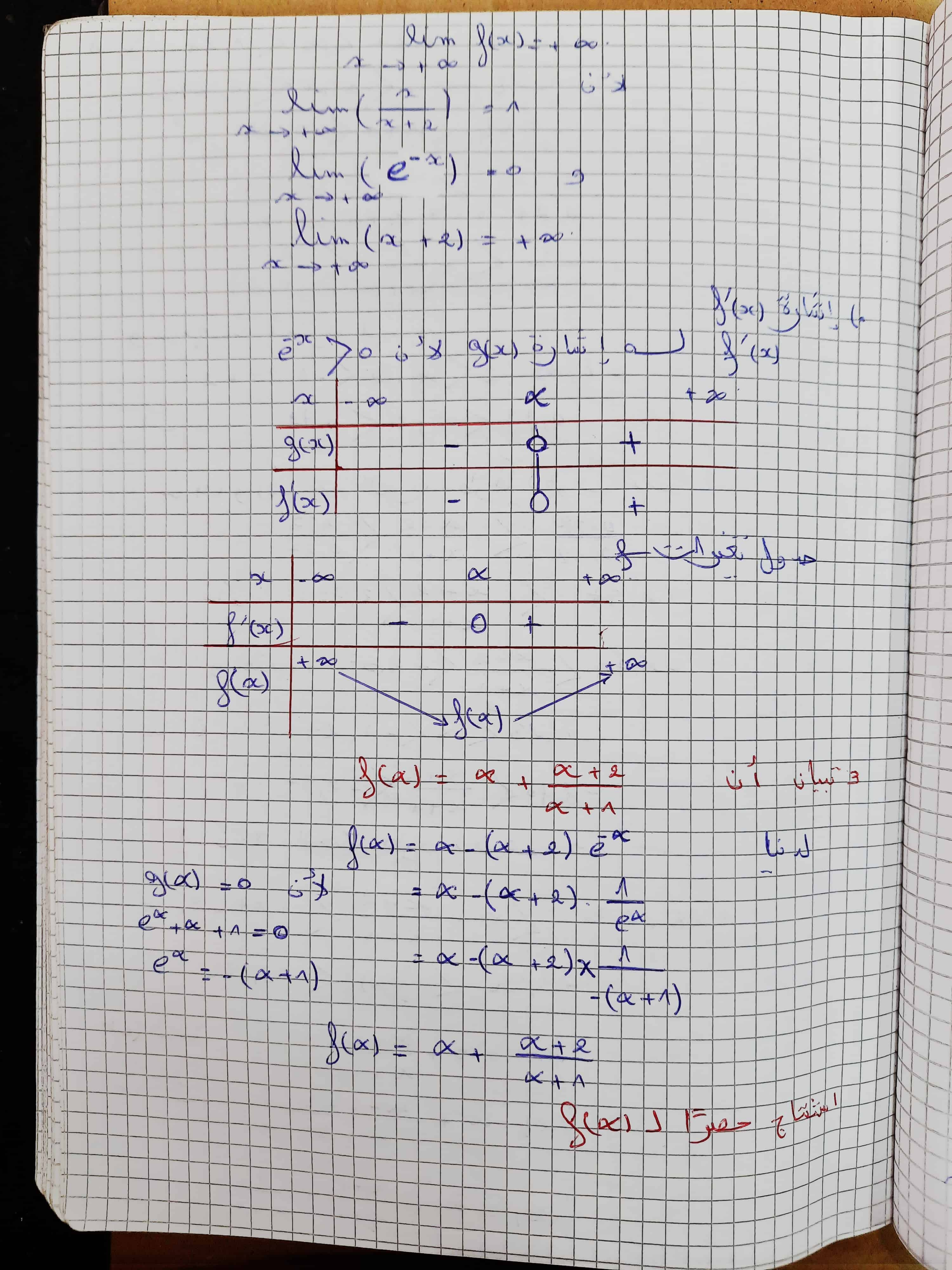
ب. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x - (x+2)e^{-x}\right]$ ح.غ.ت "$\infty - \infty$"

$$= \lim_{x \to -\infty} (x+2)\left[\frac{x}{x+2} - e^{-x}\right]$$

$$= +\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty$ و $= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x+2}$

$$= \lim_{x \to -\infty} (-e^{-x}) = -\infty$$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

لأن

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right) = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$$

٢) إشارة $f'(x)$

$f'(x)$ لـه إشارة $g(x)$ لأن $e^{-x} > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

٣) تبيان أن $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}$

لدينا

$$f(\alpha) = \alpha - (\alpha+2)e^{-\alpha}$$

$$= \alpha - (\alpha+2)\cdot\frac{1}{e^{\alpha}}$$

$$= \alpha - (\alpha+2)\times\frac{1}{-(\alpha+1)}$$

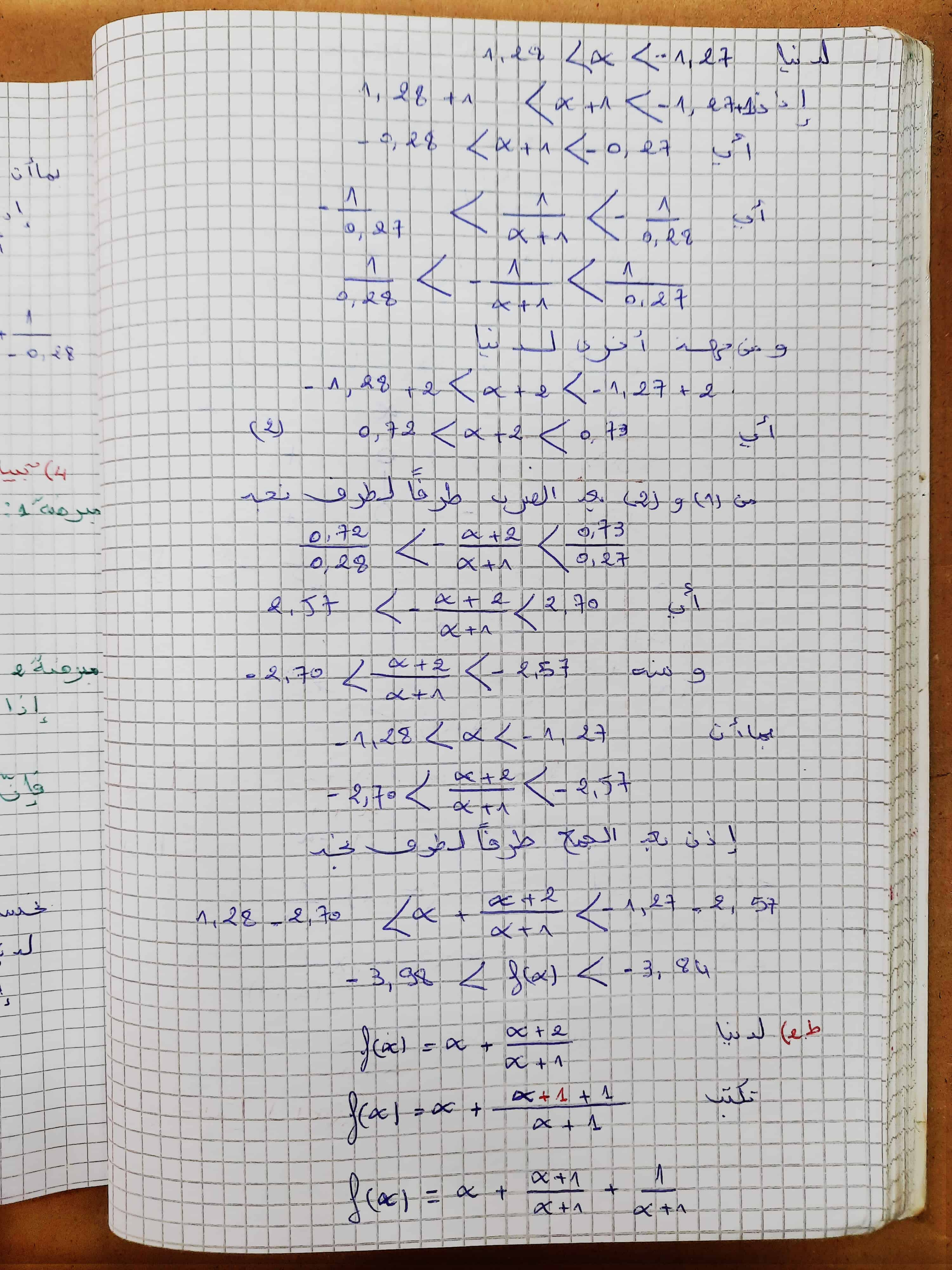
$g(\alpha) = 0$ لأن

$e^{\alpha} + \alpha + 1 = 0$

$e^{\alpha} = -(\alpha+1)$

$$f(\alpha) = \alpha + \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$



لدينا $-1,28 < \alpha < -1,27$

إذن $-1,28+1 < \alpha+1 < -1,27+1$

أي $-0,28 < \alpha+1 < -0,27$

أي $-\frac{1}{0,27} < \frac{1}{\alpha+1} < -\frac{1}{0,28}$

$\frac{1}{0,28} < -\frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{0,27}$

ومن جهة أخرى لدينا

$-1,28+2 < \alpha+2 < -1,27+2$

أي $0,72 < \alpha+2 < 0,73$ (2)

من (1) و (2) وبعد الضرب طرفاً لطرف نجد

$\frac{0,72}{0,28} < -\frac{\alpha+2}{\alpha+1} < \frac{0,73}{0,27}$

أي $2,57 < -\frac{\alpha+2}{\alpha+1} < 2,70$

ومنه $-2,70 < \frac{\alpha+2}{\alpha+1} < -2,57$

بما أن $-1,28 < \alpha < -1,27$

$-2,70 < \frac{\alpha+2}{\alpha+1} < -2,57$

إذن بعد الجمع طرفاً لطرف نجد

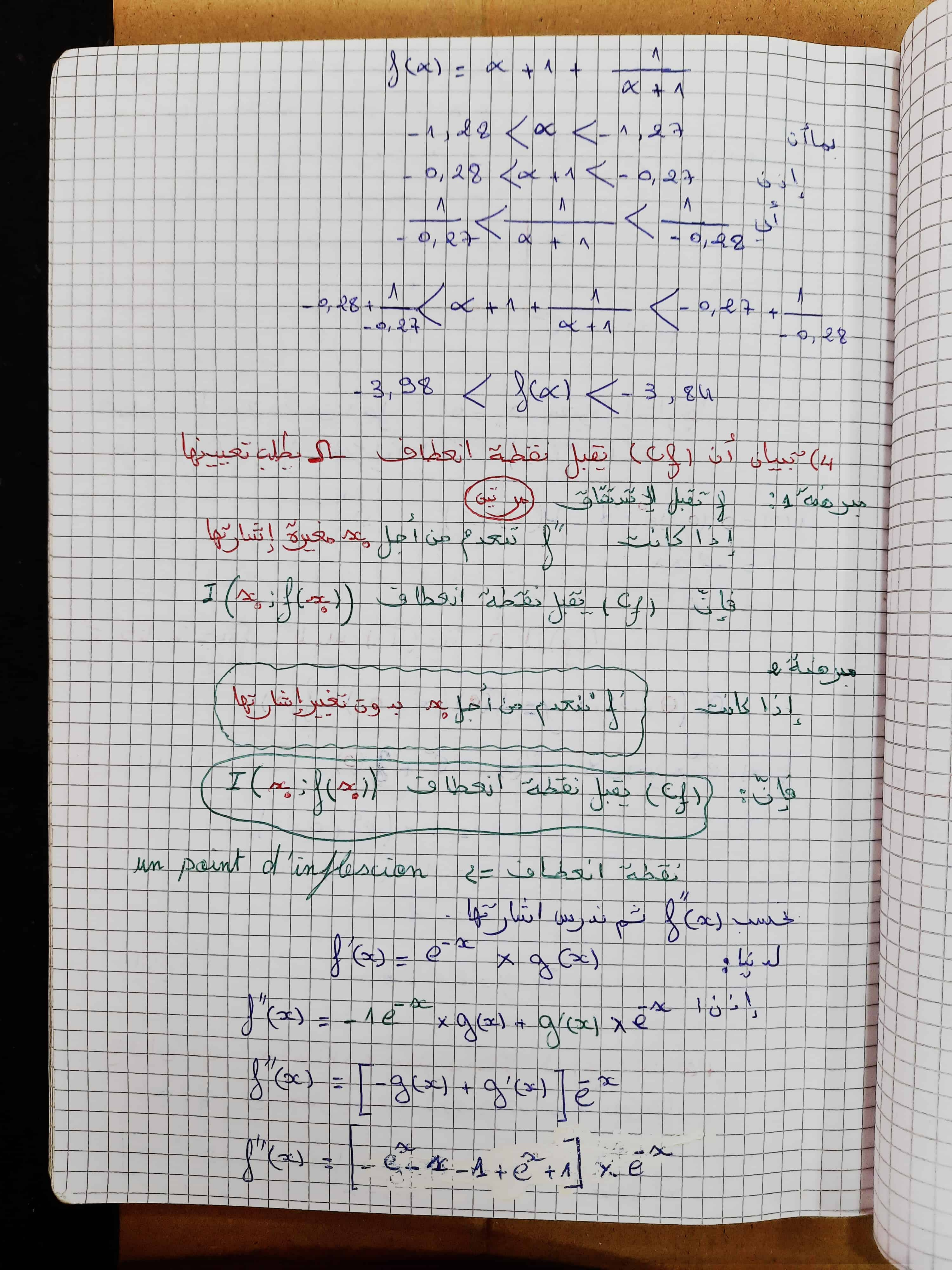
$-1,28-2,70 < \alpha + \frac{\alpha+2}{\alpha+1} < -1,27-2,57$

$-3,98 < f(\alpha) < -3,84$

ج) لدينا $f(x) = x + \frac{x+2}{x+1}$

نكتب $f(x) = x + \frac{x+1+1}{x+1}$

$f(x) = x + \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$



$$f(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$$

بما أن $-1,28 < \alpha < -1,27$

إذن $-0,28 < \alpha + 1 < -0,27$

أي $\frac{1}{-0,27} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{-0,28}$

$$-0,28 + \frac{1}{-0,27} < \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1} < -0,27 + \frac{1}{-0,28}$$

$$-3,98 < f(\alpha) < -3,84$$

4) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف Ω يطلب تعيينها

مبرهنة 1: f تقبل الإشتقاق مرتين

إذا كانت f'' تنعدم من أجل x_0 مغيرة إشارتها

فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف $I(x_0 ; f(x_0))$

مبرهنة 2

إذا كانت f' تنعدم من أجل x_0 بدون تغيير إشارتها

فإن: (C_f) يقبل نقطة انعطاف $I(x_0 ; f(x_0))$

نقطة انعطاف <= un point d'inflescion

نحسب $f''(x)$ ثم ندرس اشارتها.

لدينا: $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

إذن: $f''(x) = -1e^{-x} \times g(x) + g'(x) \times e^{-x}$

$$f''(x) = \left[-g(x) + g'(x)\right] e^{-x}$$

$$f''(x) = \left[-e^{x} - x - 1 + e^{x} + 1\right] \times e^{-x}$$

أي: $f''(x) = -x \times e^{-x}$

$f''(x) = 0$ معناه $-x \times e^{-x} = 0$

$-x = 0$ لأن $e^{-x} > 0$ أي $e^{-x} \neq 0$

$x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$f''(x) = -xe^{-x}$		$+$	0	$-$	

بما أن f'' تنعدم من أجل $x = 0$ مغيرة إشارتها

فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف $\Omega(0\ f(0))$

أي $\Omega(0; -2)$ لأن $f(0) = 0-(0+2)e^{0}$

$= -2 \times 1$

$= -2.$

5) كتابة معادلة للمماس (T_1) عند Ω لـ (C_f)

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ لأن $\Omega(0, -2)$

بما أن $f'(0) = e^{0} \times g(0)$ لأن $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

$= 1 \times (e^{0} + 0 + 1)$

$= 1 \times (1+1)$

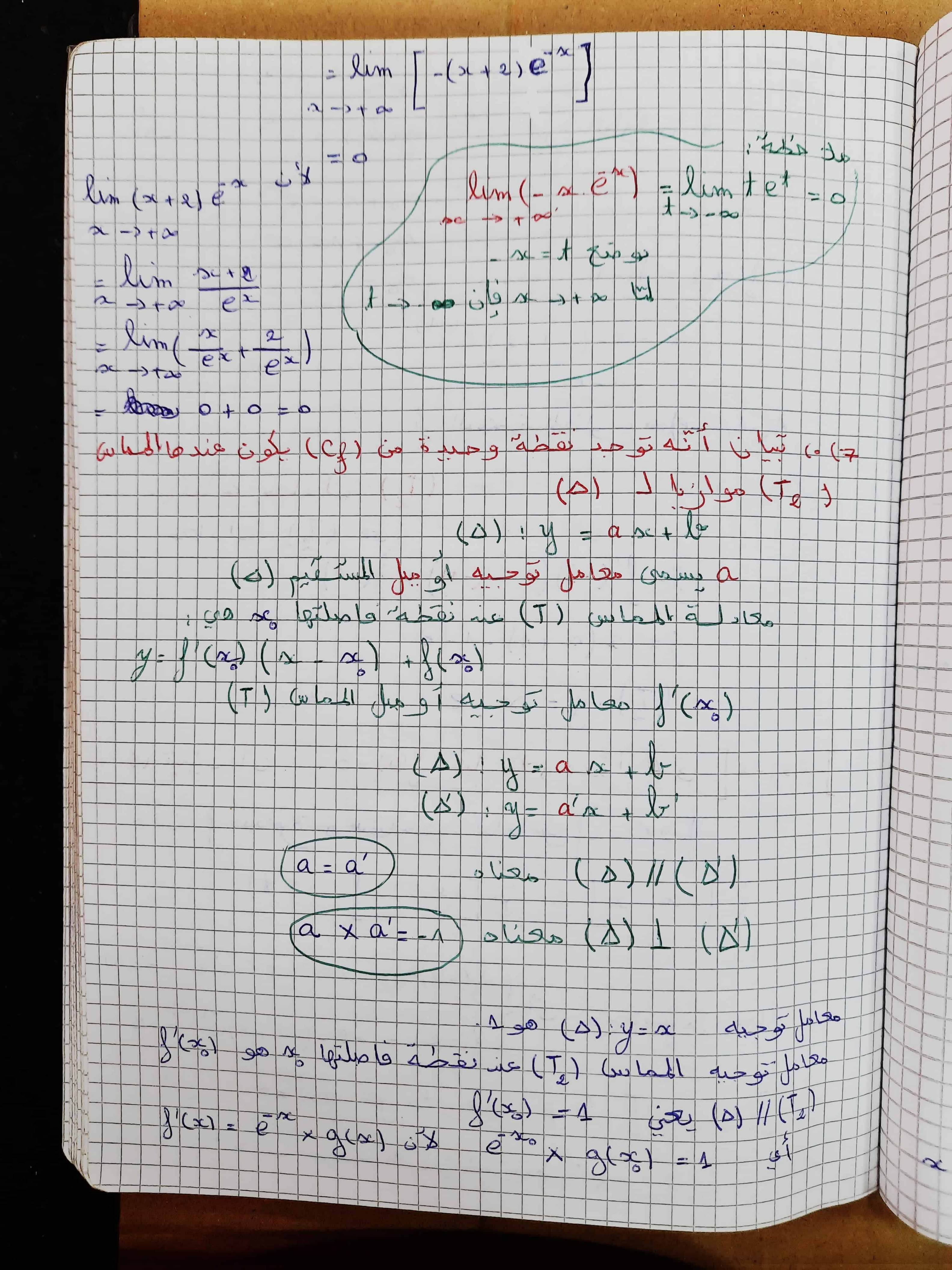
$= 2$

إذن $T_1 : y = 2x - 2$

6) تبيان أن $(\Delta): y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

$y = x$ (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ يعني $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [x - (x+2)e^{-x} - x]$



$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-(x+2)e^{-x} \right]$$

$$= 0$$

لأن

$$\lim_{x \to +\infty} (x+2)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{e^{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^{x}} + \frac{2}{e^{x}} \right)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

ملاحظة:

$$\lim_{x \to +\infty} (-x\,e^{-x}) = \lim_{t \to -\infty} t\,e^{t} = 0$$

نضع $-x = t$

لما $x \to +\infty$ فإن $t \to -\infty$

7) تبيان أنه توجد نقطة وحيدة من (C_f) يكون عندها المماس (T_2) موازيا لـ (Δ)

$(\Delta) : y = ax + b$

a يسمى معامل توجيه أو ميل المستقيم (Δ)

معادلة المماس (T) عند نقطة فاصلتها x_0 هي:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f'(x_0)$ معامل توجيه أو ميل المماس (T)

$(\Delta) : y = ax + b$

$(\Delta') : y = a'x + b'$

$(\Delta) \parallel (\Delta')$ معناه $a = a'$

$(\Delta) \perp (\Delta')$ معناه $a \times a' = -1$

معامل توجيه $(\Delta) : y = x$ هو 1.

معامل توجيه المماس (T_2) عند نقطة فاصلتها x_0 هو $f'(x_0)$

$(\Delta) \parallel (T_2)$ يعني $f'(x_0) = 1$

أي $e^{-x_0} \times g(x_0) = 1$

لأن $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

$$\frac{1}{e^{x_0}} \times g(x_0) = 1$$

أي $g(x_0) = e^{x_0}$ بعد ضرب الطرفين في e^{x_0}

$$e^{x_0} + x_0 + 1 = e^{x_0}$$

$$x_0 + 1 = 0$$

$x_0 = -1$ ومنه $f(x_0) = f(-1)$

$$= -1 - (-1+2)e^{-(-1)}$$

$$= -1 - e$$

أي النقطة المطلوبة هي $A(-1; -1-e)$

(...) كتابة معادلة (T_2)

معادلة (T_2) هي:

$$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$$

$$y = 1(x+1) - 1 - e$$

ومنه $(T_2) : y = x - e$

4) تبيان أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في $]-2{,}5; -2[$

بما أن f مستمرة ومتناقصة تماما على $[-2{,}5; -2]$

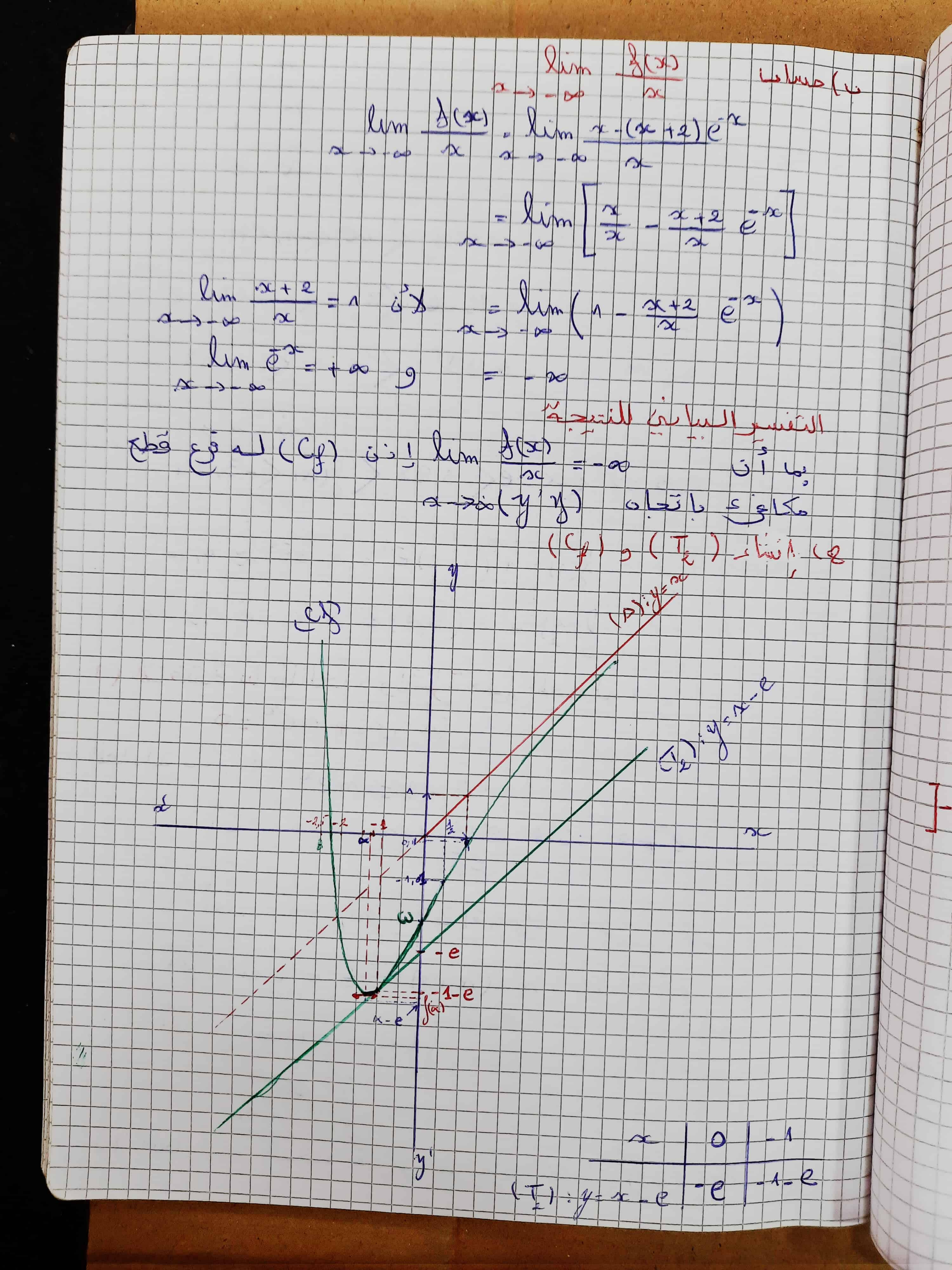
(لأن $[-2{,}5; 2]$ جزء من $]-\infty, \alpha]$)

$$\begin{cases} f(-2{,}5) = -2{,}5 - (-2{,}5+2)e^{-(-2{,}5)} = 3{,}59... \\ f(-2) = -2 - (-2+2)e^{-(-2)} = -2 \end{cases}$$

أي $f(-2{,}5) \times f(-2) < 0$

إذن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في $]-2{,}5; -2[$

(حسب مبرهنة القيم المتوسطة)



ب) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-(x+2)e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x}{x} - \frac{x+2}{x} e^{-x}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{x+2}{x} e^{-x}\right)$$

$$= -\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

التفسير البياني للنتيجة

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ إذن (C_f) له فرع قطع مكافئ باتجاه $(y'y)$ بجوار $-\infty$

ج) إنشاء (T_2) و (C_f)

x	0	-1
$(T_2): y = x - e$	$-e$	$-1-e$

x	0	1
$y=x$	0	1

$$y = x - e$$

$$-1,28 < \alpha < -1,27$$

$$-1,28 - e < \alpha - e < -1,27 - e$$

$$-3,99 < \alpha - e < -3,98$$

ومنه:

$$-3,99 < \alpha - e < -3,98 < f(\alpha) < -3,84$$

$$f(1) = 1-(1+2)e^{-1} = 1-3e^{-1} \approx 0,10$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1-(1+2)e^{-1} = 1-3e^{-1} \approx -0,1$$

9) المناقشة بيانيا لعدد وإشارة حلول المعادلة

$$(x+2) + me^{x} = 0$$

المعادلة تكتب:

$$x + 2 = -me^{x}$$

أي:

$$\frac{x+2}{e^{x}} = -m \quad \text{لأن:} \quad e^{x} \neq 0$$

أي:

$$-(x+2)e^{-x} = m$$

أي:

$$x - (x+2)e^{-x} = x + m$$

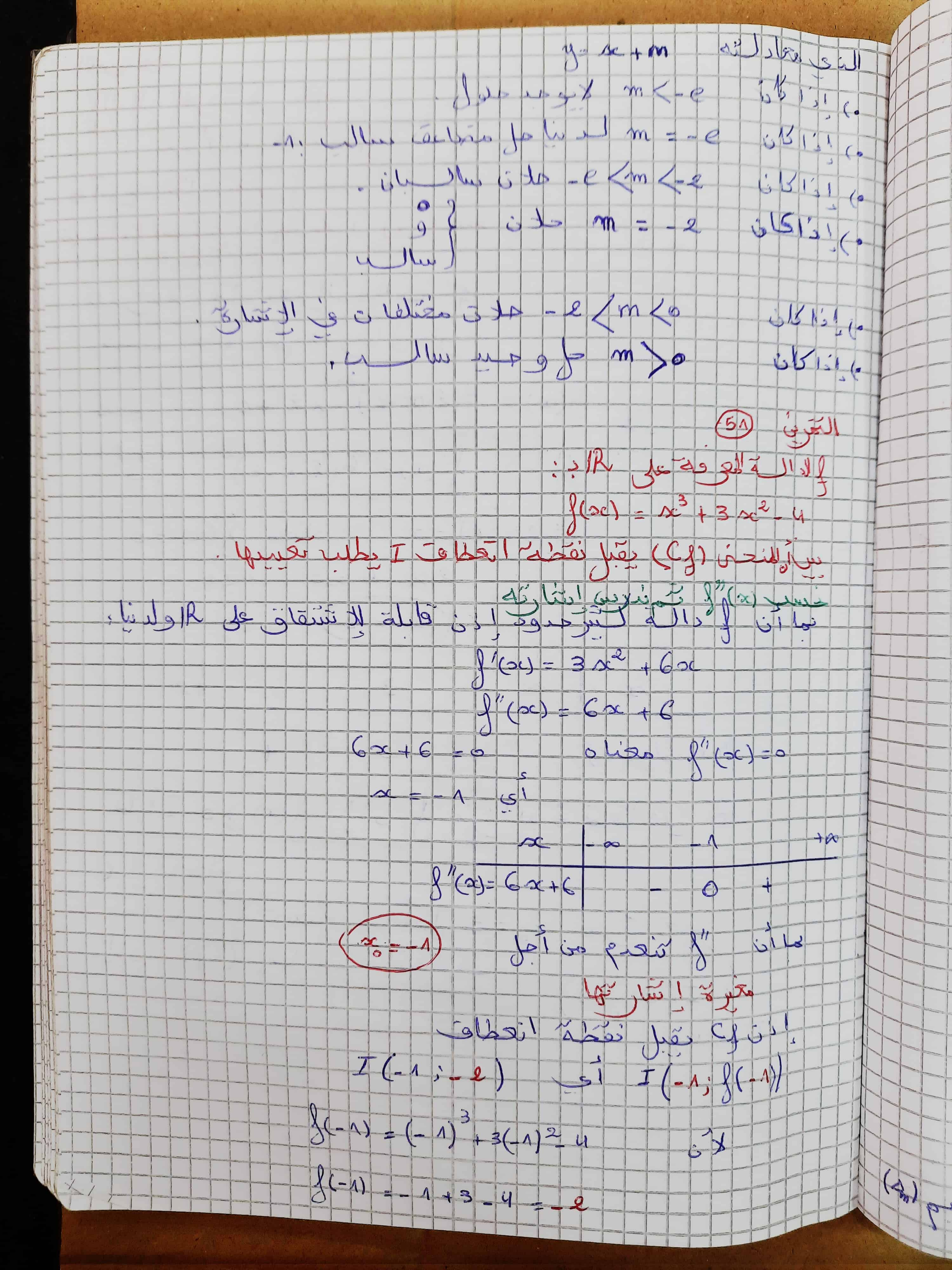
أي:

$$f(x) = x + m$$

$$y = f(x)$$

$$y = x + m$$

حلول المعادلة المعطاة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم



الذي معادلته $y = x + m$

- إذا كان $m < -e$ لا يوجد حلول.
- إذا كان $m = -e$ للمعادلة حل مضاعف سالب.
- إذا كان $-e < m < -2$ حلان سالبان.
- إذا كان $m = -2$ حلان { 0 و سالب
- إذا كان $-2 < m < 0$ حلان مختلفان في الإشارة.
- إذا كان $m > 0$ حل وحيد سالب.

التمرين (51)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيينها.

نحسب $f''(x)$ ثم ندرس إشارتها

بما أن f دالة كثير حدود إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

$f''(x) = 0$ معناه $6x + 6 = 0$

أي $x = -1$

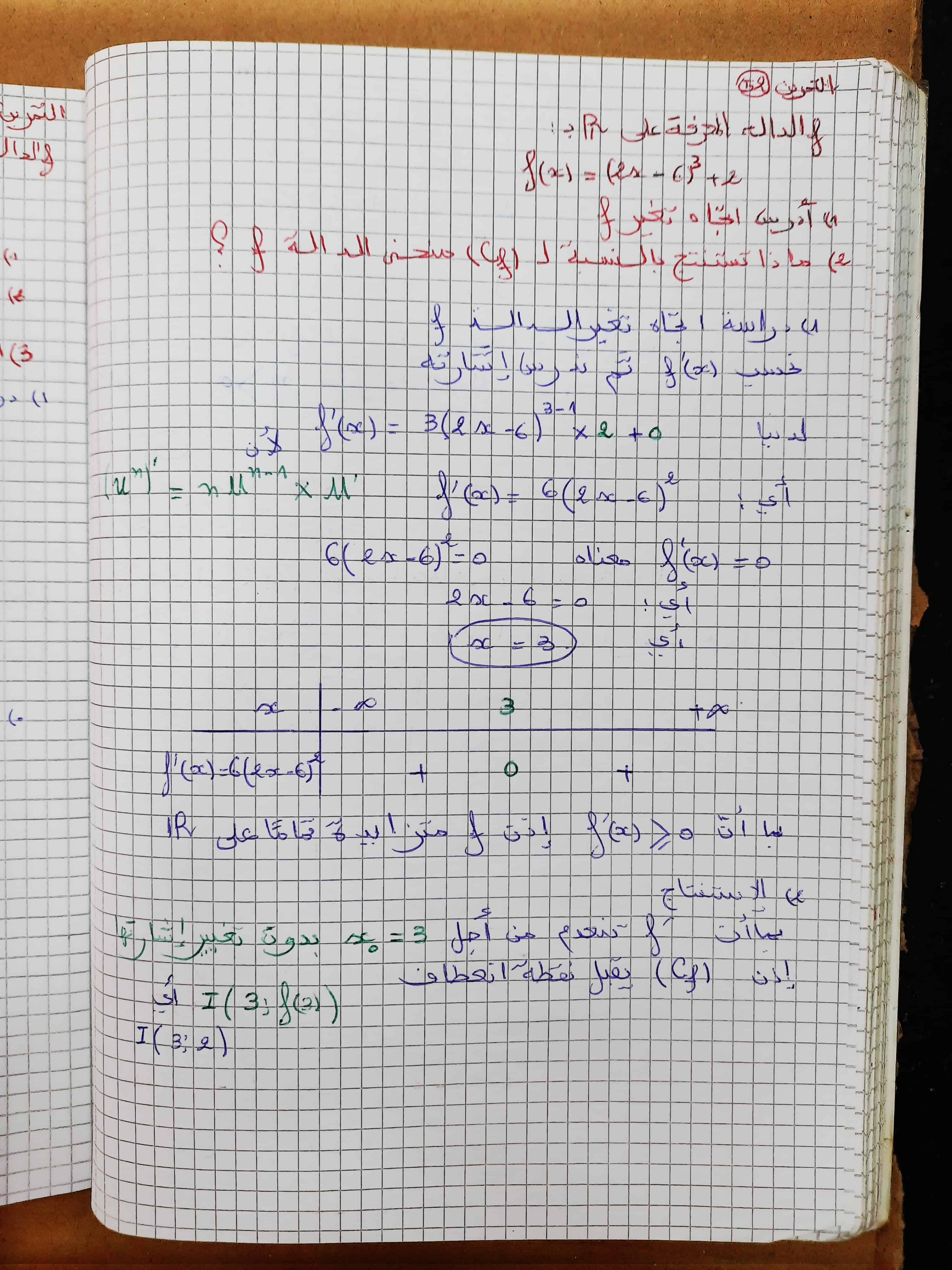
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x) = 6x+6$		$-$	0	$+$	

بما أن f'' تنعدم من أجل $x_0 = -1$ مغيرة إشارتها

إذن C_f يقبل نقطة انعطاف $I(-1; f(-1))$ أي $I(-1; -2)$

لأن $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4$

$f(-1) = -1 + 3 - 4 = -2$



التمرين (52)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = (2x-6)^3 + 2$$

1) أدرس اتجاه تغير f

2) ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) منحنى الدالة f ؟

1) دراسة اتجاه تغير الدالة f

نحسب $f'(x)$ ثم ندرس إشارته

لدينا $f'(x) = 3(2x-6)^{3-1} \times 2 + 0$

لأن $(u^n)' = n u^{n-1} \times u'$

أي: $f'(x) = 6(2x-6)^2$

$f'(x) = 0$ معناه $6(2x-6)^2 = 0$

أي: $2x - 6 = 0$

أي: $x = 3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x) = 6(2x-6)^2$		+	0	+	

بما أن $f'(x) \geq 0$ إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

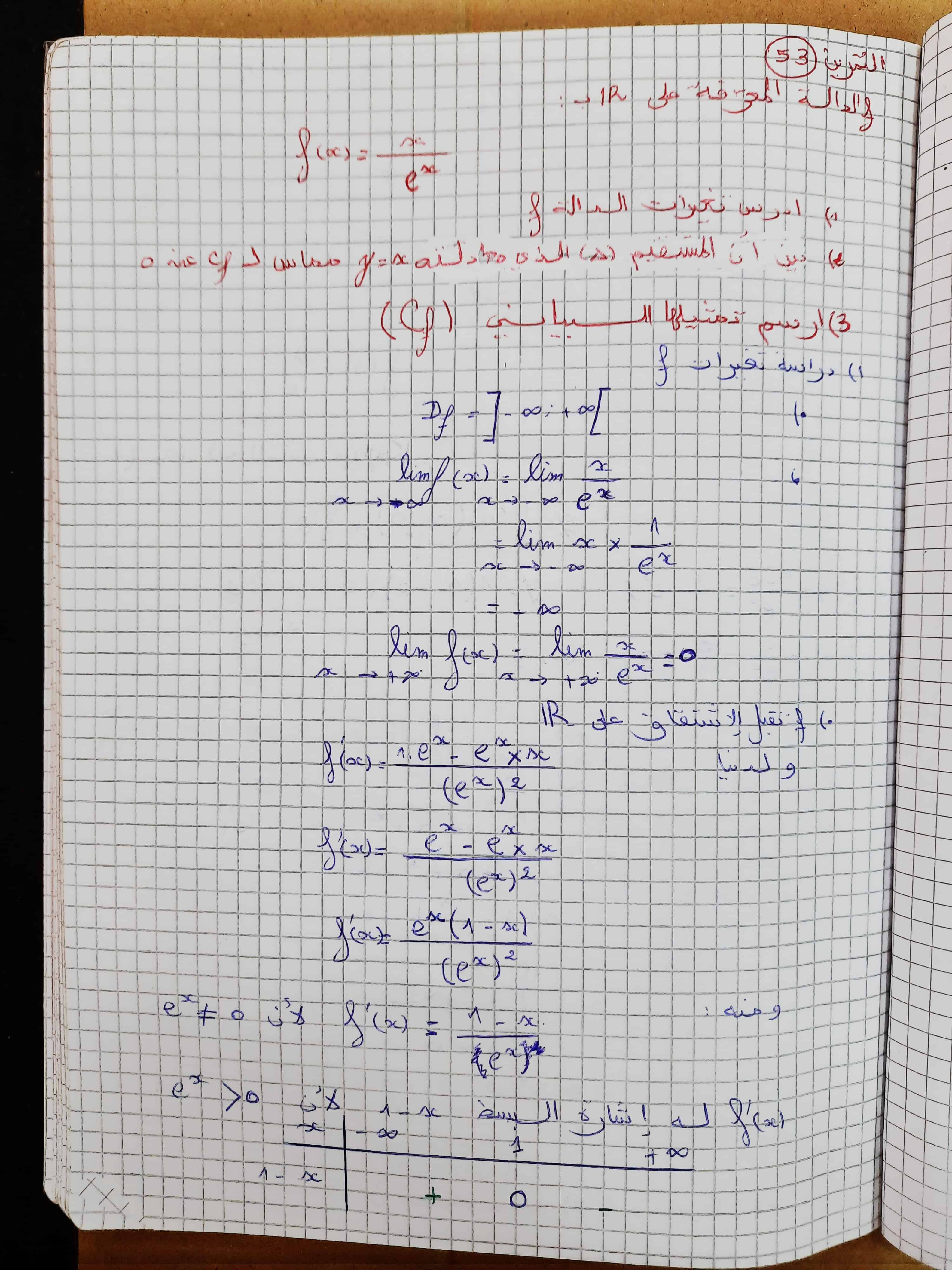
2) الاستنتاج

بما أن f' تنعدم من أجل $x_0 = 3$ بدون تغيير إشارتها

إذن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

أي $I(3; f(3))$

$I(3; 2)$



التمرين (53)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مماس لـ C_f عند 0

3) ارسم تمثيلها البياني (C_f)

1) دراسة تغيرات f

أ. $D_f =]-\infty;+\infty[$

ب. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x \times \frac{1}{e^x}$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

ج. f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f'(x) = \frac{1.e^x - e^x \times x}{(e^x)^2}$$

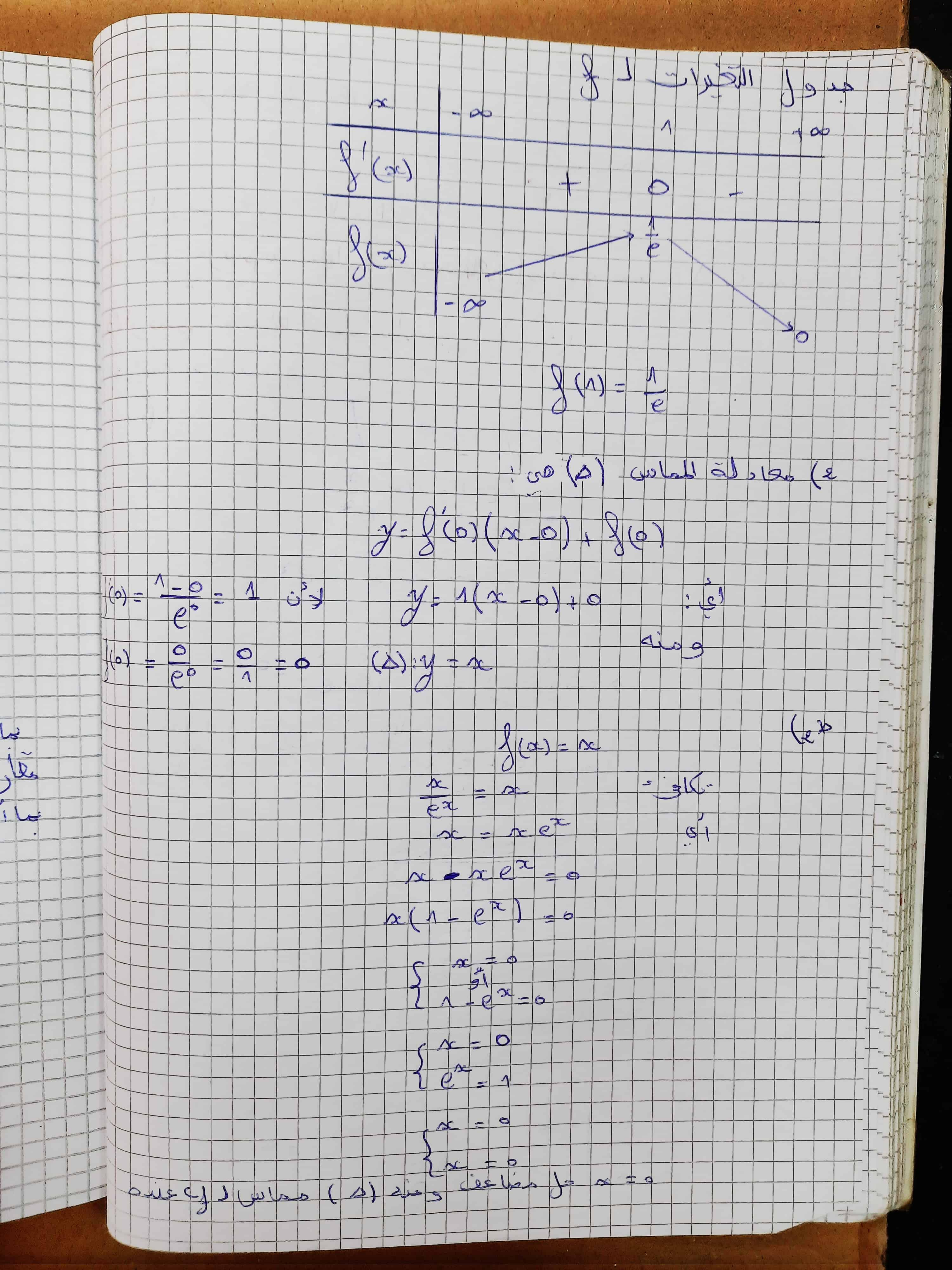
$$f'(x) = \frac{e^x - e^x \times x}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}$$

ومنه: $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ لأن $e^x \neq 0$

$f'(x)$ لها إشارة البسط $1-x$ لأن $e^x > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		+	0	−	



جدول التغيرات لـ f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$$f(1) = \frac{1}{e}$$

2) معادلة المماس (Δ) هي:

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

لدينا $f'(0) = \frac{1-0}{e^0} = 1$

$f(0) = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$

أي: $y = 1(x-0)+0$

ومنه $(\Delta): y = x$

3)

$$f(x) = x$$

تكافئ: $\frac{x}{e^x} = x$

أي: $x = x e^x$

$$x - x e^x = 0$$

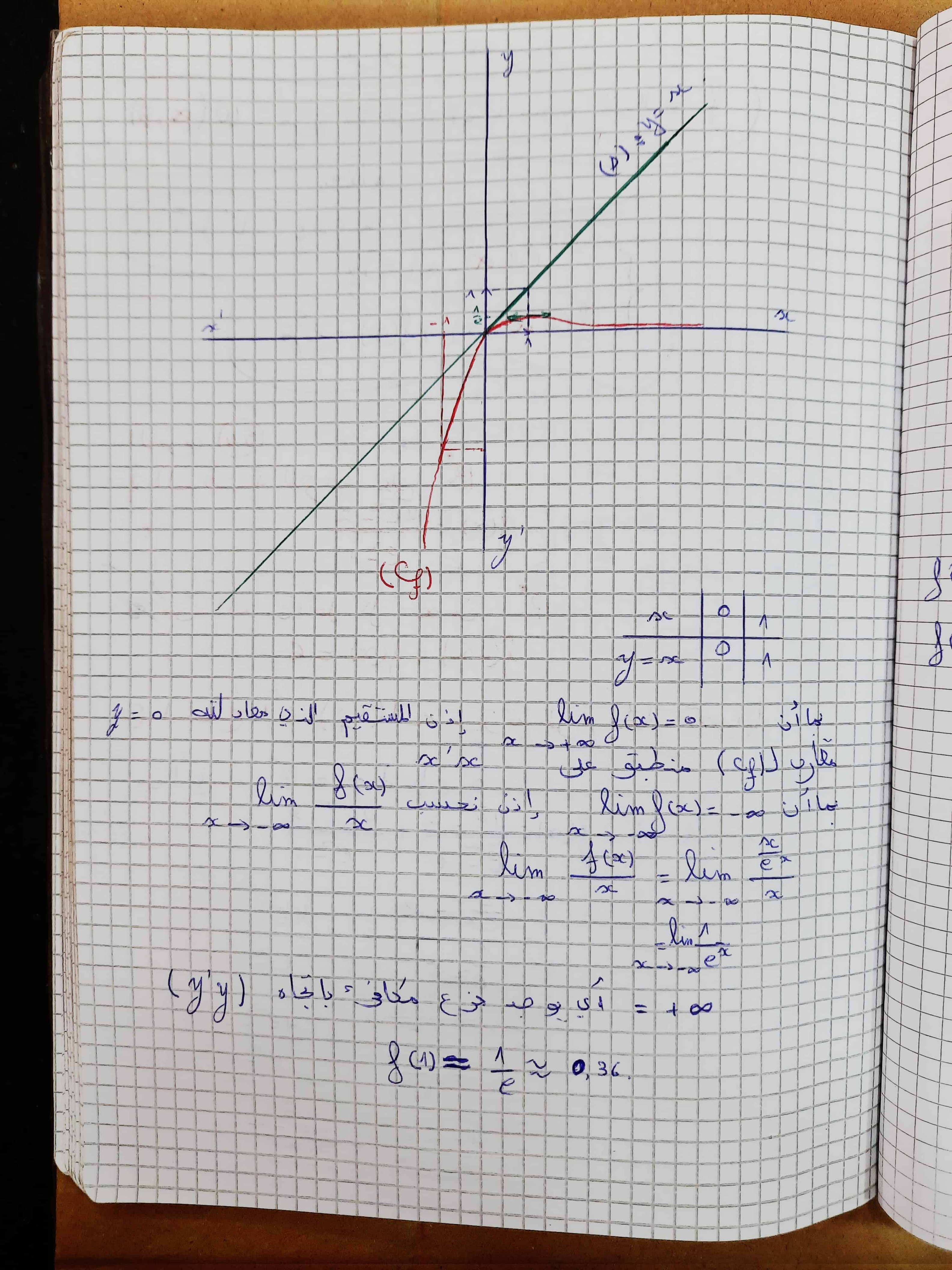
$$x(1 - e^x) = 0$$

$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ 1 - e^x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ e^x = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ حل مضاعف ومنه (Δ) مماس لـ (C_f) عنده



x	0	1
$y=x$	0	1

بما أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ إذن المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب لـ (Cf) منطبق على $x'x$

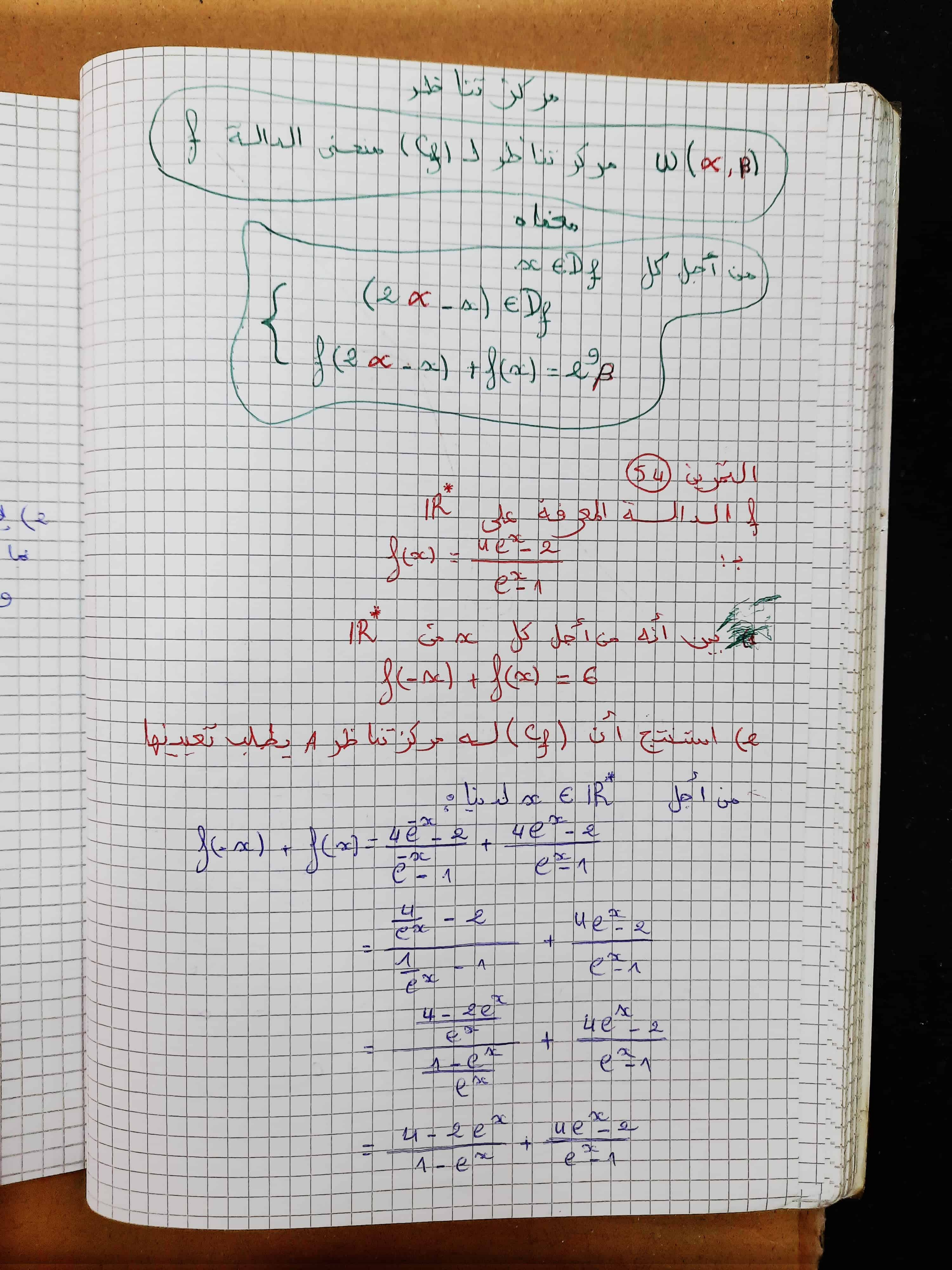
بما أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ إذن نحسب $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x}$$

$= +\infty$ أي يوجد فرع مكافئ باتجاه $(y'y)$

$$f(1) = \frac{1}{e} \simeq 0,36.$$



مركز تناظر

$\omega(\alpha, \beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) منحنى الدالة f

معناه

من أجل كل $x \in D_f$

$$\begin{cases} (2\alpha - x) \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

التمرين (54)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$f(x) = \frac{4e^x - 2}{e^x - 1}$$

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$$f(-x) + f(x) = 6$$

2) استنتج أن (C_f) له مركز تناظر A يطلب تعيينها

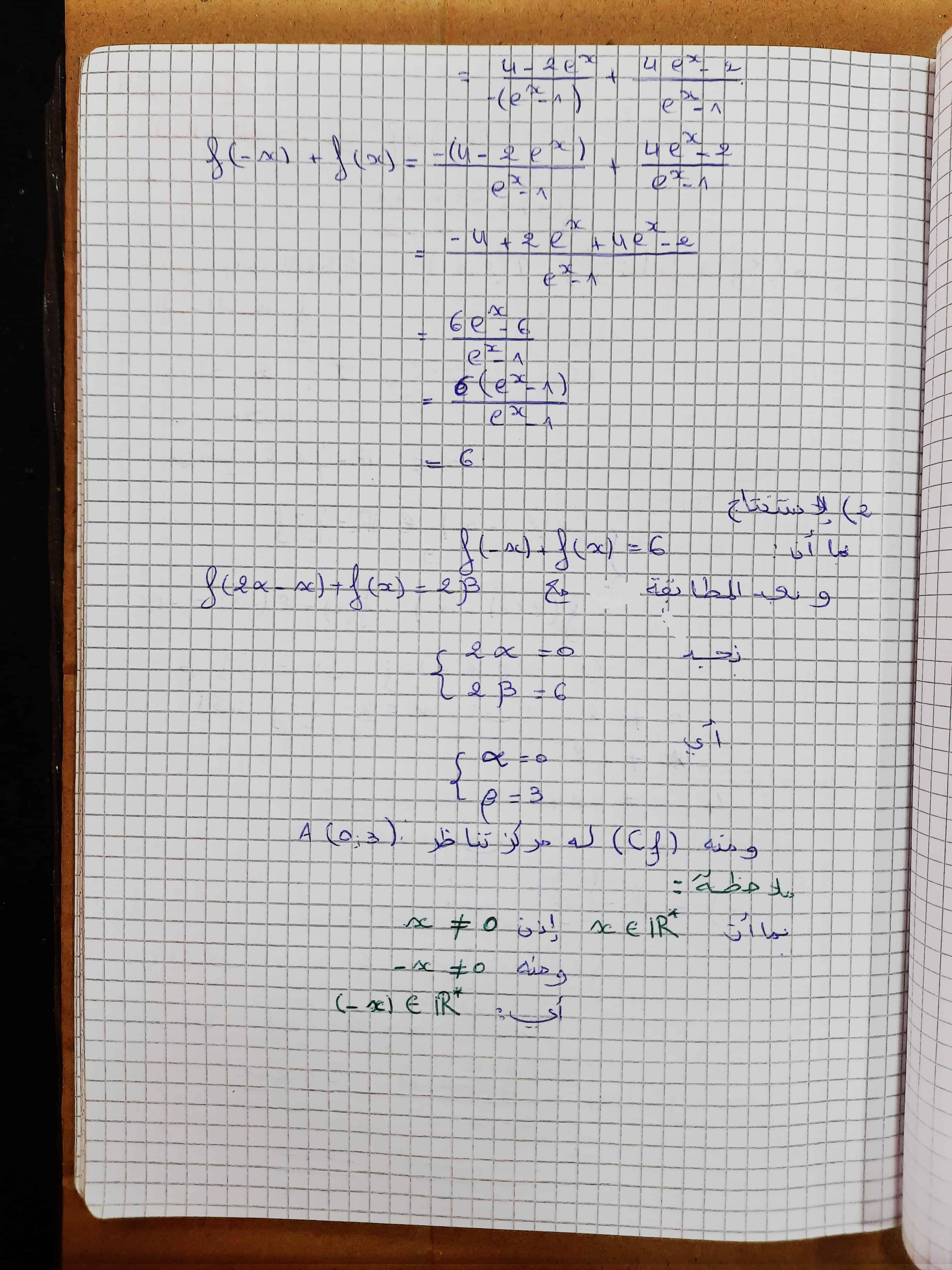
من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا:

$$f(-x) + f(x) = \frac{4e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1} + \frac{4e^x - 2}{e^x - 1}$$

$$= \frac{\frac{4}{e^x} - 2}{\frac{1}{e^x} - 1} + \frac{4e^x - 2}{e^x - 1}$$

$$= \frac{\frac{4 - 2e^x}{e^x}}{\frac{1 - e^x}{e^x}} + \frac{4e^x - 2}{e^x - 1}$$

$$= \frac{4 - 2e^x}{1 - e^x} + \frac{4e^x - 2}{e^x - 1}$$



$$= \frac{4-2e^x}{-(e^x-1)} + \frac{4e^x-2}{e^x-1}$$

$$f(-x)+f(x) = \frac{-(4-2e^x)}{e^x-1} + \frac{4e^x-2}{e^x-1}$$

$$= \frac{-4+2e^x+4e^x-2}{e^x-1}$$

$$= \frac{6e^x-6}{e^x-1}$$

$$= \frac{6(e^x-1)}{e^x-1}$$

$$= 6$$

2) الإستنتاج

بما أن: $f(-x)+f(x)=6$

وبعد المطابقة مع $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

نجد $\begin{cases}2\alpha=0\\2\beta=6\end{cases}$

أي $\begin{cases}\alpha=0\\\beta=3\end{cases}$

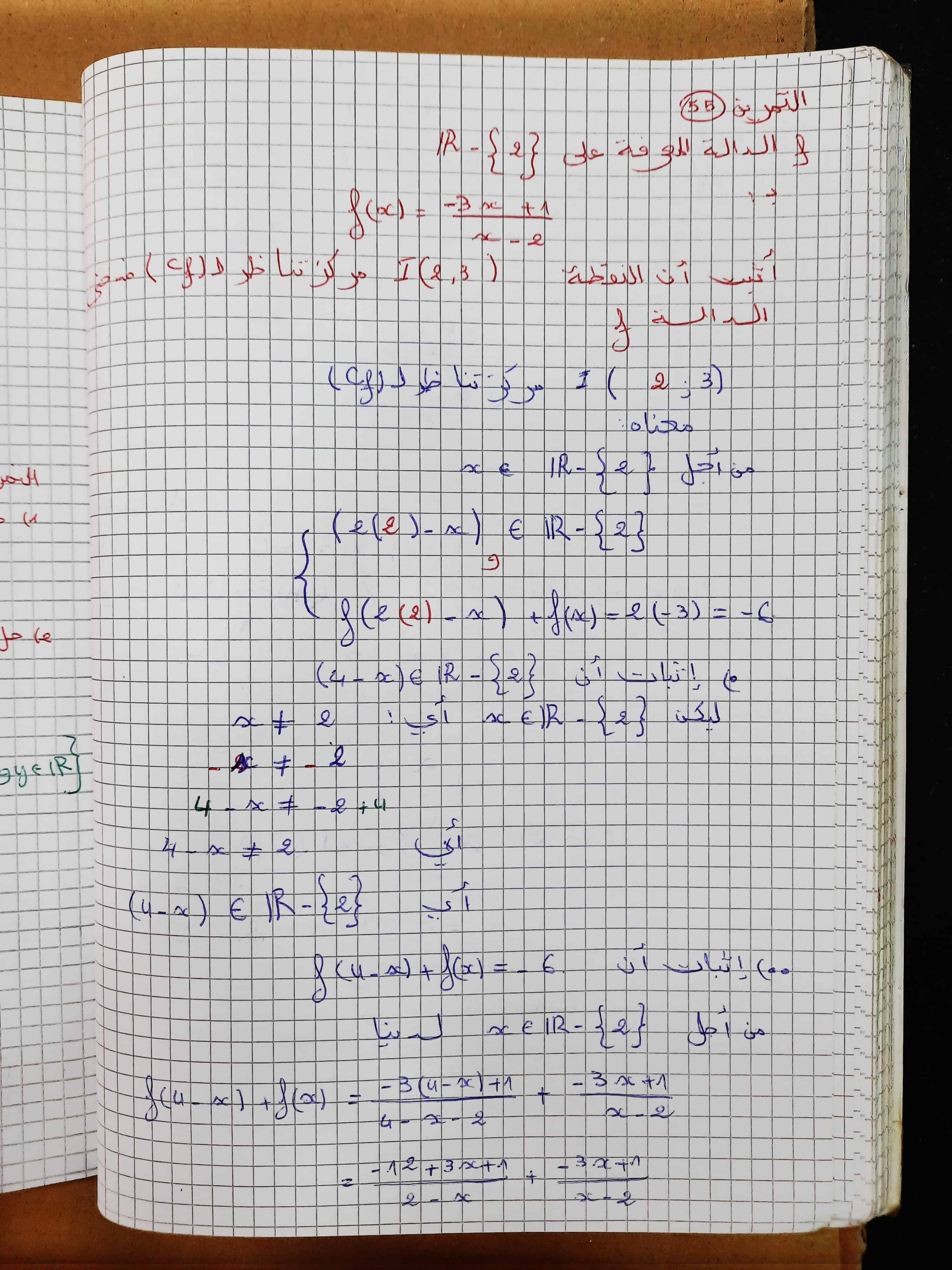
ومنه (C_f) له مركز تناظر $A(0;3)$

ملاحظة:

بما أن $x\in\mathbb{R}^*$ إذن $x\neq 0$

ومنه $-x\neq 0$

أي: $(-x)\in\mathbb{R}^*$



التمرين 55

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$

بـ:

$$f(x)=\frac{-3x+1}{x-2}$$

أثبت أن النقطة $I(2,3)$ مركز تناظر لـ (C_f) منحنى الدالة f

$I(2;3)$ مركز تناظر لـ (C_f)

معناه:

من أجل $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

$$\begin{cases} (2(2)-x)\in\mathbb{R}-\{2\} \\ \text{و} \\ f(2(2)-x)+f(x)=2(-3)=-6 \end{cases}$$

• إثبات أن $(4-x)\in\mathbb{R}-\{2\}$

ليكن $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ أي: $x\neq 2$

$-x\neq -2$

$4-x\neq -2+4$

أي $4-x\neq 2$

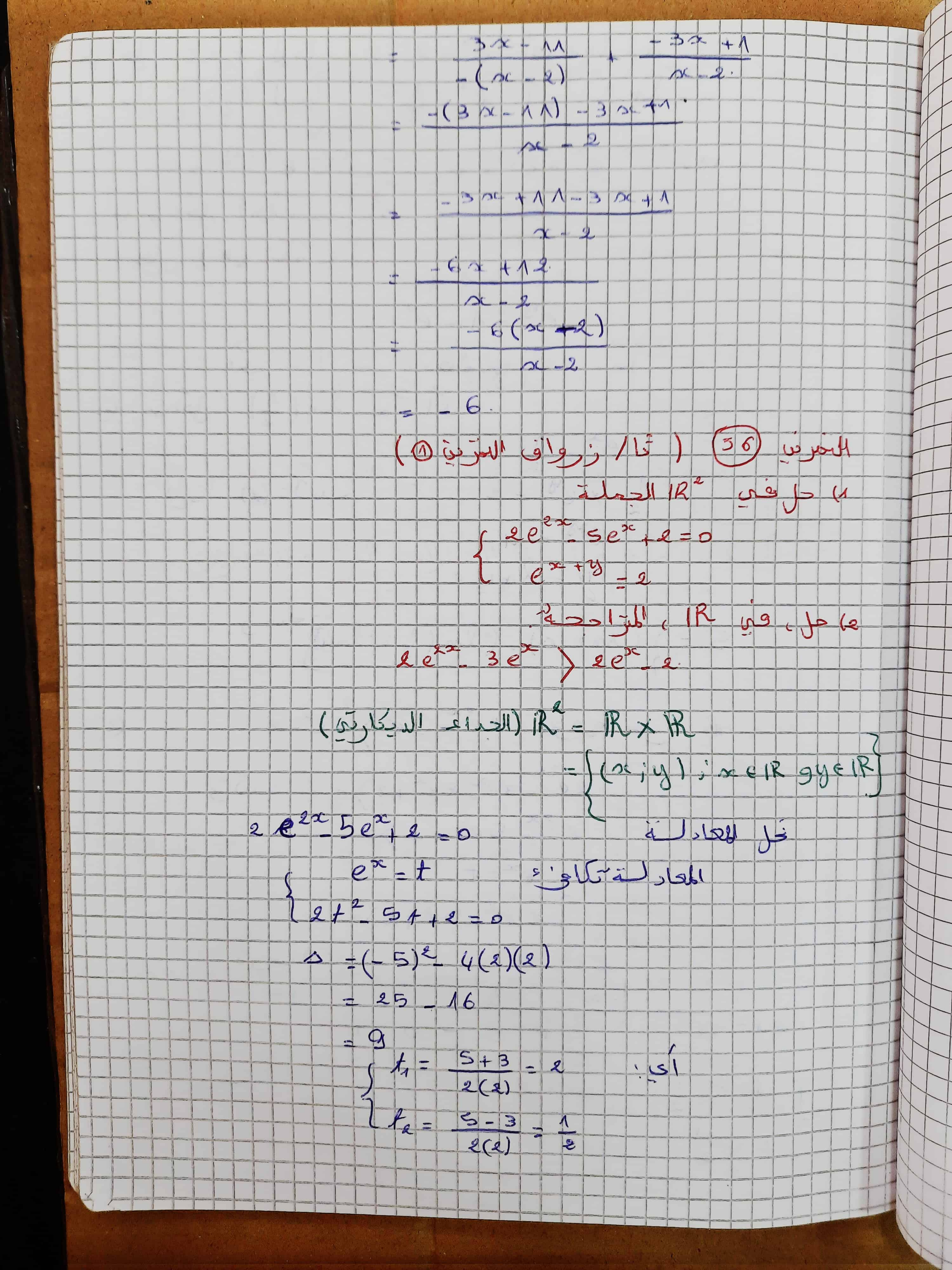
أي $(4-x)\in\mathbb{R}-\{2\}$

•• إثبات أن $f(4-x)+f(x)=-6$

من أجل $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ لدينا

$$f(4-x)+f(x)=\frac{-3(4-x)+1}{4-x-2}+\frac{-3x+1}{x-2}$$

$$=\frac{-12+3x+1}{2-x}+\frac{-3x+1}{x-2}$$



$$= \frac{3x - 11}{-(x-2)} + \frac{-3x+1}{x-2}$$

$$= \frac{-(3x-11) - 3x + 1}{x-2}$$

$$= \frac{-3x + 11 - 3x + 1}{x-2}$$

$$= \frac{-6x + 12}{x-2}$$

$$= \frac{-6(x-2)}{x-2}$$

$$= -6.$$

التمرين (36) (ثا/ زرواق التمرين ①)

1) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة

$$\begin{cases} 2e^{2x} - 5e^{x} + 2 = 0 \\ e^{x+y} = 2 \end{cases}$$

2) حل، في $\mathbb{R}$، المتراجحة:

$$2e^{2x} - 3e^{x} > 2e^{x} - 2.$$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (الجداء الديكارتي)

$$= \{(x;y) \,;\, x \in \mathbb{R} \text{ و } y \in \mathbb{R}\}$$

نحل المعادلة

$$2e^{2x} - 5e^{x} + 2 = 0$$

المعادلة تكافئ:

$$\begin{cases} e^{x} = t \\ 2t^2 - 5t + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2)$$

$$= 25 - 16$$

$$= 9$$

أي:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{5+3}{2(2)} = 2 \\ t_2 = \frac{5-3}{2(2)} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

من أجل $t_1 = 2$ لدينا $e^x = 2$ أي $x = \ln 2$

من أجل $t_2 = \frac{1}{2}$ لدينا $e^x = \frac{1}{2}$ أي $x = \ln \frac{1}{2}$

$e^{x+y} = 2$ تكافئ $e^x \times e^y = 2$ ...... (*)

•) من أجل $x = \ln 2$ أي $e^x = 2$

فإن (*) تكتب

$2e^y = 2$

$e^y = 1 = e^0$

أي

$y = 0$

••) من أجل $x = \ln(\frac{1}{2})$ أي:

$e^x = \frac{1}{2}$

فإن (*) تكتب

$\frac{1}{2} \times e^y = 2$

$e^y = 4$

$y = \ln 4$

ومنه

$S = \{(\ln 2 ; 0) ; (\ln(\frac{1}{2}) ; \ln 4)\}$

2) $2e^{2x} - 3e^x > 2e^x - 2$ معرفة على $\mathbb{R}$

وتكتب

$2e^{2x} - 3e^x - 2e^x + 2 > 0$

$2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$

$\begin{cases} e^x = t \\ 2t^2 - 5t + 2 > 0 \end{cases}$

ندرس اشارة $2t^2 - 5t + 2$

t	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2t^2 - 5t + 2$		+	0	−	0	+	

ومنه $2t^2 - 5t + 2 > 0$ معناه

$\begin{cases} t < \frac{1}{2} \\ t > 0 \end{cases}$ أو

أي: $2(e^x)^2 - 5e^x + 2 > 0$ معناه $e^x < \frac{1}{2}$ أو $e^x > 2$

أي: $\begin{cases} x < \ln(\frac{1}{2}) \\ \text{أو} \\ x > \ln 2 \end{cases}$

ومنه $S_1 =]-\infty ; \ln(\frac{1}{2})[\cup]\ln 2 ; +\infty[$

التمرين (57)

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وجدول تغيراتها هو كالتالي:

تأكد من صحة أو خطأ العبارات التالية مع التبرير.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	↗	0	↘	-3	↗	$+\infty$

1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) \geq -3$

2) على $]1 ; +\infty[$: $f'(x) \leq 0$.

3) من الجدول نلاحظ $f(0) \geq f(1)$

4) المماس للمنحنى الممثل للدالة f في النقطة التي فاصلتها 2- موازي للمستقيم الذي معادلته $y = x$

5) هل $0 < f'(3)$ ؟

1) لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \geq -3$ لأن -3 قيمة حدية صغرى للدالة f على $]-\infty, +\infty[$

أي الاقتراح صحيح.

2) خطأ لأن f متزايدة تماما على $]1, +\infty[$

3) $f(0) < f(1)$ خطأ

لأن $0 < 1$ أي $f(0) \geq f(1)$ لأن f متناقصة تماما

على $[-2, 1]$

4) معامل توجيه المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-2)
هو $f'(-2) = 0$ و معامل التوجيه المستقيم (Δ) الذي معادلته
$y = x$ هو 1 ،
أي : $f'(-2) \neq 1$
ومنه الاقتراح خاطئ

5) لدينا $f'(3) > 0$ صحيح
لأن $3 \in [1, +\infty[$

و f متزايدة تماما على $]1; +\infty[$
أي
$f'(x) > 0$ ومنه $f'(3) > 0$

التمرين (58)

f دالة عددية لمتغير حقيقي x حيث

$$f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^{x}$$

1) أ) أدرس تغيرات الدالة f .

$D_f =]-\infty; +\infty[$ (•

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to} (-x + 1 + e^{2x} - e^{x})$$ (•

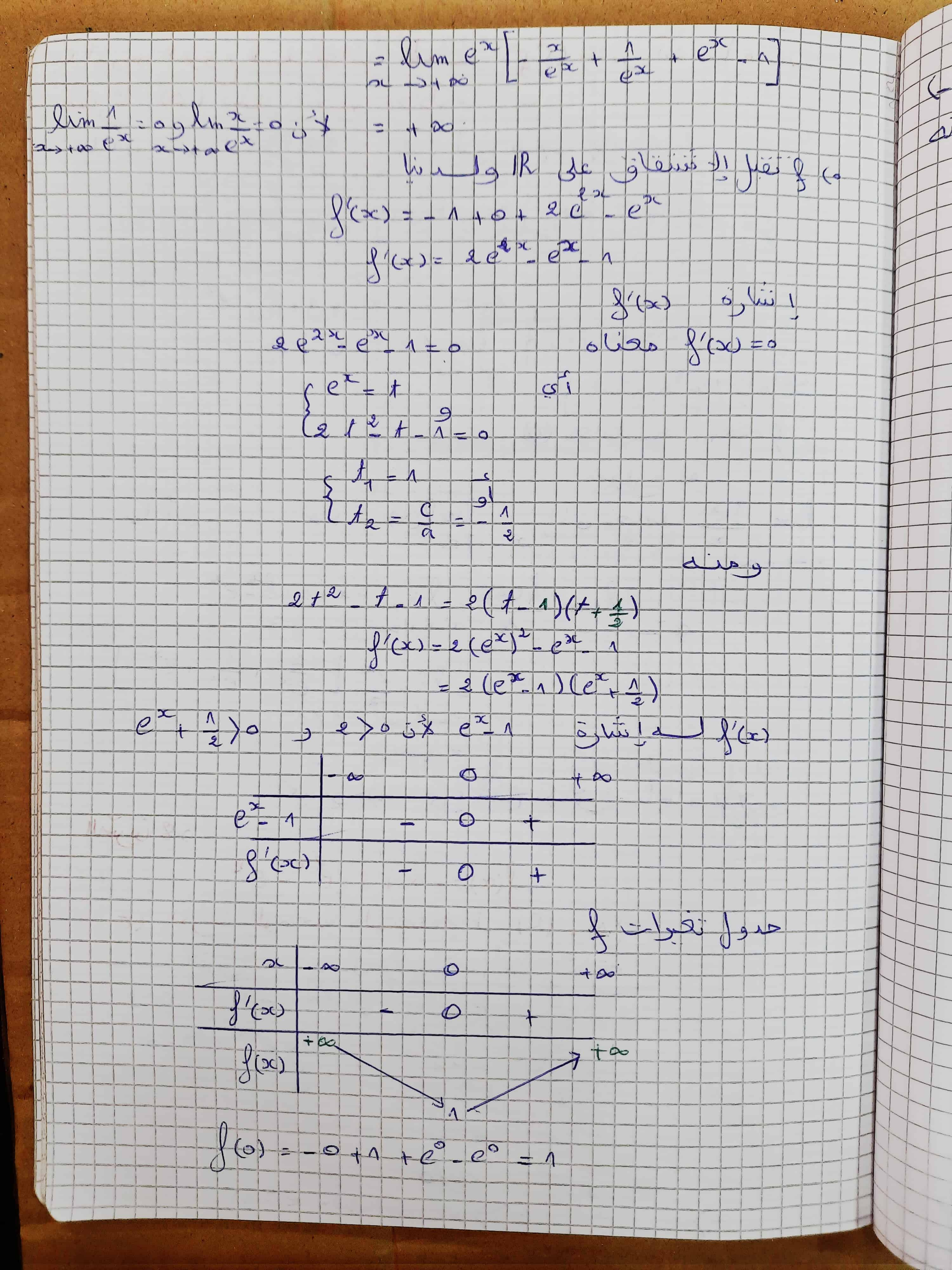
$= +\infty$ لأن

$$\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x + 1 + e^{2x} - e^{x})$$ ح.ع.ت "$\infty - \infty$"



$$= \lim_{x\to+\infty} e^x\left[-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}+e^x-1\right]$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ لأن $\qquad = +\infty$

٥) f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f'(x) = -1+0+2e^{2x}-e^x$$

$$f'(x) = 2e^{2x}-e^x-1$$

إشارة $f'(x)$

$f'(x)=0$ معناه $2e^{2x}-e^x-1=0$

أي
$$\begin{cases} e^x = t \\ 2t^2 - t - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$ أو

ومنه

$$2t^2 - t - 1 = 2(t-1)\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2(e^x)^2 - e^x - 1$$
$$= 2(e^x-1)\left(e^x+\frac{1}{2}\right)$$

إشارة $f'(x)$ لـ e^x-1 لأن $2>0$ و $e^x+\frac{1}{2}>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$$f(0) = -0+1+e^0-e^0 = 1$$

ب) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) وبين أنه يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلة له

بما أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ إذن لدينا فرع لا نهائي

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ إذن لدينا فرع لا نهائي

بما أن

$$\begin{cases} f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^{x} \\ \lim_{x \to -\infty} (e^{2x} - e^{x}) = 0 \end{cases}$$

إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = -x + 1$

بجوار $-\infty$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ إذن نحسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + 1 + e^{2x} - e^{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} \left[-\frac{x}{e^{x}} + \frac{1}{e^{x}} + e^{x} - 1 \right]$$

$$= +\infty$$

أي يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه $y'y$

$$f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^{x}$$

ج) ادرس الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ)

نحسب الفرق $f(x) - y$ ثم ندرس إشارته

لدينا $f(x) - y = e^{2x} - e^{x}$

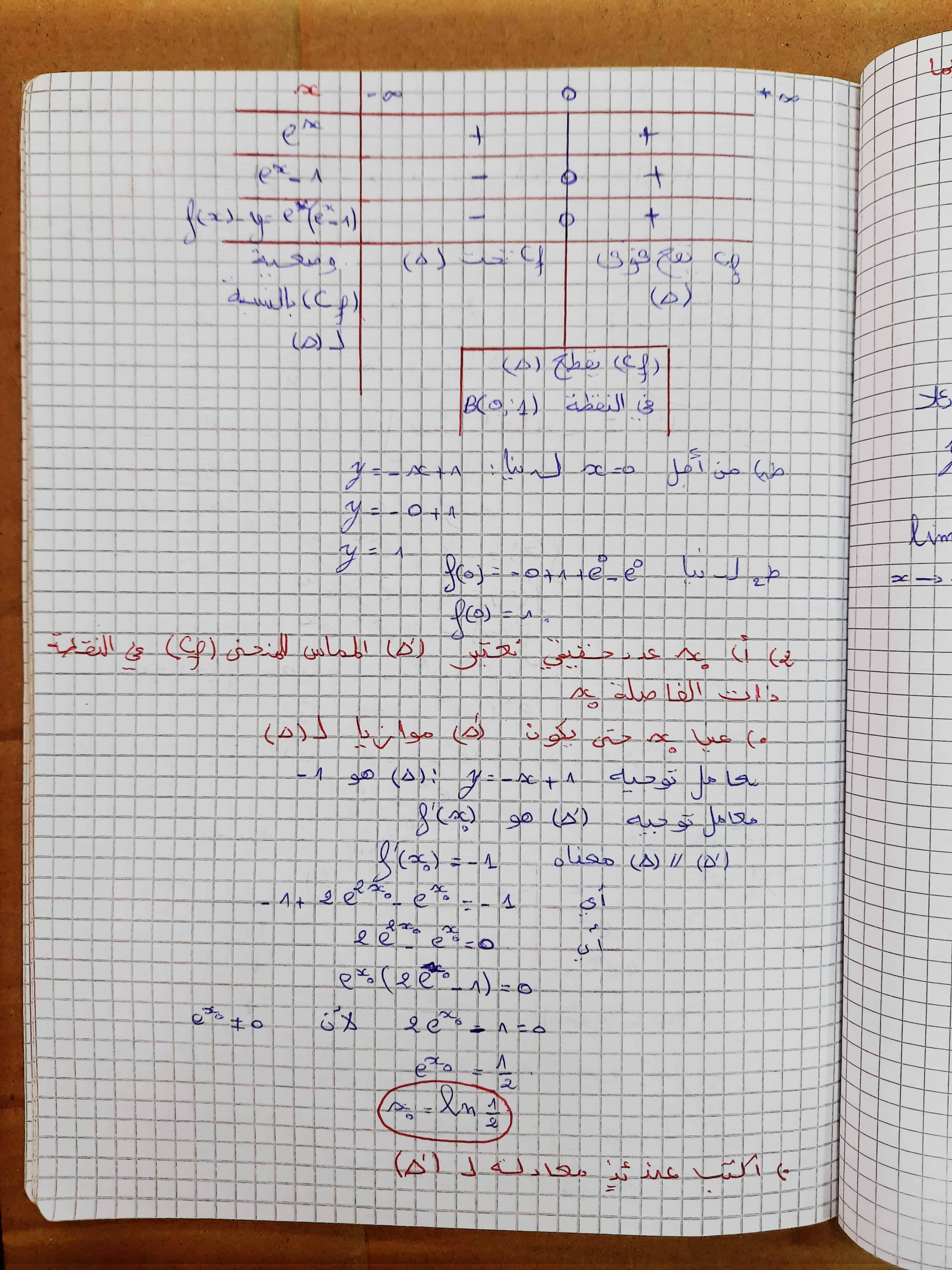
$e^{2x} - e^{x} = 0$ معناه $e^{x}(e^{x} - 1) = 0$

أي $e^{x} - 1 = 0$ لأن $e^{x} > 0$

$e^{x} = 1$

$x = 0$

$e^{x} - 1 > 0$ معناه $e^{x} > 1$ أي $x > 0$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^{x}		$+$	|	$+$	
$e^{x}-1$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y=e^{x}(e^{x}-1)$		$-$	0	$+$	
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)		C_f تحت (Δ)		C_f تقع فوق (Δ)	

(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(0;1)$

ط₁) من أجل $x=0$ لدينا: $y=-x+1$

$y=-0+1$

$y=1$

ط₂) لدينا $f(0)=-0+1+e^{0}-e^{0}$

$f(0)=1$

4) أ) x_0 عدد حقيقي نعتبر (Δ') المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0

•) عين x_0 حتى يكون (Δ') موازيا لـ (Δ)

معامل توجيه (Δ): $y=-x+1$ هو -1

معامل توجيه (Δ') هو $f'(x_0)$

$(\Delta') \parallel (\Delta)$ معناه $f'(x_0)=-1$

أي $-1+2e^{2x_0}-e^{x_0}=-1$

أي $2e^{2x_0}-e^{x_0}=0$

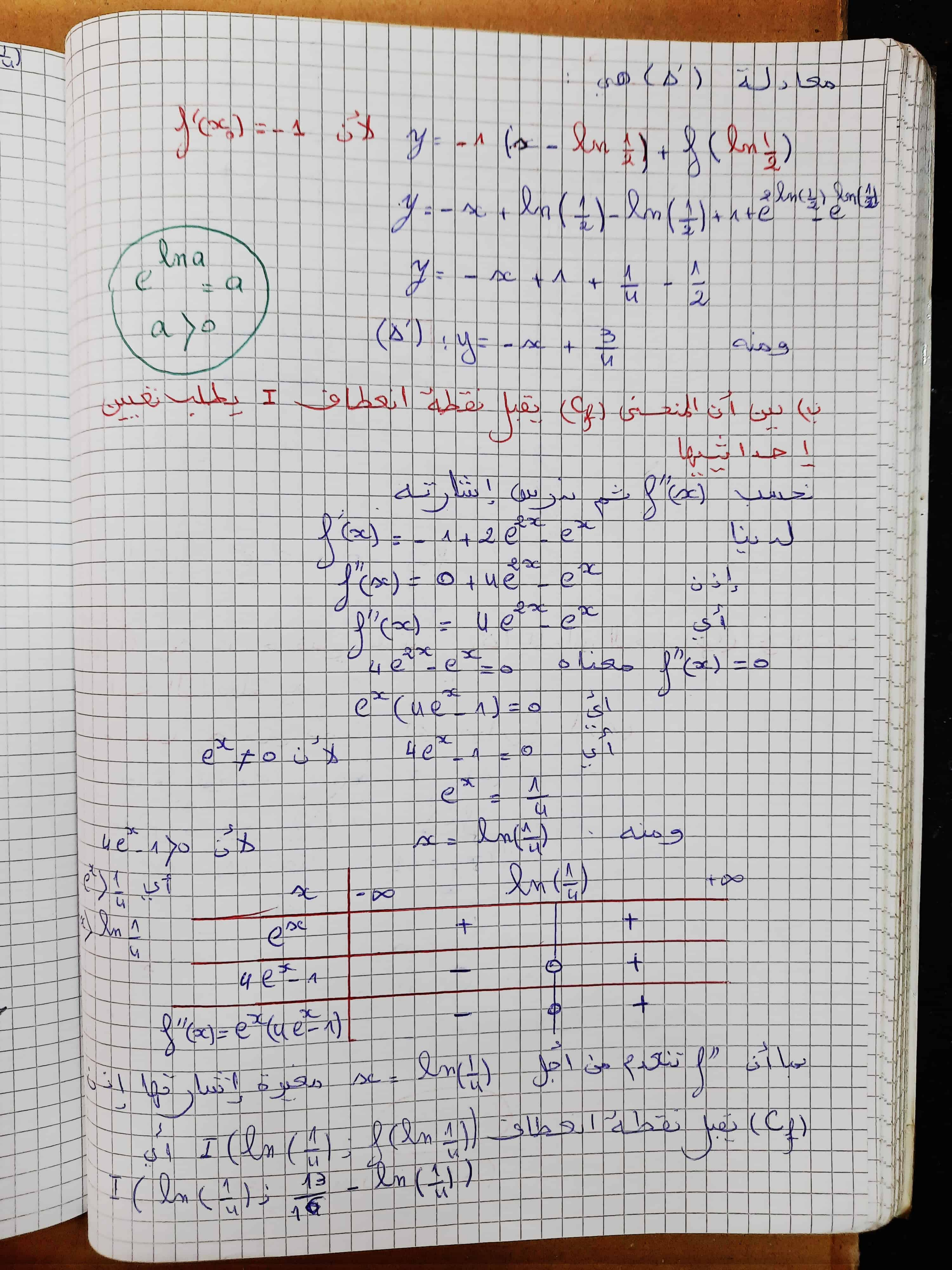
$e^{x_0}(2e^{x_0}-1)=0$

لأن $e^{x_0}\neq 0$ ؛ $2e^{x_0}-1=0$

$e^{x_0}=\frac{1}{2}$

$x_0=\ln\frac{1}{2}$

•) اكتب عندئذ معادلة لـ (Δ')



معادلة (Δ') هي :

$f'(x_0) = -1$ لأن

$$y = -1\left(x - \ln\frac{1}{2}\right) + f\left(\ln\frac{1}{2}\right)$$

$$y = -x + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 1 + e^{2\ln(\frac{1}{2})} - e^{\ln(\frac{1}{2})}$$

$$y = -x + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

ومنه $(\Delta') : y = -x + \frac{3}{4}$

$e^{\ln a} = a$

$a > 0$

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثيتيها

نحسب $f''(x)$ ثم ندرس إشارته

لدينا $f'(x) = -1 + 2e^{2x} - e^{x}$

إذن $f''(x) = 0 + 4e^{2x} - e^{x}$

أي $f''(x) = 4e^{2x} - e^{x}$

$f''(x) = 0$ معناه $4e^{2x} - e^{x} = 0$

أي $e^{x}(4e^{x} - 1) = 0$

أي $4e^{x} - 1 = 0$ لأن $e^{x} \neq 0$

$e^{x} = \frac{1}{4}$

ومنه $x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

لأن $4e^{x} - 1 > 0$

أي $e^{x} > \frac{1}{4}$

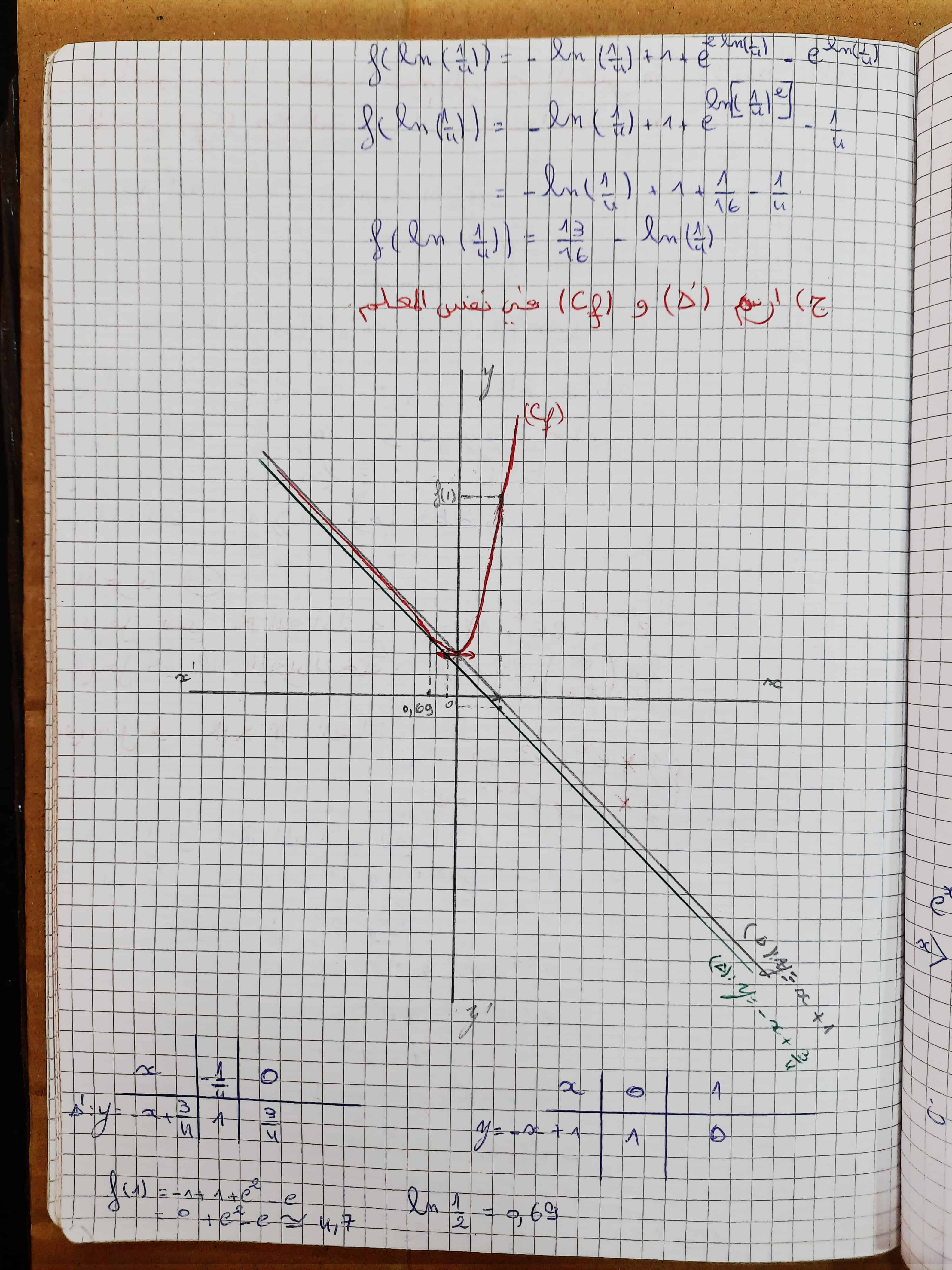
$x > \ln\frac{1}{4}$

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{1}{4}\right)$	$+\infty$
e^{x}	+		+
$4e^{x} - 1$	−	0	+
$f''(x) = e^{x}(4e^{x} - 1)$	−	0	+

بما أن f'' تنعدم من أجل $x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$ مغيرة إشارتها إذن

(C_f) يقبل نقطة انعطاف $I\left(\ln\left(\frac{1}{4}\right) ; f\left(\ln\frac{1}{4}\right)\right)$ أي

$I\left(\ln\left(\frac{1}{4}\right) ; \frac{13}{16} - \ln\left(\frac{1}{4}\right)\right)$



$$f\left(\ln\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) = -\ln\left(\tfrac{1}{4}\right) + 1 + e^{2\ln\left(\frac{1}{4}\right)} - e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$f\left(\ln\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) = -\ln\left(\tfrac{1}{4}\right) + 1 + e^{\ln\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]} - \tfrac{1}{4}$$

$$= -\ln\left(\tfrac{1}{4}\right) + 1 + \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{4}$$

$$f\left(\ln\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) = \tfrac{13}{16} - \ln\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

ج) ارسم (Δ') و (C_f) في نفس المعلم

x	$-\frac{1}{4}$	0
$\Delta': y = -x + \frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$

x	0	1
$y = -x + 1$	1	0

$$f(1) = -1 + 1 + e^2 - e$$
$$= 0 + e^2 - e \simeq 4,7$$

$$\ln\frac{1}{2} = 0,69$$

3) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y = -x + m$

حل المعادلة $f(x) = -x + m$

أي $\begin{cases} y = f(x) \\ y = -x + m \end{cases}$

نلاحظ أن $(\Delta m) // (\Delta)$ و $(\Delta m) // (\Delta')$

- إذا كان $m < \frac{3}{4}$ لا توجد نقاط تقاطع
- إذا كان $m = \frac{3}{4}$ توجد نقطة تماس
- إذا كان $\frac{3}{4} < m < 1$ توجد نقطتان.
- إذا كان $m \geq 1$ توجد نقطة وحيدة.

التمرين (59)

1) حل في IR المعادلة $e^{2x+1} - 8e^{x} + 12 = 0$

2) حل في IR، المتراجحة: $\ln\left(\frac{e}{2x}\right) + \ln e < 1$

3) حل في $IR \times IR$، الجملة

$$\begin{cases} y \times e^{x} + e^{x} = 1 \\ y \times e^{2x} + e^{x+1} = e \end{cases}$$

1) نحل في IR المعادلة المعطاة.

لدينا $e^{2x+1} - 8e^{x} + 12 = 0$

معرفة على IR وتكتب:

$$e^{2x} \times e - 8e^{x} + 12 = 0$$

$$e(e^{x})^2 - 8e^{x} + 12 = 0$$

$$\begin{cases} t = e^{x} \\ et^2 - 8t + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(e)(12)$$

$$\Delta = 64 - 48e$$

أي $\Delta < 0$ لأن $e \simeq 2{,}718$

ومنه المعادلة (*) ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ وبالتالي المعادلة المعطاة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ أي $S_1 = \emptyset$

2) نحل المتراجحة في $\mathbb{R}$

$\ln\left(\frac{e}{2x}\right) + \ln 2 < 1$ معرفة $\begin{cases} \frac{e}{2x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ أي $x > 0$

وتكتب $\ln e - \ln 2x + \ln 2 < 1$

$1 - \ln 2x + \ln 2 < 1$

$\ln 2 < \ln 2x$

$2 < 2x$

$1 < x$

ومنه $S_2 =]1, +\infty[$

3) الجملة تكتب

$\begin{cases} y \times e^{2x} + e^{2x} = e^{x} \\ y \times e^{2x} + e^{x+1} = e \end{cases}$ بعد الضرب في e^x الطرف الأول والثاني

وبالطرح نجد

$e^{2x} - e^{x+1} = e^{x} - e$

$e^{2x} - e^{x+1} - (e^{x} - e) = 0$

$(e^{x})^2 - e^{x}e - (e^{x} - e) = 0$

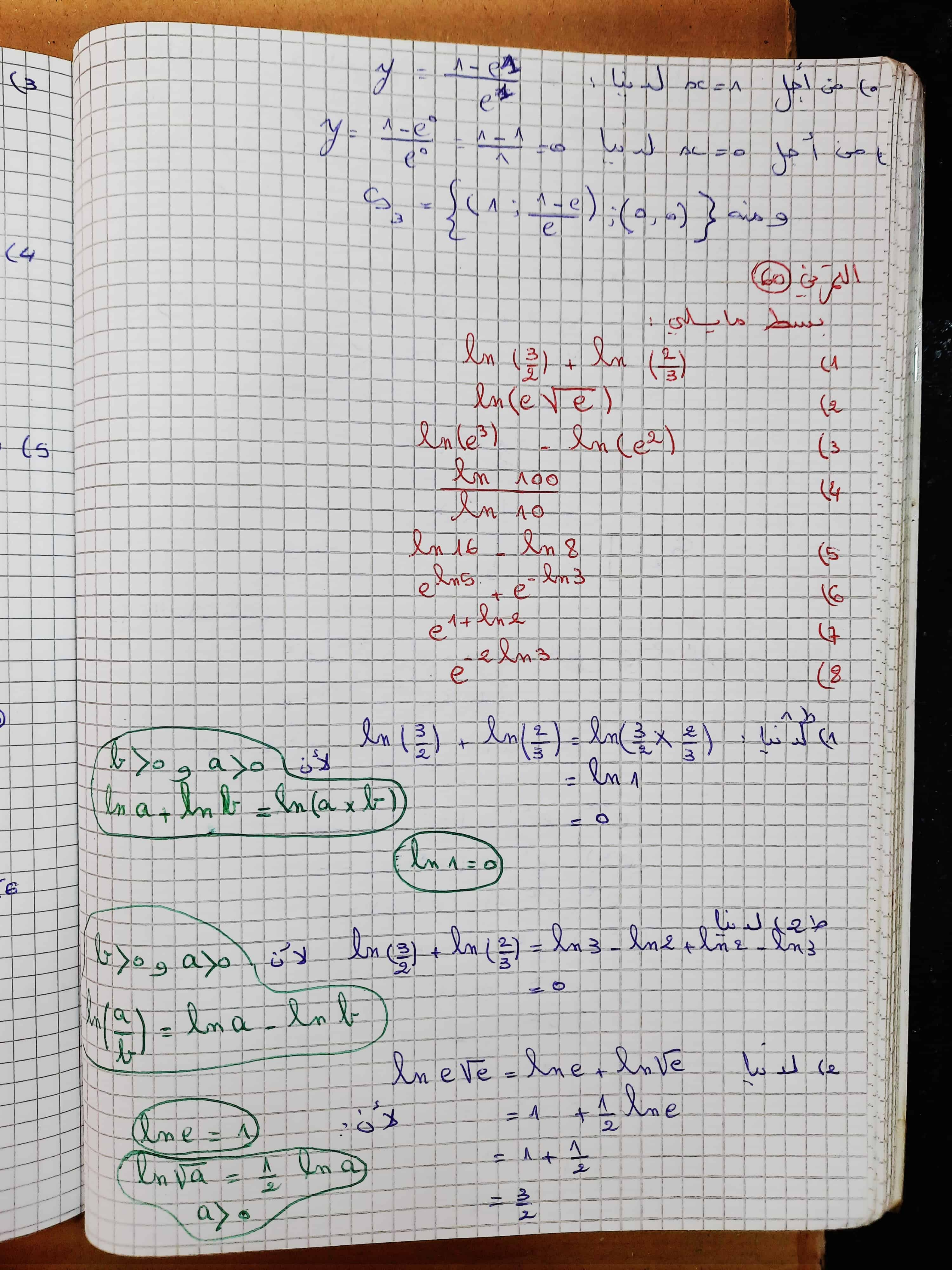
$e^{x}(e^{x} - e) - (e^{x} - e) = 0$

$(e^{x} - e)(e^{x} - 1) = 0$

$\begin{cases} e^{x} - e = 0 \\ e^{x} - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} e^{x} = e \\ e^{x} = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$



من أجل $x=1$ لدينا: $y = \frac{1-e^{1}}{e^{1}}$

من أجل $x=0$ لدينا: $y = \frac{1-e^{0}}{e^{0}} = \frac{1-1}{1} = 0$

ومنه $S_3 = \left\{ \left(1 ; \frac{1-e}{e}\right) ; (0,0) \right\}$

التمرين (60)

بسط ما يلي:

1) $\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

2) $\ln(e\sqrt{e})$

3) $\ln(e^{3}) - \ln(e^{2})$

4) $\frac{\ln 100}{\ln 10}$

5) $\ln 16 - \ln 8$

6) $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3}$

7) $e^{1+\ln 2}$

8) $e^{-2\ln 3}$

1) ط1) لدينا: $\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \ln 1 = 0$

لأن: $a>0$ و $b>0$
$\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$

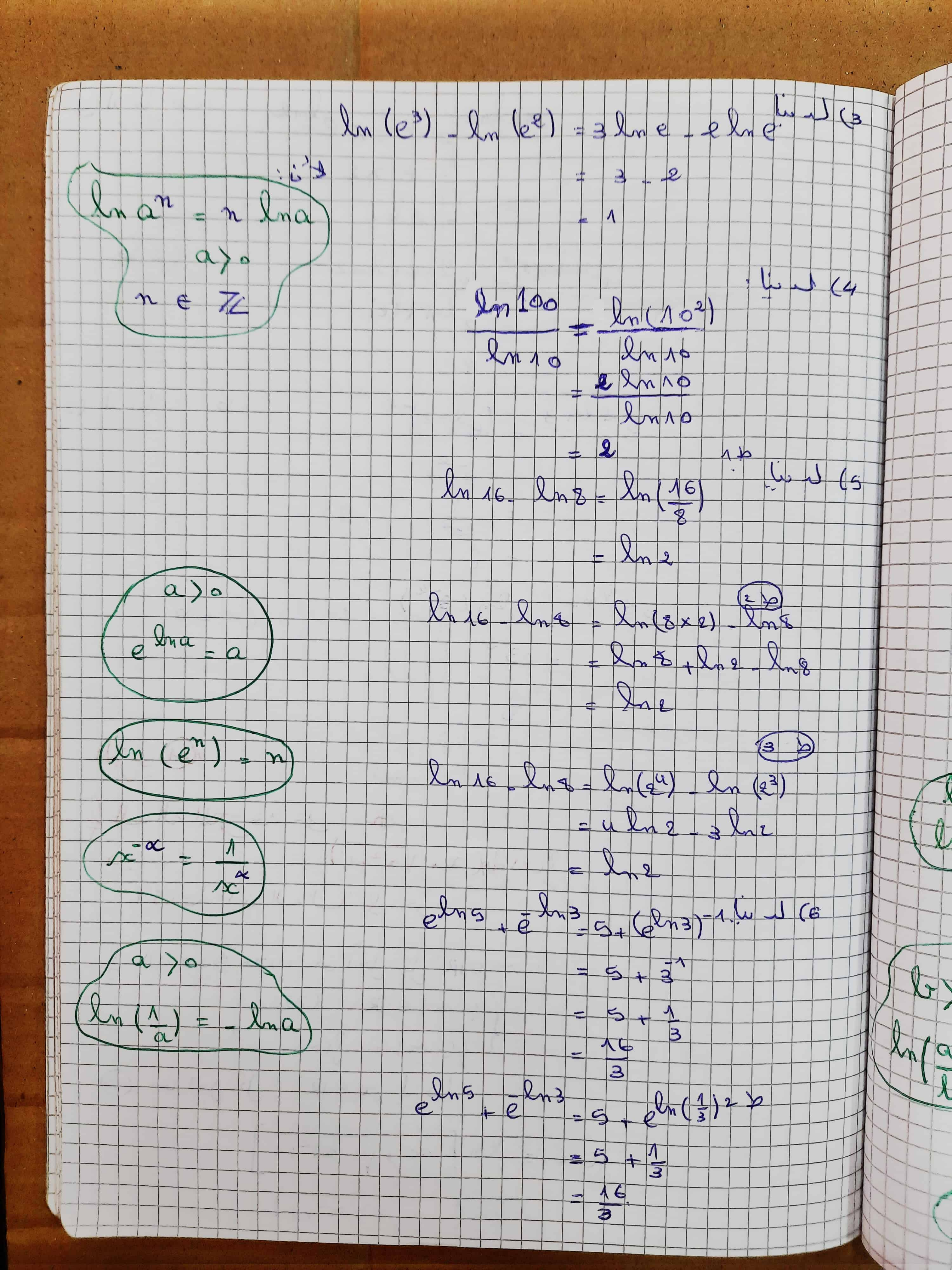
$\ln 1 = 0$

ط2) لدينا: $\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 3 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 = 0$

لأن: $a>0$ و $b>0$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

2) لدينا: $\ln e\sqrt{e} = \ln e + \ln\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}\ln e = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

لأن:
$\ln e = 1$
$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$, $a>0$



3) لدينا

$$\ln(e^3) - \ln(e^2) = 3\ln e - 2\ln e$$
$$= 3 - 2$$
$$= 1$$

:طن

$$\ln a^n = n \ln a$$
$$a > 0$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

4) لدينا:

$$\frac{\ln 100}{\ln 10} = \frac{\ln(10^2)}{\ln 10}$$
$$= \frac{2\ln 10}{\ln 10}$$
$$= 2$$

5) لدينا

ط1:

$$\ln 16 - \ln 8 = \ln\left(\frac{16}{8}\right)$$
$$= \ln 2$$

ط2

$$\ln 16 - \ln 8 = \ln(8 \times 2) - \ln 8$$
$$= \ln 8 + \ln 2 - \ln 8$$
$$= \ln 2$$

$$a > 0$$
$$e^{\ln a} = a$$

ط3

$$\ln 16 - \ln 8 = \ln(2^4) - \ln(2^3)$$
$$= 4\ln 2 - 3\ln 2$$
$$= \ln 2$$

$$\ln(e^n) = n$$

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

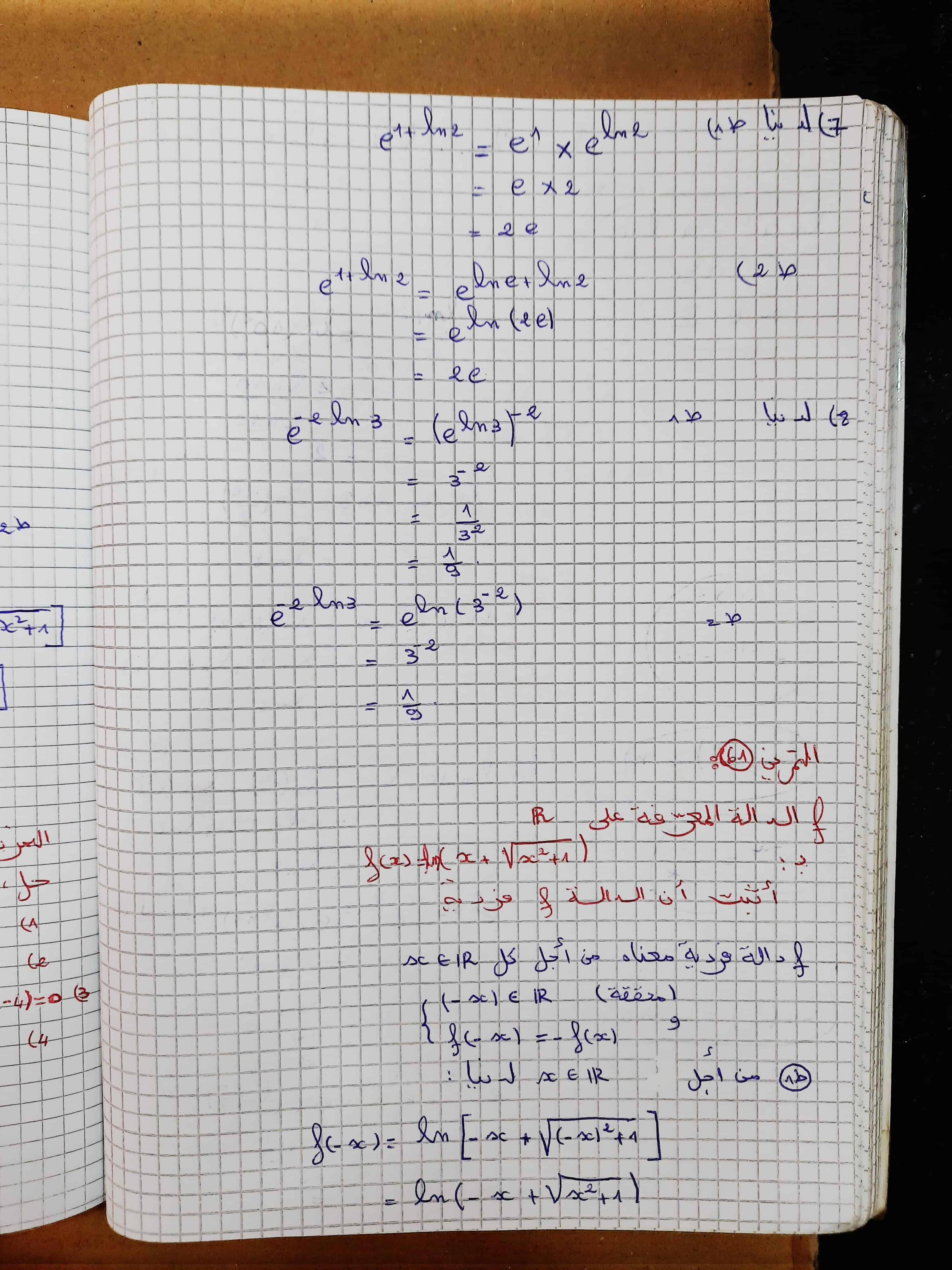
6) لدينا

$$e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} = 5 + (e^{\ln 3})^{-1}$$
$$= 5 + 3^{-1}$$
$$= 5 + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{16}{3}$$

$$a > 0$$
$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

ط2

$$e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} = 5 + e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$$
$$= 5 + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{16}{3}$$



7) لدينا طـ1)

$$e^{1+\ln 2} = e^{1} \times e^{\ln 2}$$
$$= e \times 2$$
$$= 2e$$

طـ2)

$$e^{1+\ln 2} = e^{\ln e + \ln 2}$$
$$= e^{\ln(2e)}$$
$$= 2e$$

8) لدينا طـ1

$$e^{-2\ln 3} = \left(e^{\ln 3}\right)^{-2}$$
$$= 3^{-2}$$
$$= \frac{1}{3^{2}}$$
$$= \frac{1}{9}$$

طـ2

$$e^{-2\ln 3} = e^{\ln(3^{-2})}$$
$$= 3^{-2}$$
$$= \frac{1}{9}$$

التمرين (61):

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right)$$

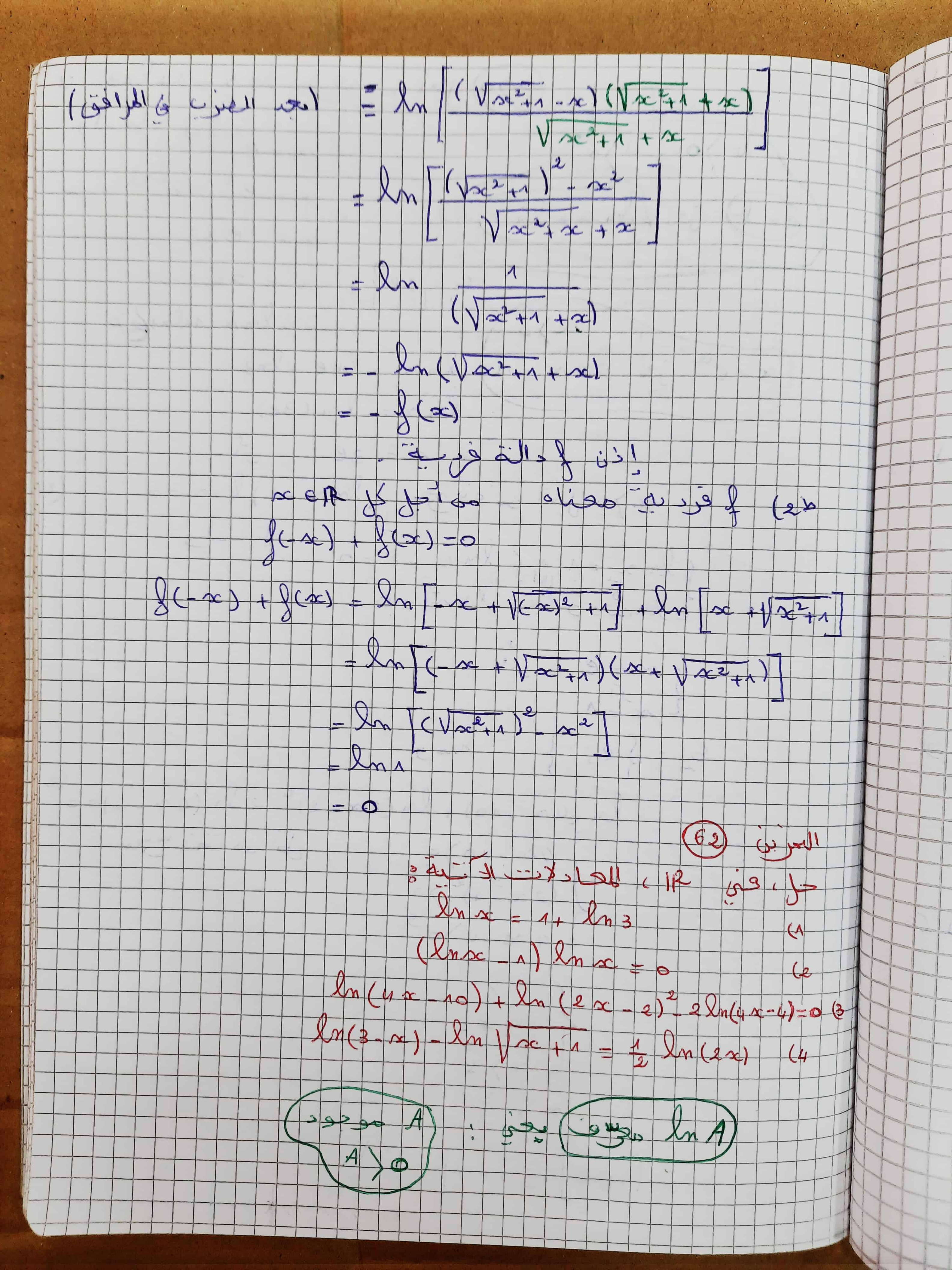
أثبت أن الدالة f فردية

f دالة فردية معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (-x) \in \mathbb{R} \quad \text{(محققة)} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

طـ1) من أجل $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$f(-x) = \ln\left[-x + \sqrt{(-x)^{2}+1}\right]$$
$$= \ln\left(-x + \sqrt{x^{2}+1}\right)$$



(بعد الضرب في المرافق) $= \ln\left[\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$

$= \ln\left[\dfrac{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\right]$

$= \ln \dfrac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$

$= -\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

$= -f(x)$

إذن f دالة فردية .

ط2) f فردية معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$f(-x)+f(x)=0$

$f(-x)+f(x) = \ln\left[-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right] + \ln\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]$

$= \ln\left[(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})\right]$

$= \ln\left[(\sqrt{x^2+1})^2-x^2\right]$

$= \ln 1$

$= 0$

التمرين (62)

حل، في $\mathbb{R}$، المعادلات الآتية:

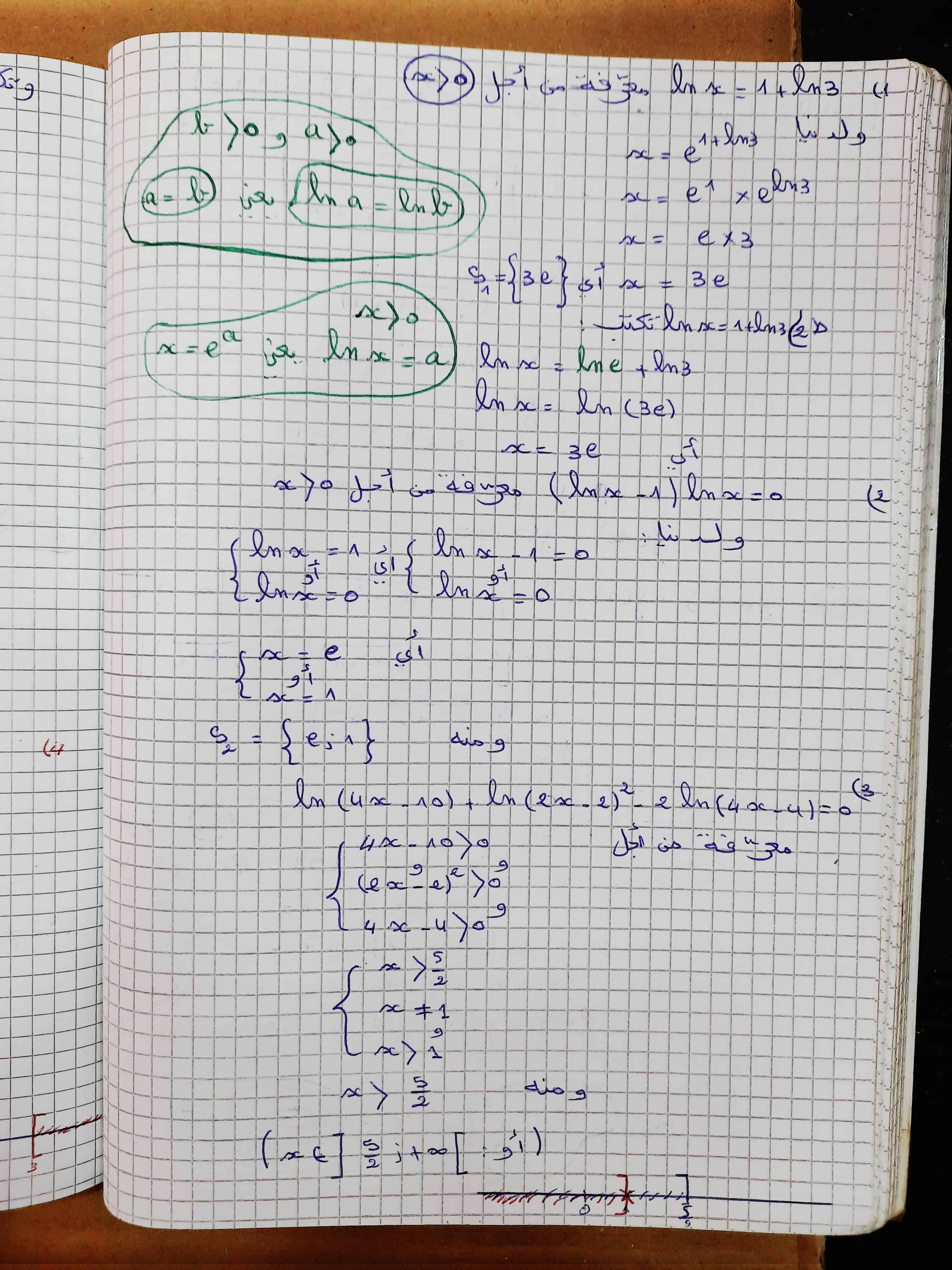
1) $\ln x = 1+\ln 3$

2) $(\ln x - 1)\ln x = 0$

3) $\ln(4x-10)+\ln(2x-2)^2-2\ln(4x-4)=0$

4) $\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\ln(2x)$

$\ln A$ موجود يعني : A موجود ، $A > 0$



1) $\ln x = 1 + \ln 3$ معرّفة من أجل $x > 0$

ولدينا:

$x = e^{1+\ln 3}$

$x = e^{1} \times e^{\ln 3}$

$x = e \times 3$

أي $x = 3e$ ، $S_1 = \{3e\}$

$b > 0$ و $a > 0$

$\ln a = \ln b$ يعني $a = b$

$x > 0$

$\ln x = a$ يعني $x = e^{a}$

ط2) $\ln x = 1 + \ln 3$ تكتب:

$\ln x = \ln e + \ln 3$

$\ln x = \ln(3e)$

أي $x = 3e$

2) $(\ln x - 1)\ln x = 0$ معرّفة من أجل $x > 0$

ولدينا:

$\begin{cases} \ln x - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ \ln x = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \ln x = 1 \\ \text{أو} \\ \ln x = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = e \\ \text{أو} \\ x = 1 \end{cases}$

ومنه $S_2 = \{e ; 1\}$

3) $\ln(4x - 10) + \ln(2x - 2)^2 - 2\ln(4x - 4) = 0$

معرّفة من أجل

$\begin{cases} 4x - 10 > 0 \text{ و} \\ (2x - 2)^2 > 0 \text{ و} \\ 4x - 4 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x \neq 1 \\ x > 1 \end{cases}$

ومنه $x > \frac{5}{2}$

أي $\left(x \in \left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[\right)$

0 1 $\frac{5}{2}$

وتكافئ

$$\ln\left[(4x-10)(2x-2)^2\right]=\ln\left[(4x-4)^2\right]$$

$$(4x-10)(2x-2)^2=(4x-4)^2$$

$$(4x-10)(2x-2)^2-(4x-4)^2=0$$

$$(4x-10)(2x-2)^2-\left[2(2x-2)\right]^2=0$$

$$(4x-10)(2x-2)^2-4(2x-2)^2=0$$

$$(2x-2)^2\left[4x-10-4\right]=0$$

$$(2x-2)^2(4x-14)=0$$

أي

$$\begin{cases}(2x-2)^2=0\\ \text{أو}\\ 4x-14=0\end{cases}$$

أي

$$\begin{cases}x=1\\ \text{أو}\\ x=\frac{7}{2}\end{cases}$$

مرفوض لأنه لا يحقق الشرط $\frac{5}{2}<x$

ومنه $S_2=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

4)

$$\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}\ln(2x)$$

معرفة من أجل

$$\begin{cases}3-x>0\\ \text{و}\\ x+1>0\\ \text{و}\\ 2x>0\end{cases}$$

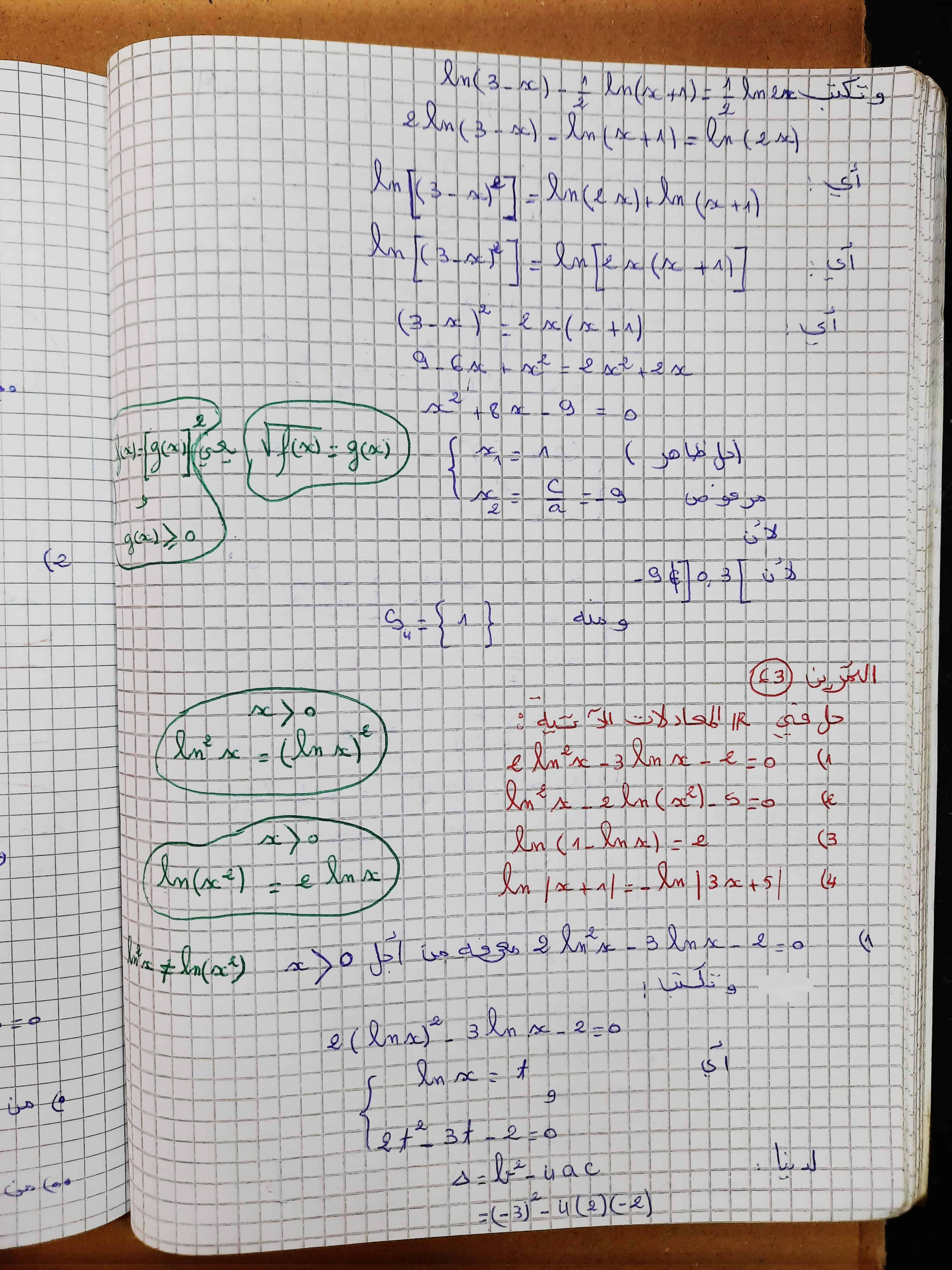
أي

$$\begin{cases}x<3\\ \text{و}\\ x>-1\\ \text{و}\\ x>0\end{cases}$$

ومنه $0<x<3$

$\left(x\in\,]0\,;\,3[\quad \text{أو}\right)$

-1 0 3



ونكتب: $\ln(3-x) - \frac{1}{2}\ln(x+1) = \frac{1}{2}\ln 2x$

$$2\ln(3-x) - \ln(x+1) = \ln(2x)$$

أي: $\ln\left[(3-x)^2\right] = \ln(2x) + \ln(x+1)$

أي: $\ln\left[(3-x)^2\right] = \ln\left[2x(x+1)\right]$

أي: $(3-x)^2 = 2x(x+1)$

$$9 - 6x + x^2 = 2x^2 + 2x$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 & \text{(الحل ظاهر)} \\ x_2 = \frac{c}{a} = -9 & \text{مرفوض} \end{cases}$$

لأن: $-9 \notin]0, 3[$

ومنه $S_4 = \{1\}$

$f(x) = [g(x)]^2$ يعني $\sqrt{f(x)} = g(x)$ و $g(x) \geq 0$

التمرين (3)

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية:

1) $2\ln^2 x - 3\ln x - 2 = 0$

2) $\ln^2 x - 2\ln(x^2) - 5 = 0$

3) $\ln(1 - \ln x) = 2$

4) $\ln|x+1| = -\ln|3x+5|$

$x > 0$: $\ln^2 x = (\ln x)^2$

$x > 0$: $\ln(x^2) = 2\ln x$

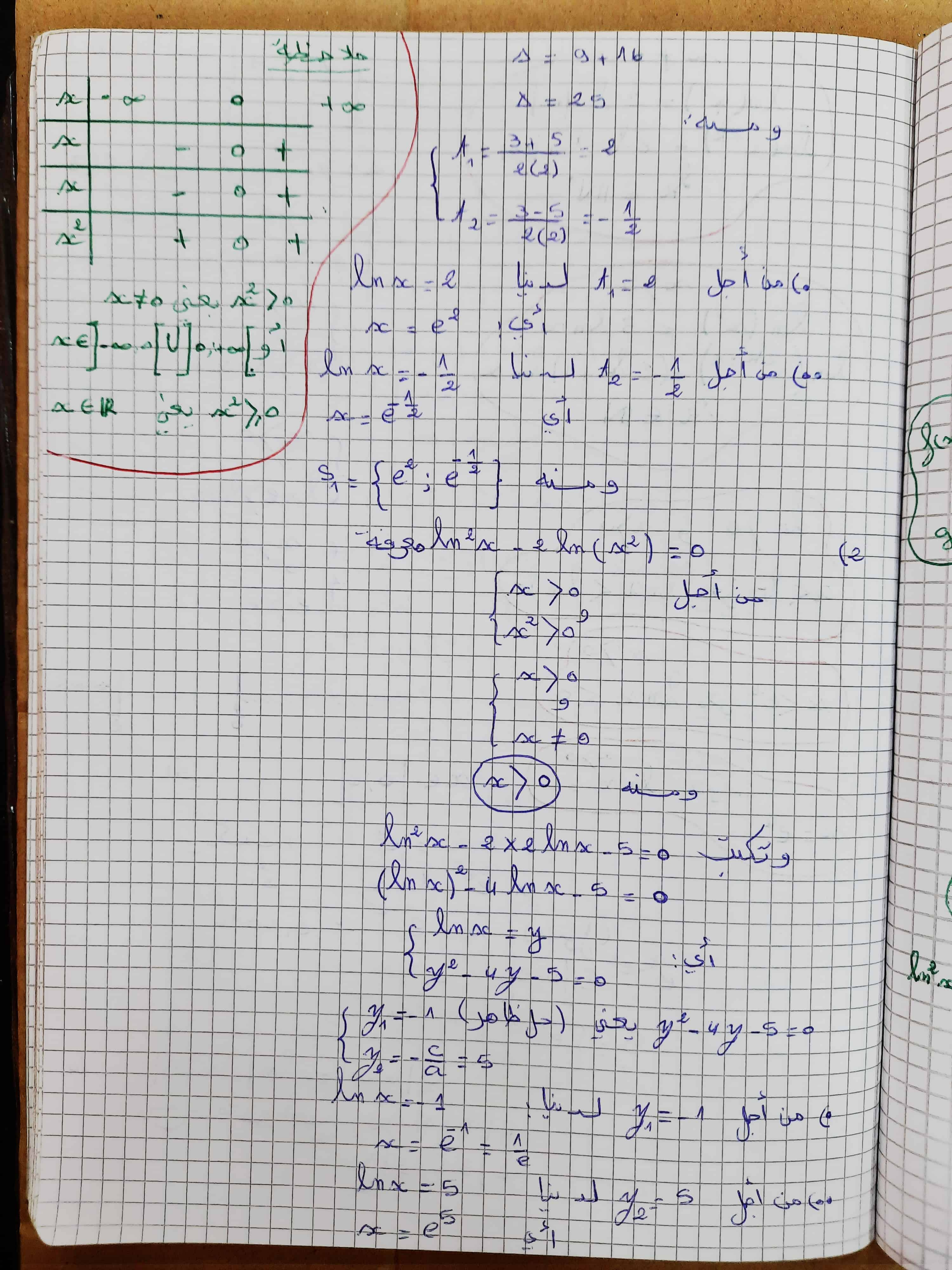
1) $2\ln^2 x - 3\ln x - 2 = 0$ معرفة من أجل $x > 0$ ، $\ln^2 x \neq \ln(x^2)$

ونكتب:

$$2(\ln x)^2 - 3\ln x - 2 = 0$$

أي:
$$\begin{cases} \ln x = t \\ \text{و} \\ 2t^2 - 3t - 2 = 0 \end{cases}$$

لدينا:
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-3)^2 - 4(2)(-2)$$



ملاحظة

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	0	$+$	

$x \neq 0$ يعني $x^2 > 0$

أو $x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$x \in \mathbb{R}$ يعني $x^2 \geq 0$

$\Delta = 9 + 16$

$\Delta = 25$

ومنه:

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{3+5}{2(2)} = 2 \\ t_2 = \dfrac{3-5}{2(2)} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

من أجل $t_1 = 2$ لدينا $\ln x = 2$

أي: $x = e^2$

ومن أجل $t_2 = -\frac{1}{2}$ لدينا $\ln x = -\frac{1}{2}$

أي $x = e^{-\frac{1}{2}}$

ومنه $S_1 = \left\{ e^2 ; e^{-\frac{1}{2}} \right\}$

2) $\ln^2 x - 2\ln(x^2) = 0$ معرفة:

من أجل $\begin{cases} x > 0 \\ \text{و} \\ x^2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0 \\ \text{و} \\ x \neq 0 \end{cases}$

ومنه $x > 0$

وتكتب: $\ln^2 x - 2 \times 2 \ln x - 5 = 0$

$(\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$

أي: $\begin{cases} \ln x = y \\ y^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases}$

$y^2 - 4y - 5 = 0$ يعني $\begin{cases} y_1 = -1 \text{ (حل ظاهر)} \\ y_2 = -\dfrac{c}{a} = 5 \end{cases}$

من أجل $y_1 = -1$ لدينا: $\ln x = -1$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

ومن أجل $y_2 = 5$ لدينا $\ln x = 5$

أي $x = e^5$

$x \neq 0$
$\ln(x^2) = 2\ln|x|$
$\ln(x^{2k}) = 2k\ln|x|$
$k \in \mathbb{N}^*$

$x > 0$
$\ln(x^3) = 3\ln x$
$\ln(x^{2k+1}) = (2k+1)\ln x$
$k \in \mathbb{N}$

$a > 0$ و $b > 0$
$a < b$ يعني $\ln a < \ln b$

$x > 0$
$x < e^a$ يعني $\ln x < a$

$x > 0$
$\ln x = a$ يعني: $x = e^a$

ومنه: $S_2 = \left\{\frac{1}{e} ; e^5\right\}$

$\ln(1 - \ln x) = 2$ (3 معرفة:
من أجل
$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \text{و} \\ 1 > \ln x \end{cases}$$

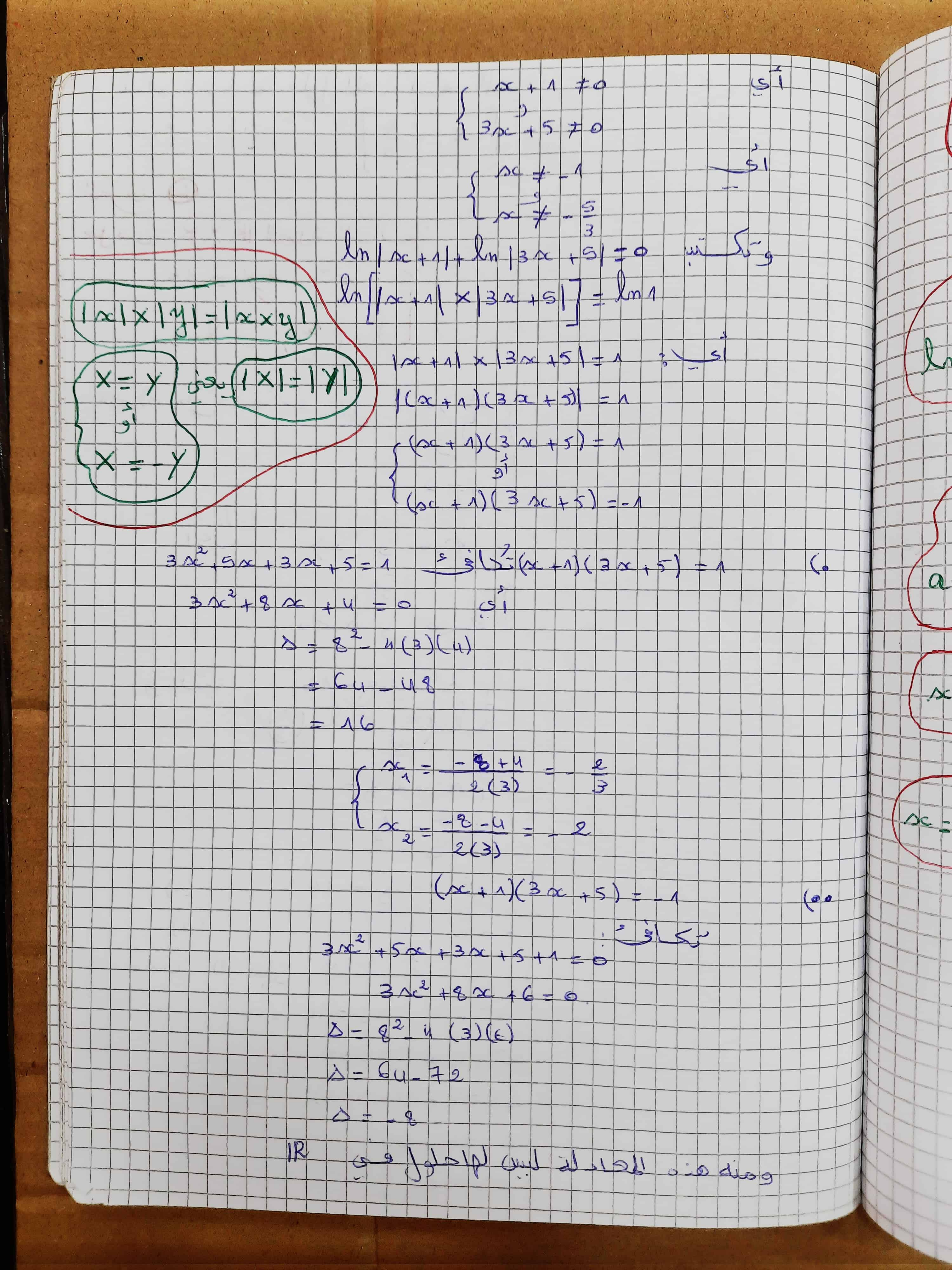
$$\begin{cases} x > 0 \\ \text{و} \\ \ln e > \ln x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \text{و} \\ e > x \end{cases}$$

أي $x \in]0 ; e[$

وتكتب: $1 - \ln x = e^2$
أي $1 - e^2 = \ln x$
$x = e^{1-e^2} \simeq 0{,}0016$ (مقبول)
لأن $e^{1-e^2} \in]0 ; e[$
ومنه: $S_3 = \left\{e^{1-e^2}\right\}$

4) $\ln|x+1| = -\ln|3x+5|$
معرفة من أجل
$$\begin{cases} |x+1| > 0 \\ \text{و} \\ |3x+5| > 0 \end{cases}$$



أي

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \text{و} \\ 3x+5 \neq 0 \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ \text{و} \\ x \neq -\frac{5}{3} \end{cases}$$

ونكتب

$$\ln|x+1| + \ln|3x+5| = 0$$

$$\ln\left[|x+1| \times |3x+5|\right] = \ln 1$$

أي:

$$|x+1| \times |3x+5| = 1$$

$$|(x+1)(3x+5)| = 1$$

$$\begin{cases} (x+1)(3x+5) = 1 \\ \text{أو} \\ (x+1)(3x+5) = -1 \end{cases}$$

$|x| \times |y| = |x \times y|$

$|X| = |Y|$ يعني $X = Y$ أو $X = -Y$

1) لدينا: $(x+1)(3x+5) = 1$ تكافئ $3x^2 + 5x + 3x + 5 = 1$

أي $3x^2 + 8x + 4 = 0$

$$\Delta = 8^2 - 4(3)(4) = 64 - 48 = 16$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-8+4}{2(3)} = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{-8-4}{2(3)} = -2 \end{cases}$$

2) $(x+1)(3x+5) = -1$

تكافئ:

$$3x^2 + 5x + 3x + 5 + 1 = 0$$

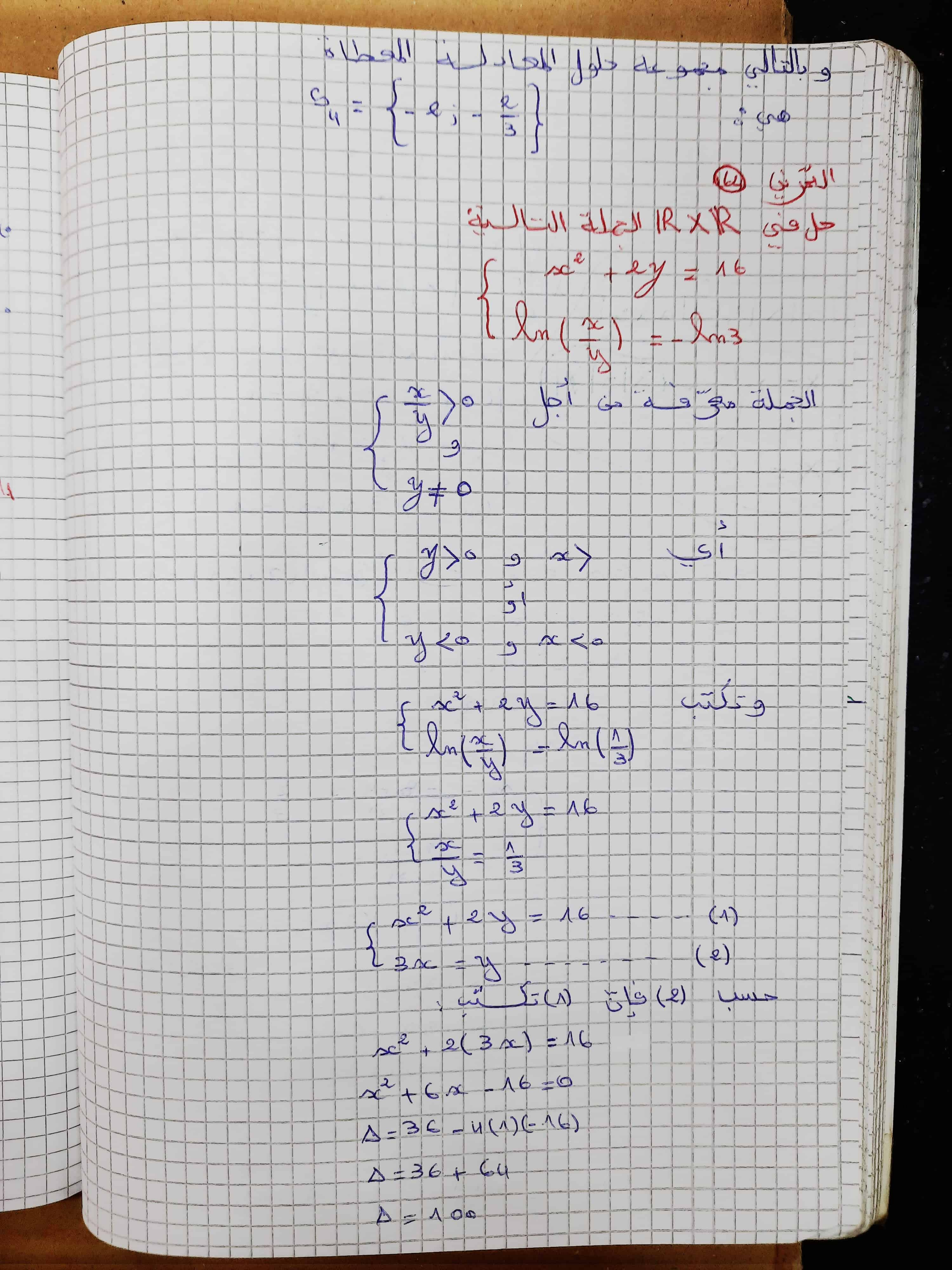
$$3x^2 + 8x + 6 = 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4(3)(6)$$

$$\Delta = 64 - 72$$

$$\Delta = -8$$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$



و بالتالي مجموعة حلول المعادلة المعطاة هي :

$$S_4 = \left\{ -2 \, ; -\frac{2}{3} \right\}$$

التمرين (14)

حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ الجملة التالية

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = -\ln 3 \end{cases}$$

الجملة معرّفة من أجل

$$\begin{cases} \frac{x}{y} > 0 \\ \text{و} \\ y \neq 0 \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} y > 0 \text{ و } x > \\ \text{أو} \\ y < 0 \text{ و } x < 0 \end{cases}$$

وتكتب

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \text{ ------- } (1) \\ 3x = y \text{ --------- } (2) \end{cases}$$

حسب (2) فإن (1) تكتب :

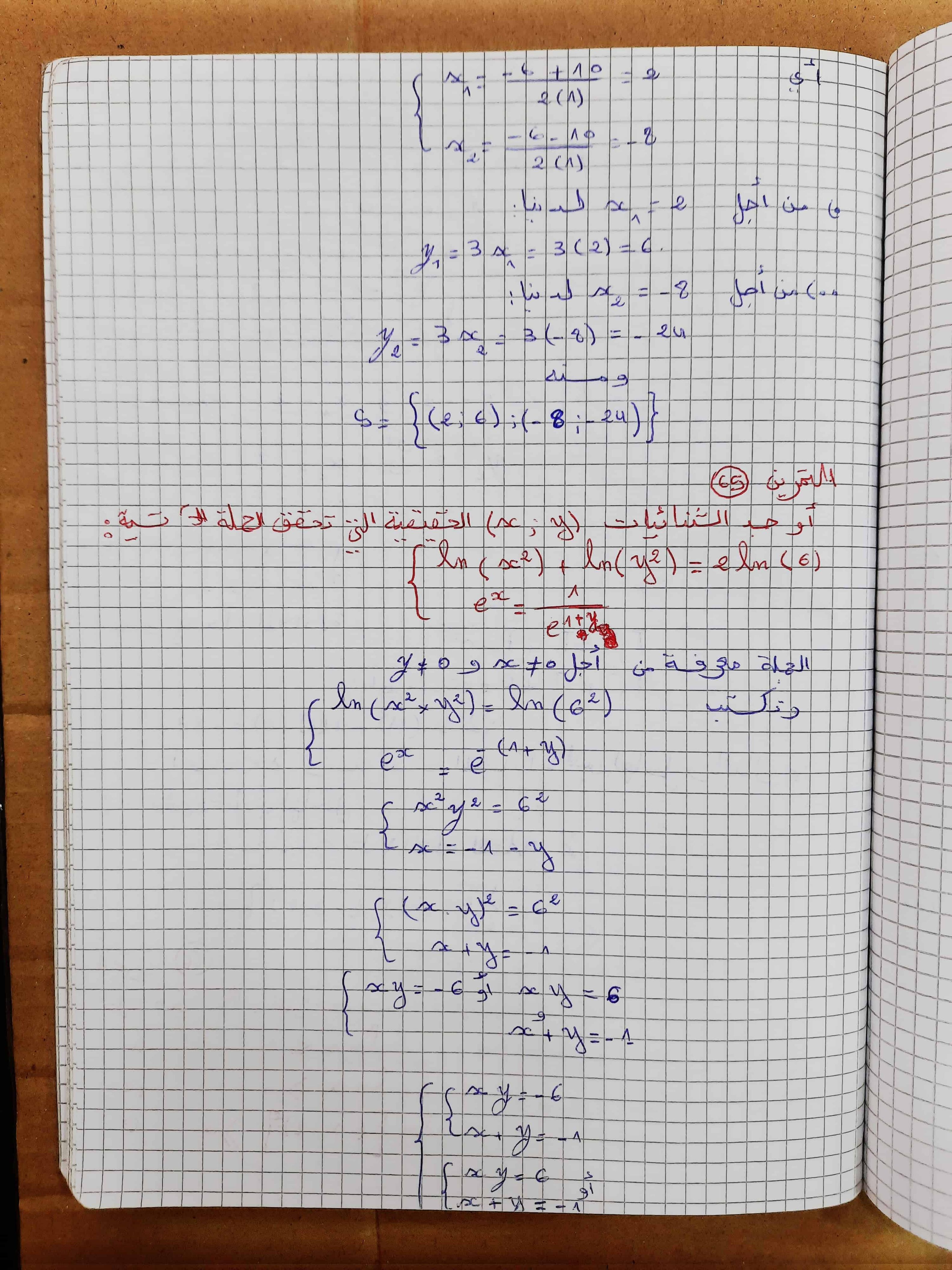
$$x^2 + 2(3x) = 16$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4(1)(-16)$$

$$\Delta = 36 + 64$$

$$\Delta = 100$$



أي

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-6+10}{2(1)} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-6-10}{2(1)} = -8 \end{cases}$$

ومن أجل $x_1 = 2$ لدينا:

$$y_1 = 3x_1 = 3(2) = 6.$$

ومن أجل $x_2 = -8$ لدينا:

$$y_2 = 3x_2 = 3(-8) = -24$$

ومنه

$$S = \{(2;6);(-8;-24)\}$$

التمرين (65)

أوجد الثنائيات $(x;y)$ الحقيقية التي تحقق الجملة الآتية:

$$\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2\ln(6) \\ e^x = \dfrac{1}{e^{1+y}} \end{cases}$$

الجملة معرفة من أجل $x \neq 0$ و $y \neq 0$

وتكتب

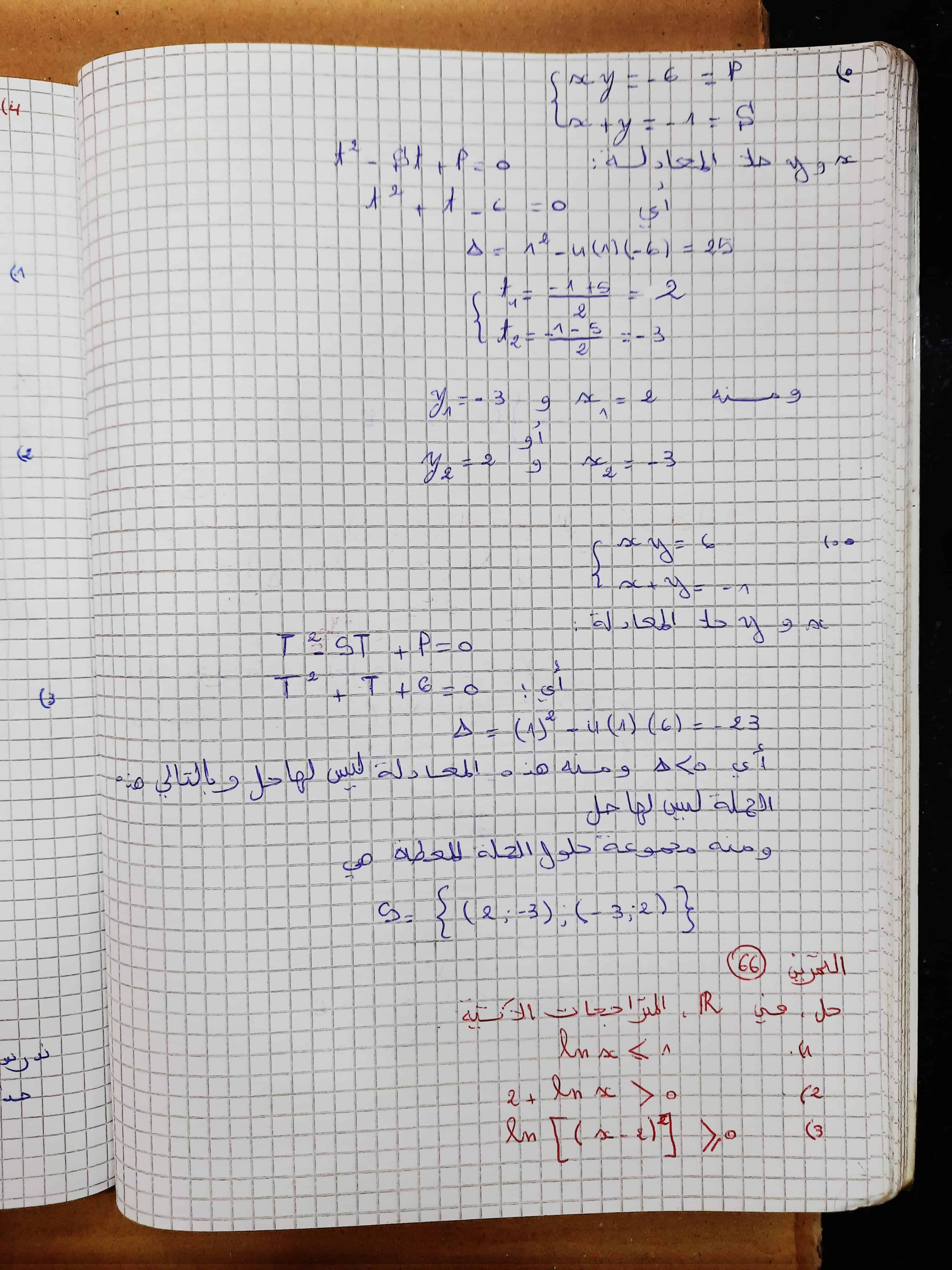
$$\begin{cases} \ln(x^2 \times y^2) = \ln(6^2) \\ e^x = e^{-(1+y)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 y^2 = 6^2 \\ x = -1 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x \cdot y)^2 = 6^2 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = -6 \text{ أو } xy = 6 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x y = -6 \\ x + y = -1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x y = 6 \\ x + y = -1 \end{cases}$$



(٥

$$\begin{cases} xy = -6 = P \\ x + y = -1 = S \end{cases}$$

x و y حلا المعادلة: $t^2 - St + P = 0$

أي: $t^2 + t - 6 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4(1)(-6) = 25$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ t_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

ومنه $x_1 = 2$ و $y_1 = -3$

أو

$x_2 = -3$ و $y_2 = 2$

(١٠

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

x و y حلا المعادلة:

$T^2 - ST + P = 0$

أي: $T^2 + T + 6 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(1)(6) = -23$

أي $\Delta < 0$ ومنه هذه المعادلة ليس لها حل وبالتالي هذه الجملة ليس لها حل

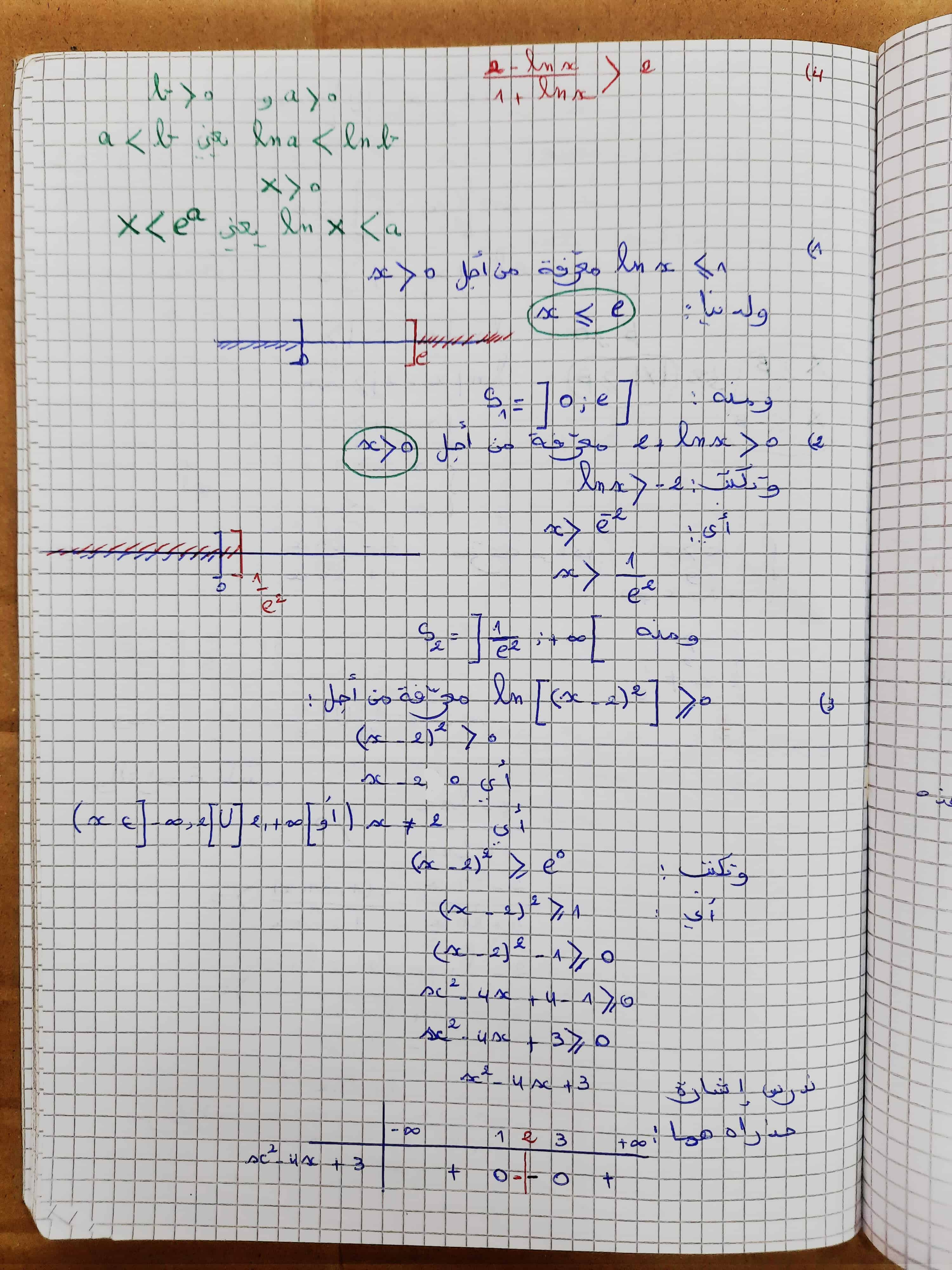
ومنه مجموعة حلول الجملة المعطاة هي

$S = \{(2;-3);(-3;2)\}$

التمرين (66)

حل، في $\mathbb{R}$، المتراجحات الآتية

1. $\ln x < 1$
2. $2 + \ln x > 0$
3. $\ln[(x-2)^2] \geq 0$



$\frac{2 - \ln x}{1 + \ln x} > e$ (4

$b > 0$ و $a > 0$

$a < b$ يعني $\ln a < \ln b$

$x > 0$

$x < e^a$ يعني $\ln x < a$

1) $\ln x \leq 1$ معرفة من أجل $x > 0$

ولدينا: $x \leq e$

ومنه: $S_1 =]0 ; e]$

2) $2 + \ln x > 0$ معرفة من أجل $x > 0$

وتكتب: $\ln x > -2$

أي: $x > e^{-2}$

$x > \frac{1}{e^2}$

ومنه $S_2 =]\frac{1}{e^2} ; +\infty[$

3) $\ln[(x-2)^2] \geq 0$ معرفة من أجل:

$(x-2)^2 > 0$

أي $x - 2 \quad 0$

أي $x \neq 2$ أو $(x \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[)$

وتكتب: $(x-2)^2 \geq e^0$

أي: $(x-2)^2 \geq 1$

$(x-2)^2 - 1 \geq 0$

$x^2 - 4x + 4 - 1 \geq 0$

$x^2 - 4x + 3 \geq 0$

ندرس إشارة $x^2 - 4x + 3$

حدداه هنا:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+	0	-	|	-	0	+	

ومنه:

$$S =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$$

2) لدينا:

$$\ln[(x-2)^2] \geq 0$$

أي:

$$2\ln|x-2| \geq 0$$

$$\ln|x-2| \geq 0$$

$$\ln|x-2| \geq \ln 1$$

$$|x-2| \geq 1$$

أي:

$$\begin{cases} x-2 \geq 1 \\ x-2 \leq -1 \end{cases}$$

$\beta \geq 0$

$|X| \geq \beta$ يعني $X \geq \beta$ أو $X \leq -\beta$

4) $\dfrac{2-\ln x}{1+\ln x}$ معرفة من أجل

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1+\ln x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{e} \end{cases}$$

ومنه: $x \in]0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[$

والمتراجحة تكتب

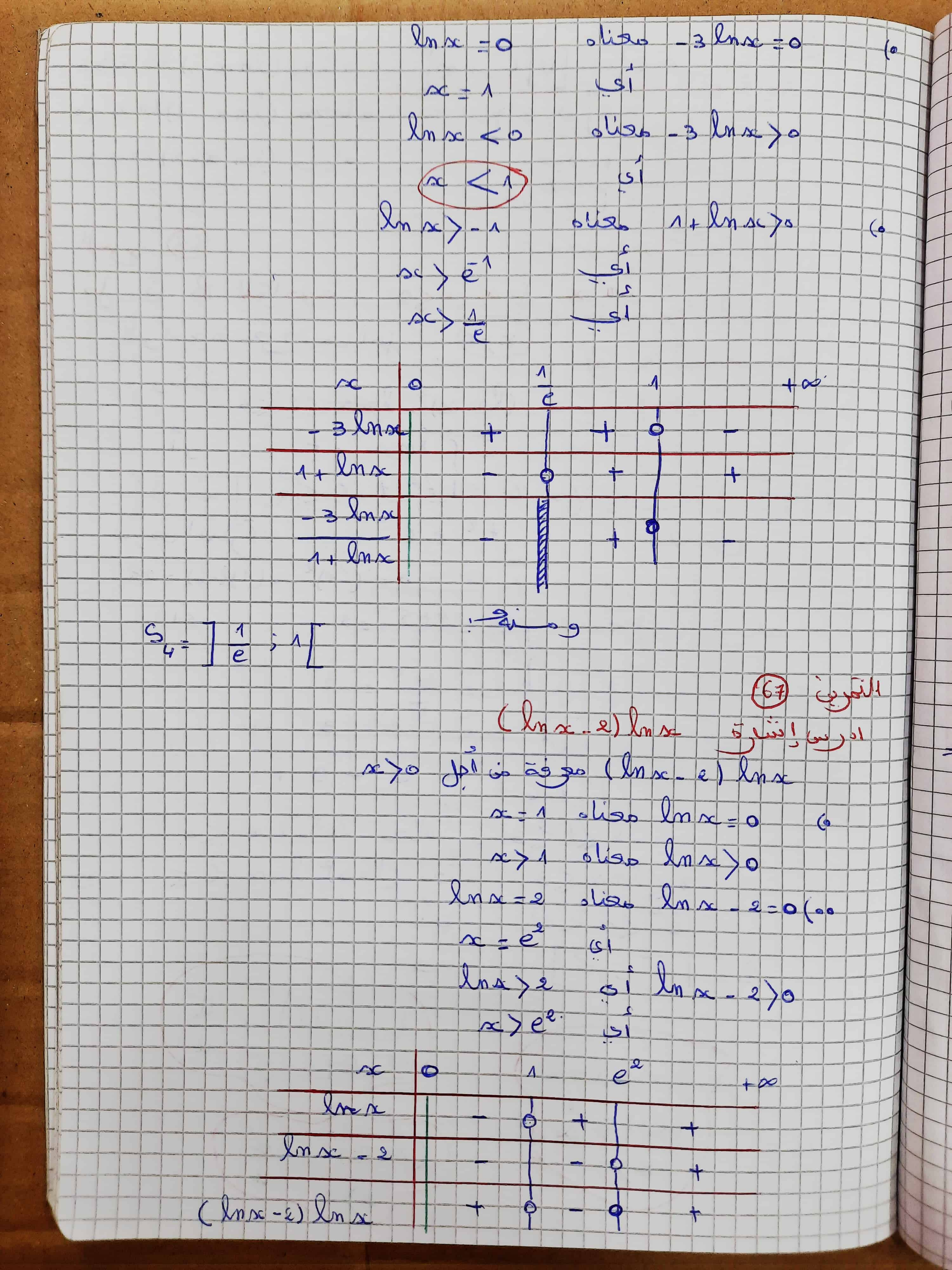
$$\frac{2-\ln x}{1+\ln x} - 2 > 0$$

$$\frac{2-\ln x}{1+\ln x} - \frac{2(1+\ln x)}{1+\ln x} > 0$$

$$\frac{2-\ln x - 2 - 2\ln x}{1+\ln x} > 0$$

$$\frac{-3\ln x}{1+\ln x} > 0$$

ندرس إشارة $\dfrac{-3\ln x}{1+\ln x}$



٤) $-3\ln x = 0$ معناه $\ln x = 0$

أي $x = 1$

$-3\ln x > 0$ معناه $\ln x < 0$

أي $x < 1$

٥) $1+\ln x > 0$ معناه $\ln x > -1$

أي $x > e^{-1}$

أي $x > \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$-3\ln x$	||	$+$	|	$+$	0	$-$	
$1+\ln x$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-3\ln x}{1+\ln x}$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

ومنه:

$S_4 =]\frac{1}{e};1[$

التمرين 67

ادرس إشارة $(\ln x - 2)\ln x$

$(\ln x - 2)\ln x$ معرفة من أجل $x>0$

١) $\ln x = 0$ معناه $x = 1$

$\ln x > 0$ معناه $x > 1$

٢) $\ln x - 2 = 0$ معناه $\ln x = 2$

أي $x = e^2$

$\ln x - 2 > 0$ أي $\ln x > 2$

أي $x > e^2$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\ln x - 2$	||	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(\ln x - 2)\ln x$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

معناه $(\ln x - 2)\ln x > 0$ ؛ $x \in]0;1[\cup]e^2;+\infty[$

معناه $(\ln x - 2)\ln x < 0$ ؛ $x \in]0;e^2[$

معناه $(\ln x - 2)\ln x = 0$ ؛ $\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = e^2 \end{cases}$

التمرين (62)

حل في IR المتراجحة $\ln^2 x - \ln x - 6 \leq 0$

المتراجحة معرفة من أجل $x > 0$

وتكتب
$$(\ln x)^2 - \ln x - 6 \leq 0$$

أي $\begin{cases} \ln x = t \\ t^2 - t - 6 \leq 0 \end{cases}$

ندرس إشارة $t^2 - t - 6$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25$$

أي
$$\begin{cases} t_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \\ t_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

t	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$t^2 - t - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

معناه $t^2 - t - 6 \leq 0$ ؛ $-2 \leq t \leq 3$

ومنه $(\ln x)^2 - \ln x - 6 \leq 0$ معناه $-2 \leq \ln x \leq 3$

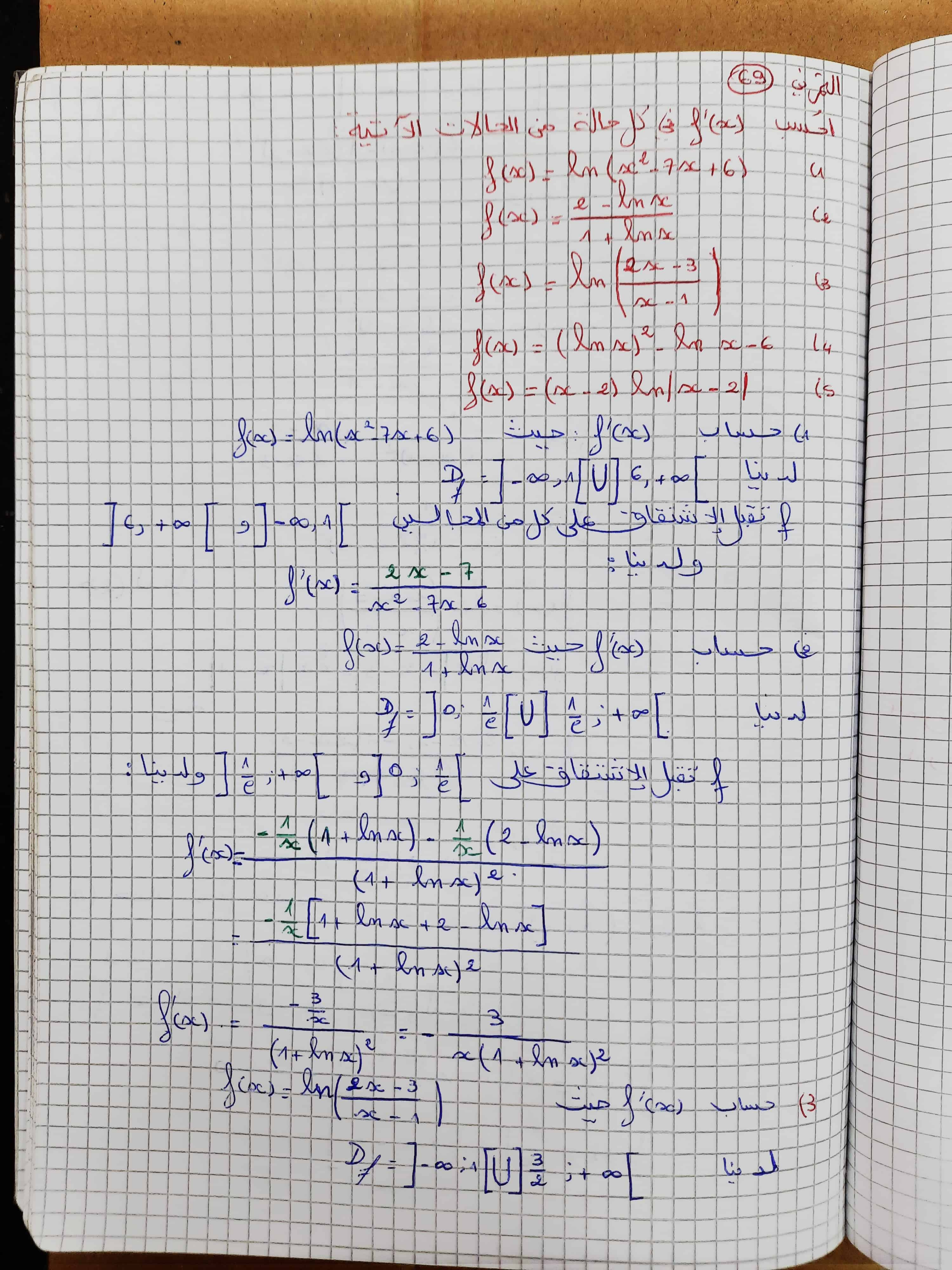
أي $e^{-2} \leq x \leq e^3$

ومنه $S = [e^{-2} ; e^3]$

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u} \quad \text{مع } u \neq 0$$

$$f(x) = \ln x$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$x > 0$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$
$$u > 0$$



التمرين 69

أحسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x) = \ln(x^2 - 7x + 6)$

2) $f(x) = \dfrac{2 - \ln x}{1 + \ln x}$

3) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x - 3}{x - 1}\right)$

4) $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x - 6$

5) $f(x) = (x - 2)\ln|x - 2|$

1) حساب $f'(x)$ حيث: $f(x) = \ln(x^2 - 7x + 6)$

لدينا $D_f =]-\infty, 1[\cup]6, +\infty[$

f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty, 1[$ و $]6, +\infty[$

ولدينا:

$$f'(x) = \frac{2x - 7}{x^2 - 7x + 6}$$

2) حساب $f'(x)$ حيث $f(x) = \dfrac{2 - \ln x}{1 + \ln x}$

لدينا $D_f =]0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[$

f تقبل الاشتقاق على $]0; \frac{1}{e}[$ و $]\frac{1}{e}; +\infty[$ ولدينا:

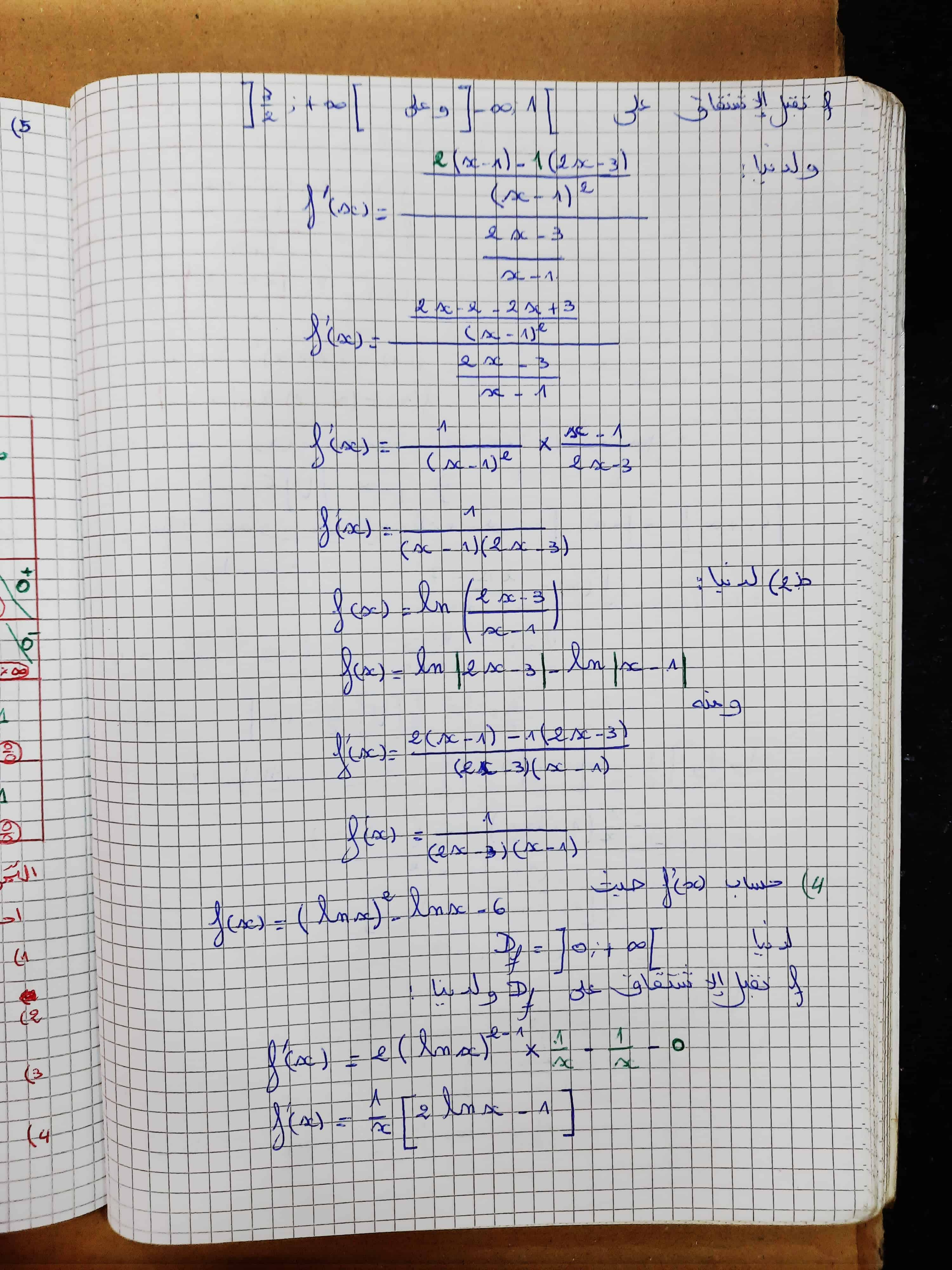
$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}(1 + \ln x) - \frac{1}{x}(2 - \ln x)}{(1 + \ln x)^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x}\left[1 + \ln x + 2 - \ln x\right]}{(1 + \ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{3}{x}}{(1 + \ln x)^2} = -\frac{3}{x(1 + \ln x)^2}$$

3) حساب $f'(x)$ حيث $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x - 3}{x - 1}\right)$

لدينا $D_f =]-\infty; 1[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$



f تقبل الاشتقاق على $]-\infty;1[$ وعلى $]\frac{3}{2};+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{\frac{2(x-1)-1(2x-3)}{(x-1)^2}}{\frac{2x-3}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x-2-2x+3}{(x-1)^2}}{\frac{2x-3}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{2x-3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)(2x-3)}$$

طـ2) لدينا:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)$$

$$f(x) = \ln|2x-3| - \ln|x-1|$$

ومنه

$$f'(x) = \frac{2(x-1)-1(2x-3)}{(2x-3)(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(2x-3)(x-1)}$$

4) حساب $f'(x)$ حيث

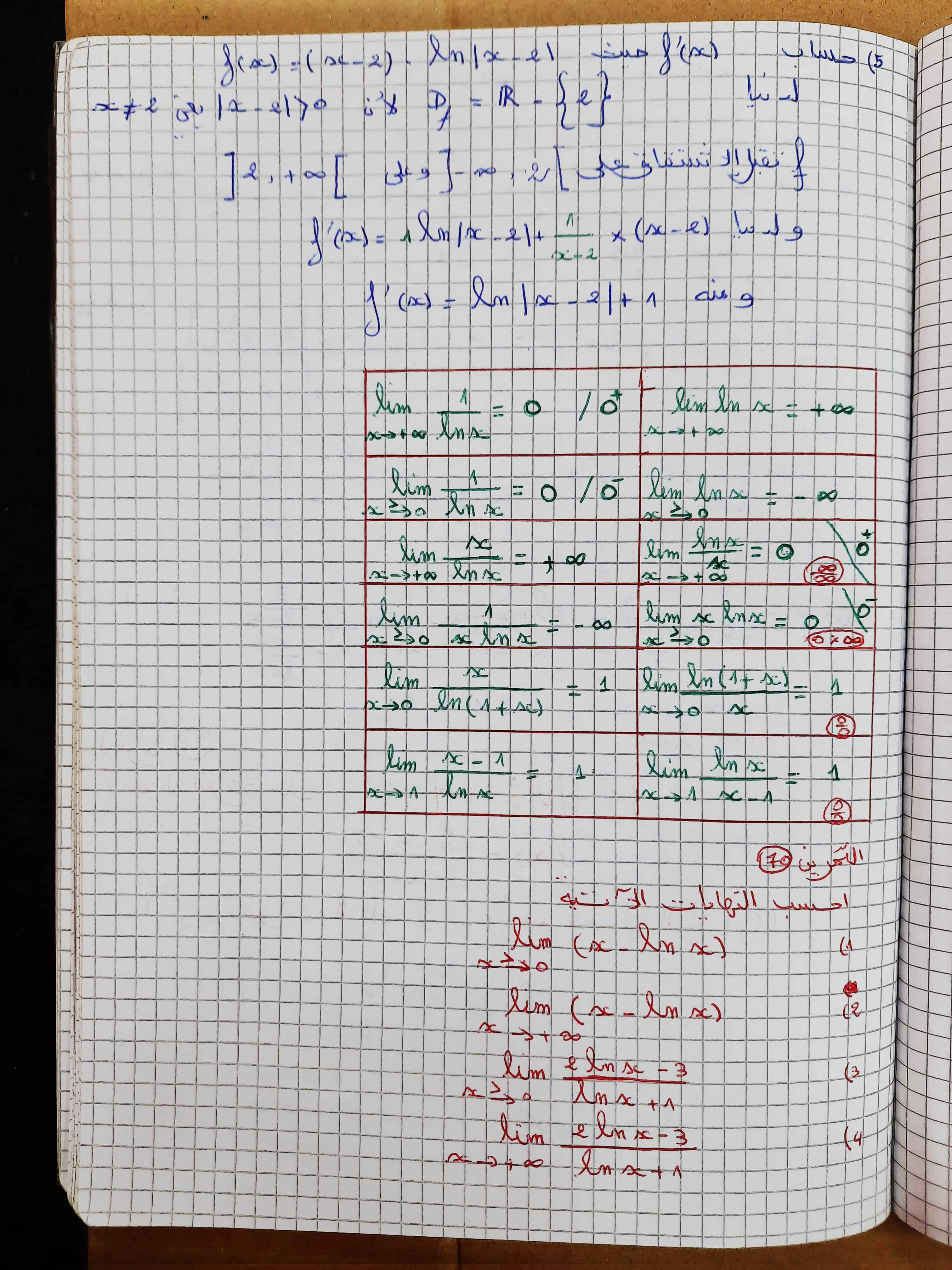
$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x - 6$$

لدينا $D_f =]0;+\infty[$

f تقبل الاشتقاق على D_f ولدينا:

$$f'(x) = 2(\ln x)^{2-1} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\left[2\ln x - 1\right]$$



5) حساب $f'(x)$ حيث $f(x) = (x-2) \cdot \ln|x-2|$

لدينا $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ لأن $|x-2| > 0$ يعني $x \neq 2$

f تقبل الاشتقاق على $]-\infty, 2[$ وعلى $]2, +\infty[$

ولدينا $f'(x) = 1 \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} \times (x-2)$

ومنه $f'(x) = \ln|x-2| + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad / 0^+$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad / 0^-$	$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ 0^+
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$	$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$ $(0 \times \infty)$ 0^-
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\left(\frac{0}{0}\right)$
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

التمرين (17)

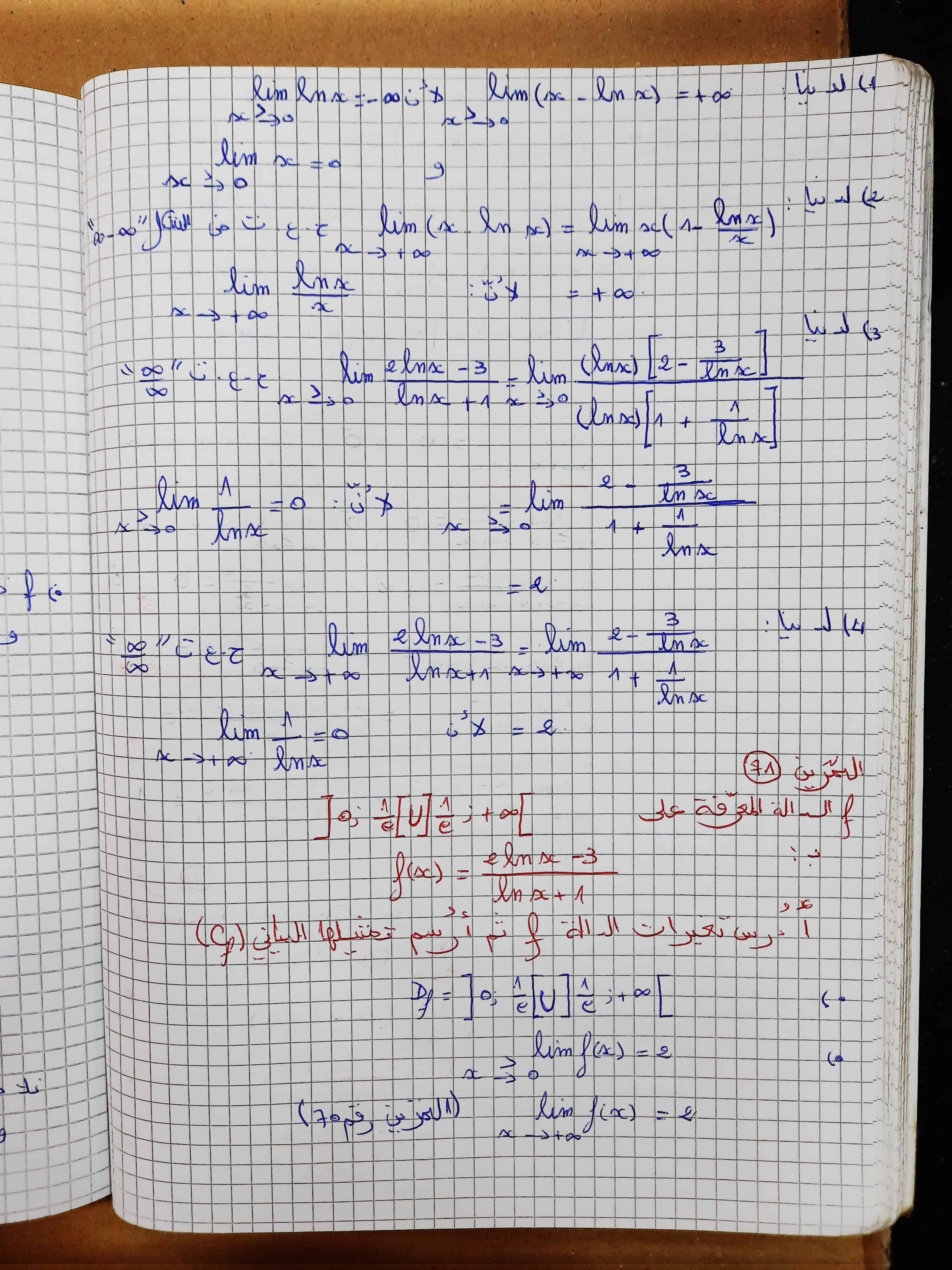
احسب النهايات الآتية

1) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x - \ln x)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$

3) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2\ln x - 3}{\ln x + 1}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\ln x - 3}{\ln x + 1}$



1) لدينا: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} (x - \ln x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x = 0$

2) لدينا: $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ ح.ع.ت من الشكل "$\infty - \infty$"

$= +\infty$ لأن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$

3) لدينا: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2\ln x - 3}{\ln x + 1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{(\ln x)\left[2 - \frac{3}{\ln x}\right]}{(\ln x)\left[1 + \frac{1}{\ln x}\right]}$ ح.ع.ت "$\frac{\infty}{\infty}$"

$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2 - \frac{3}{\ln x}}{1 + \frac{1}{\ln x}}$ لأن: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\ln x} = 0$

$= 2$

4) لدينا: $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln x - 3}{\ln x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{3}{\ln x}}{1 + \frac{1}{\ln x}}$ ح.ع.ت "$\frac{\infty}{\infty}$"

$= 2$ لأن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

التمرين (71)

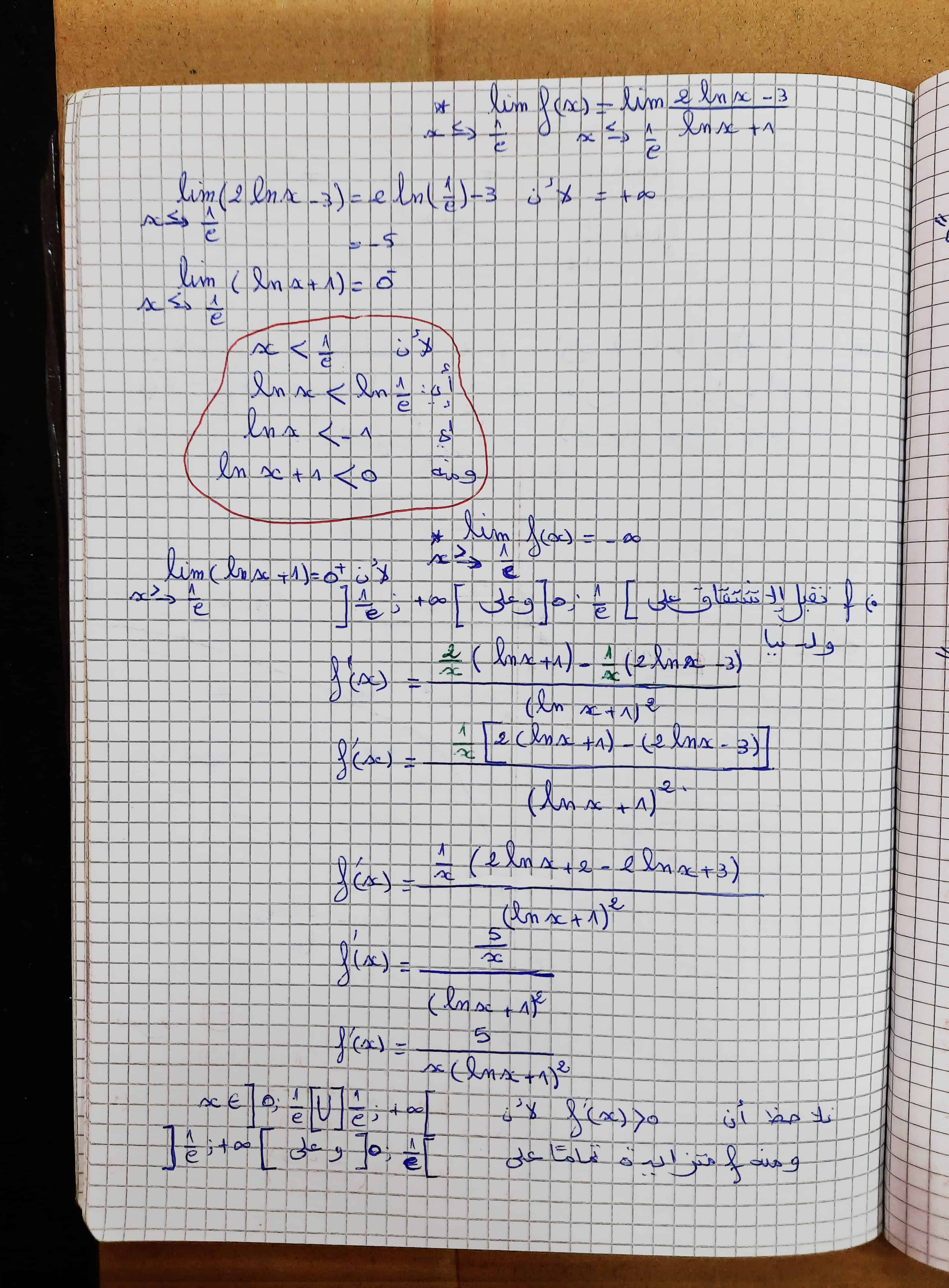
f الدالة المعرّفة على $\left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2\ln x - 3}{\ln x + 1}$$

أ) أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم تمثيلها البياني (C_f)

- $D_f = \left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$
- $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ (التمرين رقم 70)



$$* \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{e}} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{e}} \frac{2\ln x - 3}{\ln x + 1}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{e}} (2\ln x - 3) = 2\ln\left(\frac{1}{e}\right) - 3 = -5$$ لدينا $= +\infty$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{e}} (\ln x + 1) = 0^-$$

لدينا $x < \frac{1}{e}$

أي: $\ln x < \ln \frac{1}{e}$

أي $\ln x < -1$

ومنه $\ln x + 1 < 0$

$$* \lim_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{e}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{e}} (\ln x + 1) = 0^+$$ لدينا

f تقبل الاشتقاق على $]0; \frac{1}{e}[$ وعلى $]\frac{1}{e}; +\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(\ln x + 1) - \frac{1}{x}(2\ln x - 3)}{(\ln x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\left[2(\ln x + 1) - (2\ln x - 3)\right]}{(\ln x + 1)^2}$$

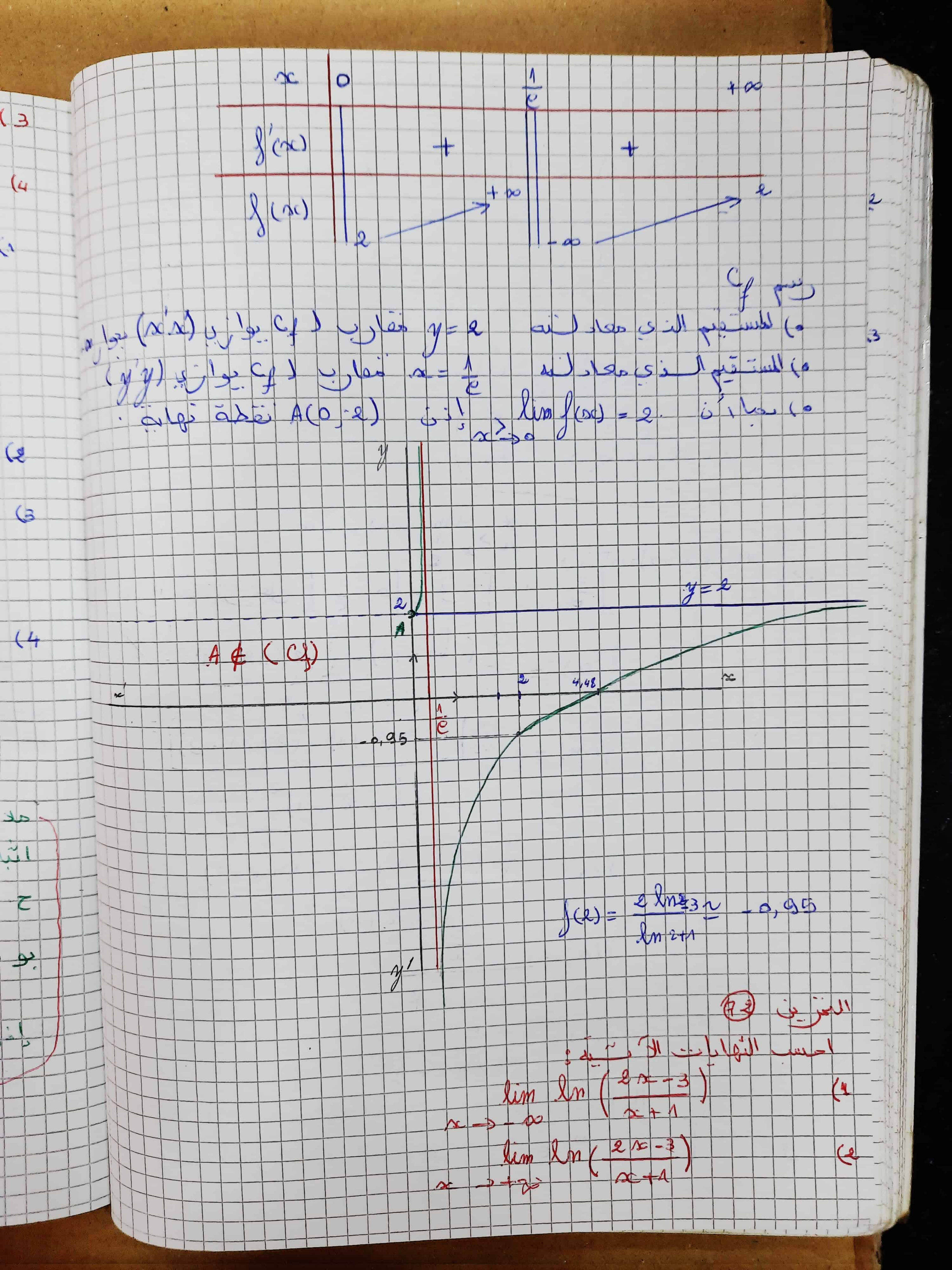
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(2\ln x + 2 - 2\ln x + 3)}{(\ln x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{5}{x}}{(\ln x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{x(\ln x + 1)^2}$$

نلاحظ أن $f'(x) > 0$ لأن $x \in]0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[$

ومنه f متزايدة تماما على $]0; \frac{1}{e}[$ وعلى $]\frac{1}{e}; +\infty[$



x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 2	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	2

نرسم C_f

○) المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب لـ C_f يوازي $(x'x)$ بجوار ...

○) المستقيم الذي معادلته $x=\frac{1}{e}$ مقارب لـ C_f يوازي $(y'y)$

○) بما أن $\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = 2$ إذن $A(0;2)$ نقطة نهاية.

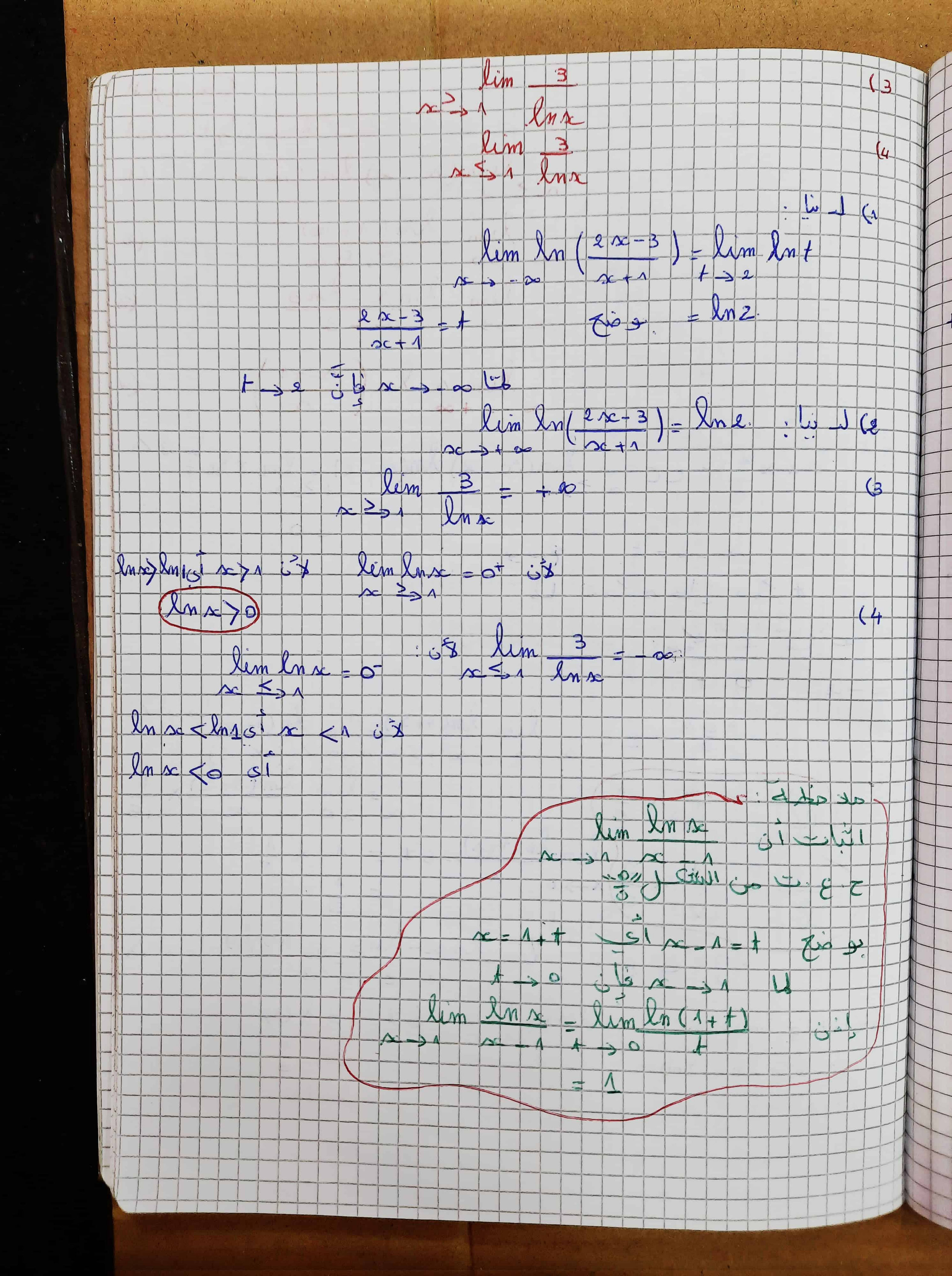
$f(2) = \frac{2\ln 2 - 3}{\ln 2 + 1} \simeq -0,95$

التمرين (72)

أحسب النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)$

2) $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)$



3) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{3}{\ln x}$

4) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{3}{\ln x}$

1) لدينا:

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) = \lim_{t \to 2} \ln t = \ln 2$$

بوضع $\frac{2x-3}{x+1} = t$

لما $x \to -\infty$ فإن $t \to 2$

2) لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) = \ln 2$$

3) $$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{3}{\ln x} = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \ln x = 0^+$ لأن $x > 1$ أي $\ln x > \ln 1$

$\ln x > 0$

4) $$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{3}{\ln x} = -\infty$$ لأن: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \ln x = 0^-$

لأن $x < 1$ أي $\ln x < \ln 1$

أي $\ln x < 0$

ملاحظة: اثبات أن $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

ح ع ت من الشكل "$\frac{0}{0}$"

بوضع $x - 1 = t$ أي $x = 1 + t$

لما $x \to 1$ فإن $t \to 0$

إذن $$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

التمرين (73)

أحسب النهايات الآتية

1) $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} (x-2)\ln(x-2)$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2+5x}$

3) $\lim_{x \to 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x-3}$

4) $\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

1/ لدينا $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} (x-2)\ln(x-2) = \lim_{t \overset{>}{\to} 0} t\ln t$ ح ع ت "$0 \times \infty$"

$= 0$

بوضع $x-2=t$

لما $x \overset{>}{\to} 2$ فإن $t \overset{>}{\to} 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

2/ لدينا $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2+5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x(x+5)}$ ح ع ت "$\frac{0}{0}$"

$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{x+5}$

$\frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$

$\frac{a}{b \cdot c} = \frac{1}{b} \times \frac{a}{c}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ لأن $= 1 \times \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{5}$

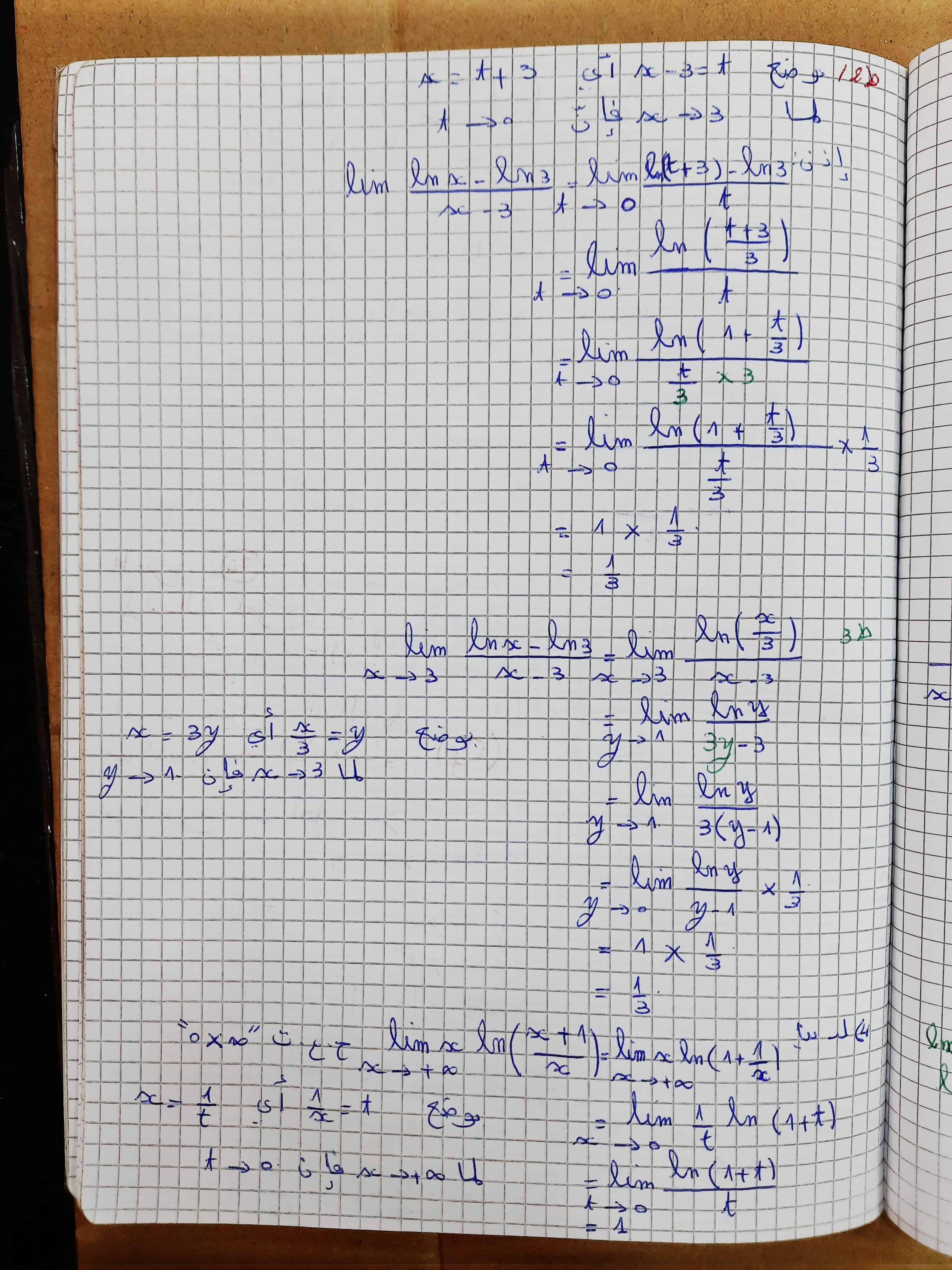
3/ لدينا $\lim_{x \to 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x-3} = \lim_{x \overset{>}{\to} 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ح ع ت "$\frac{0}{0}$"

$f(x) = \ln x$ لأن $= f'(3)$

$= \frac{1}{3}$

$\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$

$\ln(a-b) \neq \ln a - \ln b$



12) نضع $x - 3 = t$ أي $x = t + 3$

لما $x \to 3$ فإن $t \to 0$

إذن

$$\lim \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(t+3) - \ln 3}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\ln\left(\frac{t+3}{3}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{3}\right)}{\frac{t}{3} \times 3}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{3}\right)}{\frac{t}{3}} \times \frac{1}{3}$$

$$= 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

3)

$$\lim_{x \to 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{x - 3}$$

نضع $\frac{x}{3} = y$ أي $x = 3y$

لما $x \to 3$ فإن $y \to 1$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{\ln y}{3y - 3}$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{\ln y}{3(y - 1)}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\ln y}{y - 1} \times \frac{1}{3}$$

$$= 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

4) لدينا ح ت ع "$0 \times \infty$"

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

نضع $\frac{1}{x} = t$ أي $x = \frac{1}{t}$

لما $x \to +\infty$ فإن $t \to 0$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{t} \ln(1 + t)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{u \to 1} \frac{1}{u-1} \cdot \ln u$$

$$= \lim_{u \to 1} \frac{\ln u}{u-1}$$

$$= 1$$

نضع $\frac{x+1}{x} = u$

لما $x \to +\infty$ فإن $u \to 1$

نكتب: $\frac{x+1}{x} = u$

$x + 1 = u \times x$

$x - u \times x = -1$

$(1 - u)\, x = -1$

$x = -\frac{1}{1-u}$

$x = \frac{1}{u-1}$

التمرين (74)

f الدالة المعرفة بـ:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{\ln x}$$

ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم تمثيلها البياني (C_f)

1) f معرفة من أجل $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$ و

أي:

$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

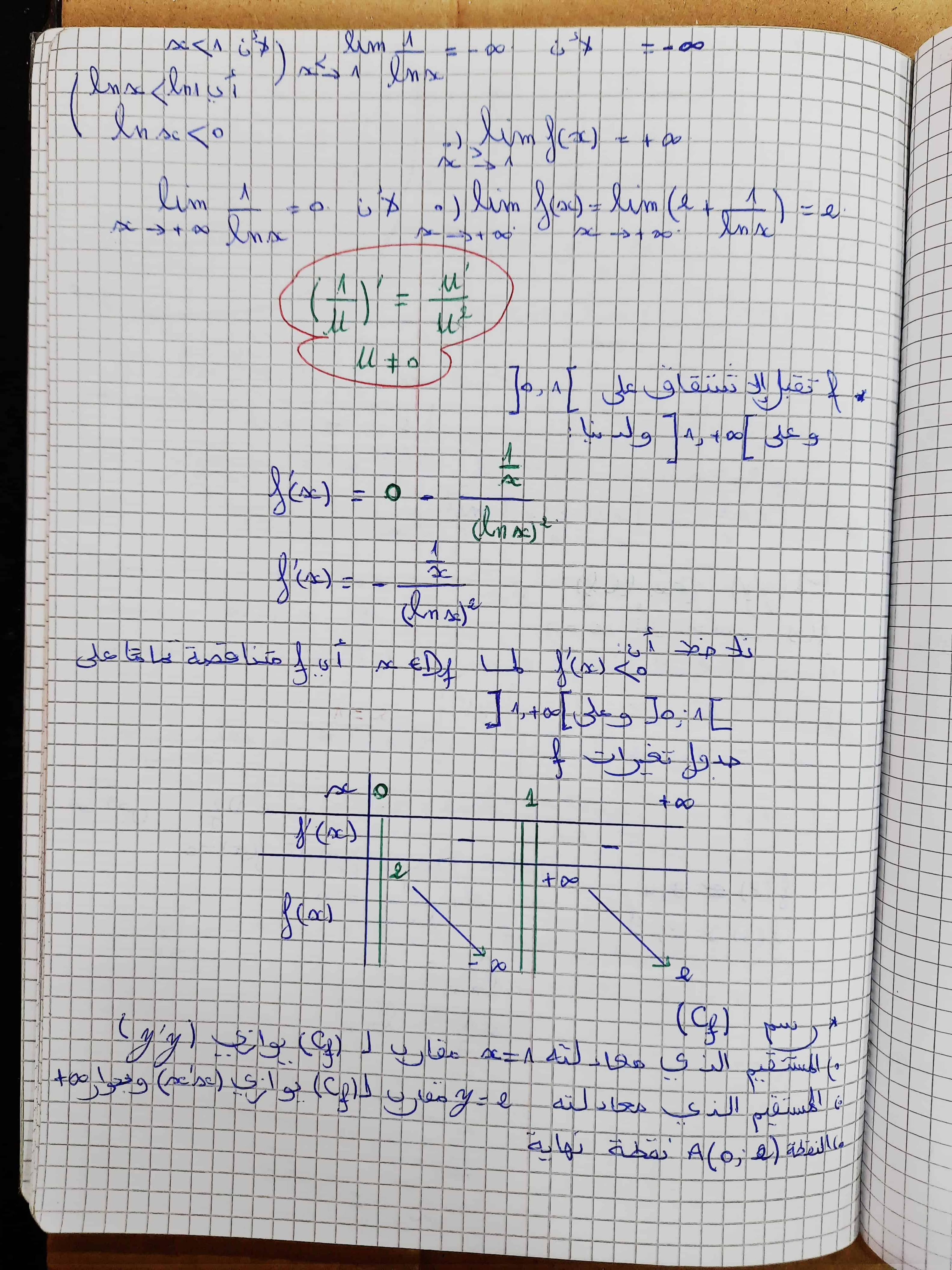
ومنه $D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

2)

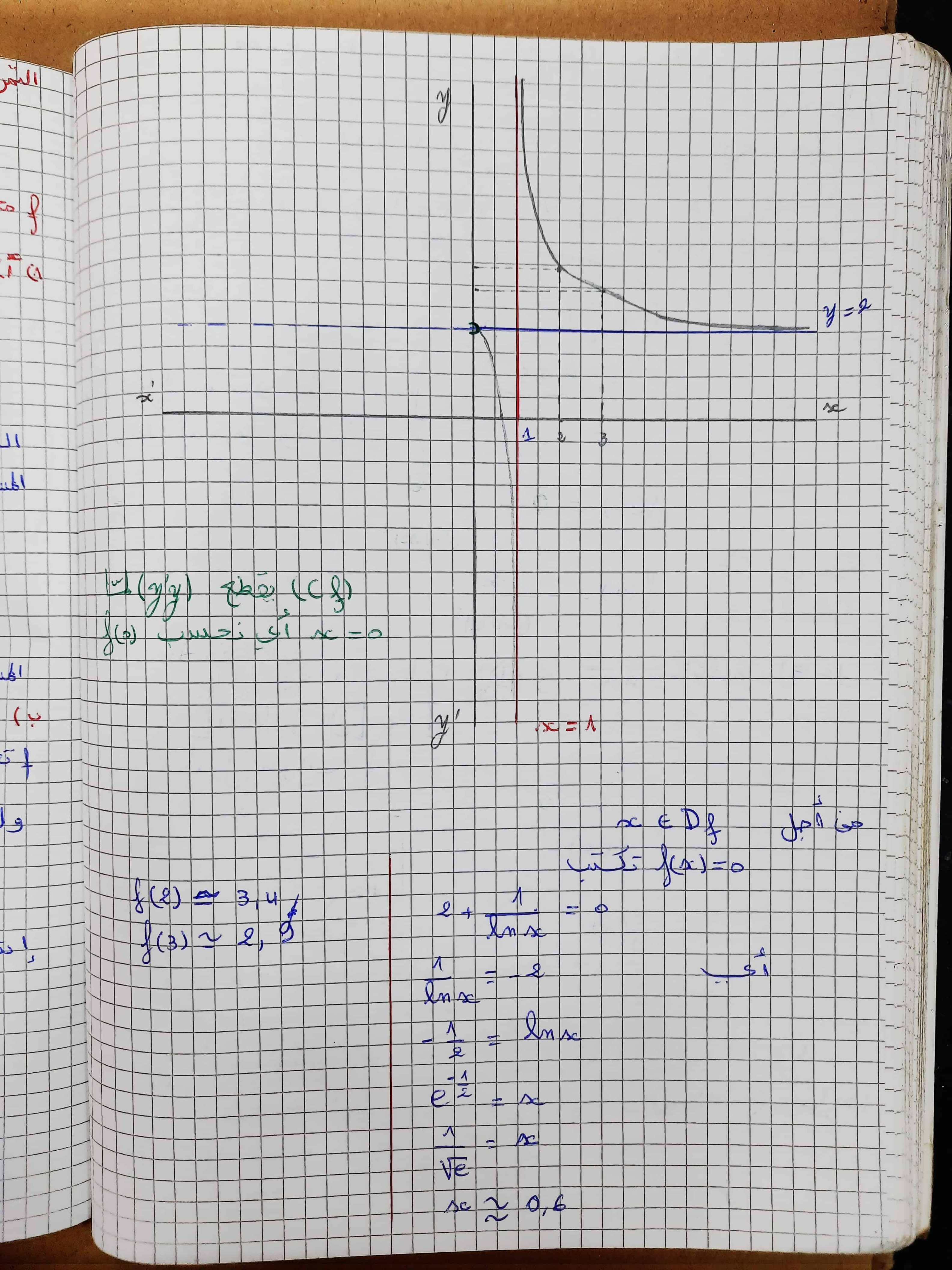
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(2 + \frac{1}{\ln x}\right)$$

$$= 2$$ لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\ln x} = 0$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \left(2 + \frac{1}{\ln x}\right)$$



x<1 لأن) lim x→1< 1/ln x = -∞ لأن = -∞
(ln x < ln1 أي ln x < 0)
lim x→1> f(x) = +∞
lim x→+∞ 1/ln x = 0 لأن . lim x→+∞ f(x) = lim x→+∞ (e + 1/ln x) = e
(1/u)' = u'/u²
u ≠ 0
* f تقبل الاشتقاق على]0,1[وعلى]1,+∞[ولدينا:
f'(x) = 0 - (1/x)/(ln x)²
f'(x) = - (1/x)/(ln x)²
نلاحظ أن f'(x) < 0 لما x ∈ Df أي أن f متناقصة تماما على]0;1[وعلى]1,+∞[
جدول تغيرات f
x 0 1 +∞
f'(x) - -
f(x) e -∞ +∞ e
* رسم (Cf)
○ المستقيم الذي معادلته x=1 مقارب لـ (Cf) يوازي (y'y)
○ المستقيم الذي معادلته y=e مقارب لـ (Cf) يوازي (x'x) وبجوار +∞
○ النقطة A(0;e) نقطة نهاية



لما (y'y) يقطع (Cf)

$x = 0$ أي نحسب $f(0)$

$f(2) \simeq 3,4$

$f(3) \simeq 2,9$

من أجل $x \in D_f$

تكتب $f(x) = 0$

أي

$$2 + \frac{1}{\ln x} = 0$$

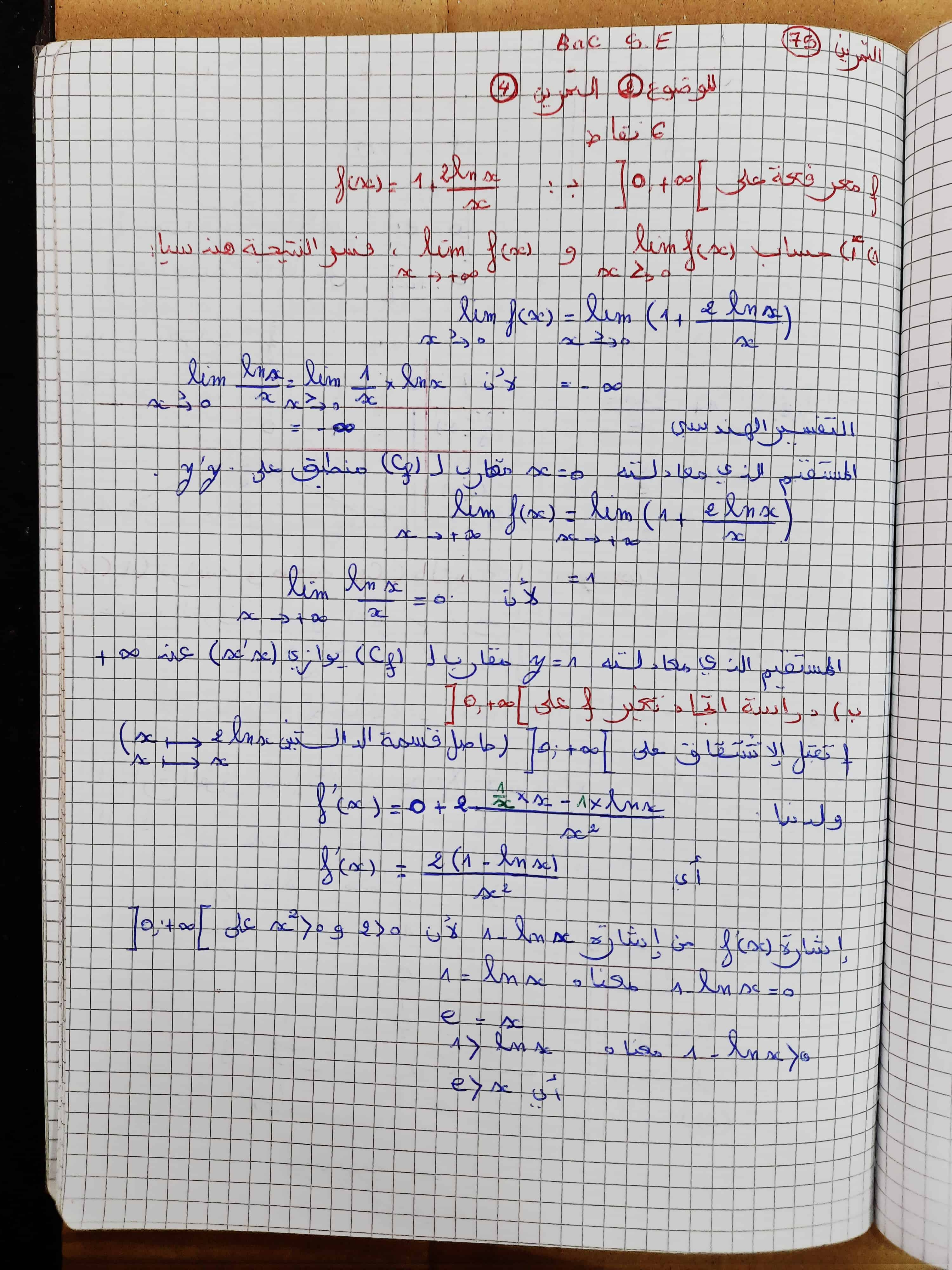
$$\frac{1}{\ln x} = -2$$

$$-\frac{1}{2} = \ln x$$

$$e^{-\frac{1}{2}} = x$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = x$$

$$x \simeq 0,6$$



الموضوع ② التمرين ④

6 نقاط

f معرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$

1) أ) حساب $\lim_{x \to 0^>} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسيا:

$$\lim_{x \to 0^>} f(x) = \lim_{x \to 0^>} \left(1 + \frac{2\ln x}{x}\right) = -\infty$$

لأن $\lim_{x \to 0^>} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to 0^>} \frac{1}{x} \times \ln x = -\infty$

التفسير الهندسي

المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب لـ (C_f) منطبق على $y'y$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2\ln x}{x}\right) = 1$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـ (C_f) يوازي $(x'x)$ عند $+\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير f على $]0,+\infty[$

f تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ (حاصل قسمة الدالتين $x \mapsto 2\ln x$ و $x \mapsto x$)

ولدينا $f'(x) = 0 + 2\frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2}$

أي $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$

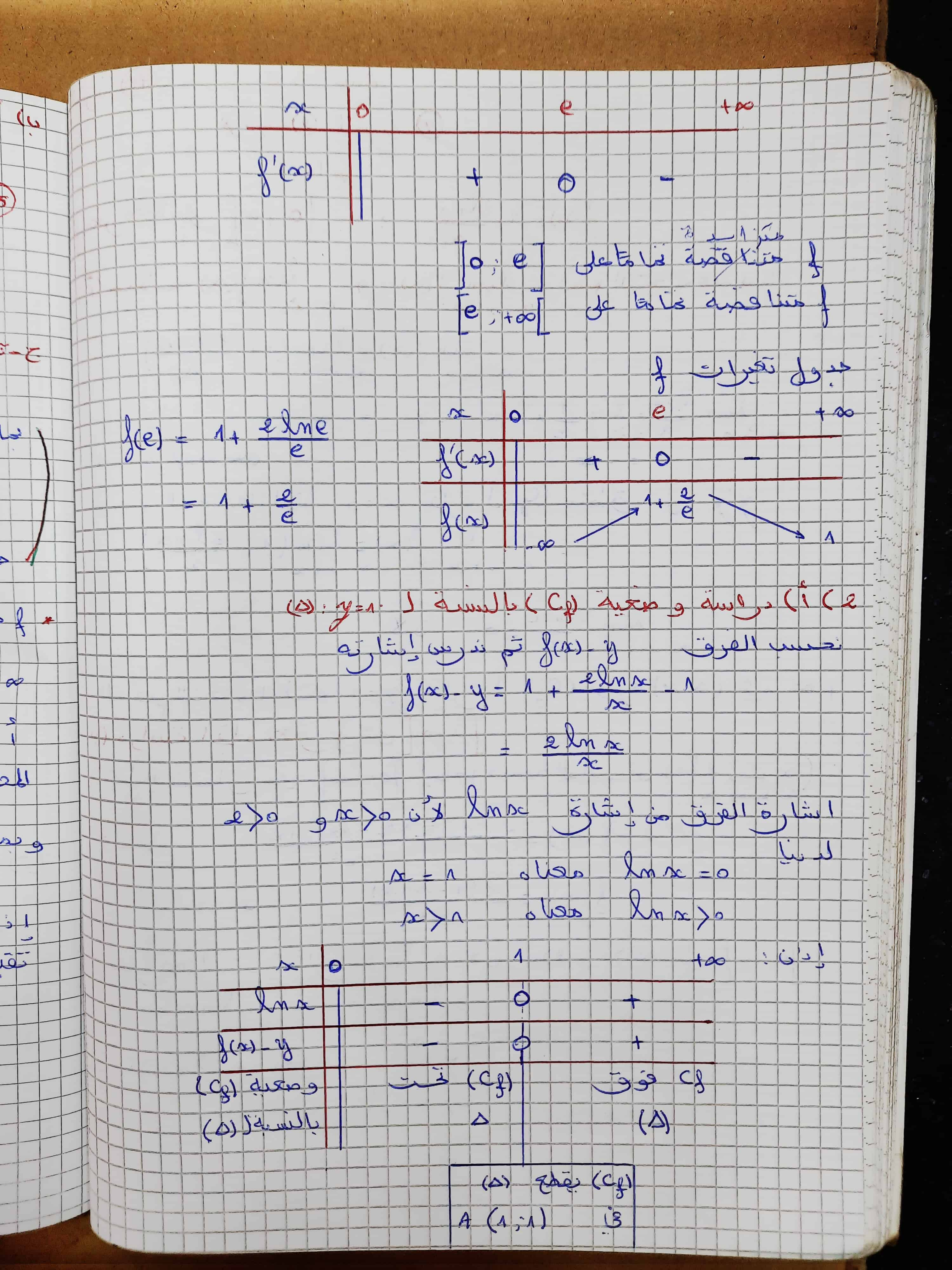
إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-\ln x$ لأن $2>0$ و $x^2>0$ على $]0;+\infty[$

$1-\ln x = 0$ معناه $1 = \ln x$

$e = x$

$1-\ln x > 0$ معناه $1 > \ln x$

أي $e > x$



x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

f متزايدة تماما على $]0;e]$

f متناقصة تماما على $[e;+\infty[$

جدول تغيرات f

$$f(e) = 1 + \frac{e\ln e}{e} = 1 + \frac{e}{e}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1+\frac{e}{e}$	↘	1

2) أ) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ $(\Delta): y=1$

نحسب الفرق $f(x)-y$ ثم ندرس إشارته

$$f(x) - y = 1 + \frac{e\ln x}{x} - 1 = \frac{e\ln x}{x}$$

إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ لأن $0<x$ و $e>0$

لدينا

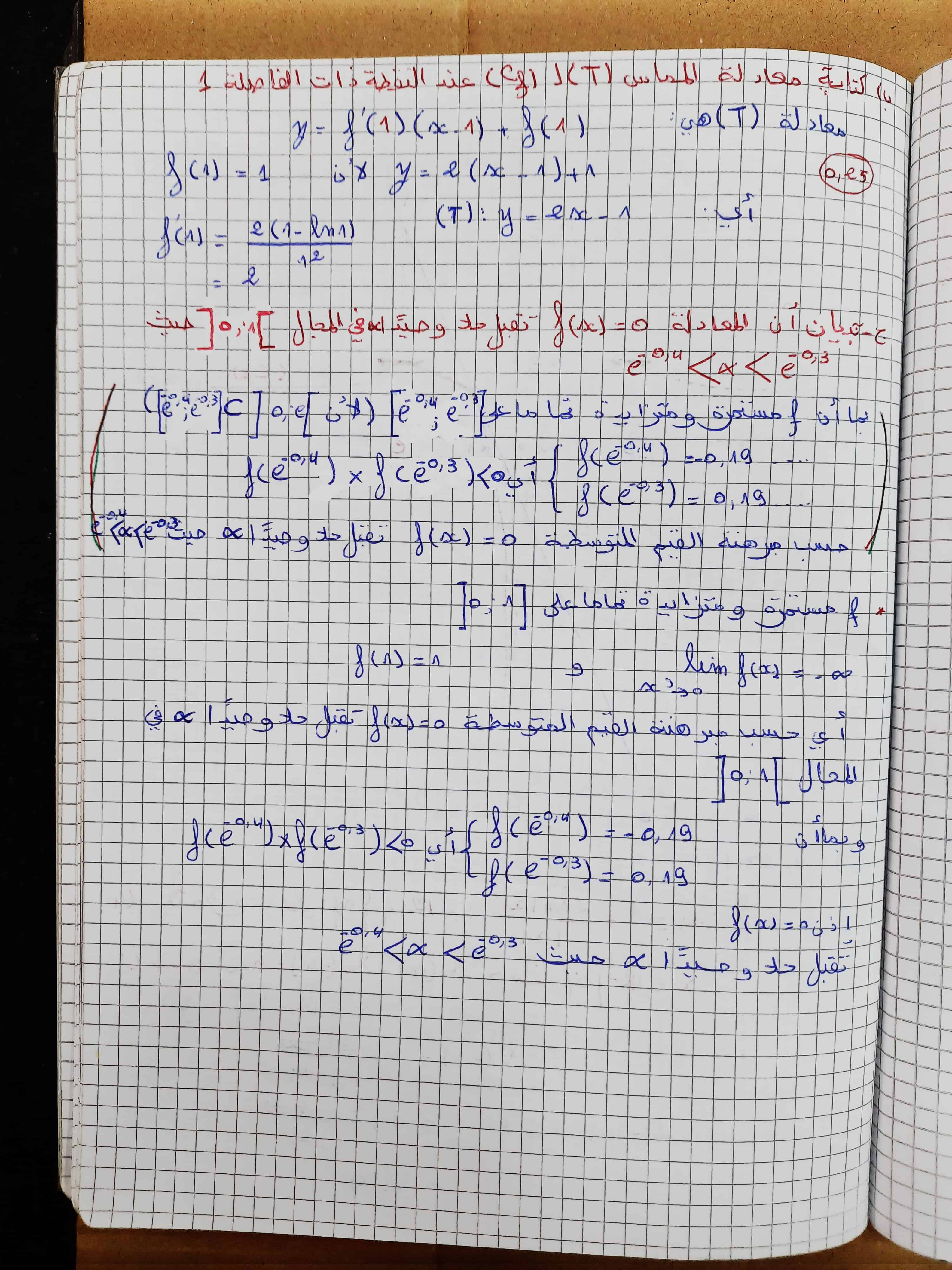
$\ln x = 0$ معناه $x = 1$

$\ln x > 0$ معناه $x > 1$

إذن:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)	‖	(C_f) تحت Δ		C_f فوق (Δ)	

(C_f) يقطع (Δ) في $A(1;1)$



ب) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

معادلة (T) هي: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = 1$ ، و $y = e(x-1)+1$ (0,25)

$$f'(1) = \frac{e(1-\ln 1)}{1^2} = e$$

أي: $(T): y = ex - 1$

ج- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;1[$ حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$

بما أن f مستمرة ومتزايدة تماما على $[e^{-0,4}; e^{-0,3}]$ (لأن $[e^{-0,4}; e^{-0,3}] \subset]0;e[$)

$$\begin{cases} f(e^{-0,4}) = -0,19 \ldots \\ f(e^{-0,3}) = 0,19 \ldots \end{cases}$$ أي $f(e^{-0,4}) \times f(e^{-0,3}) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$

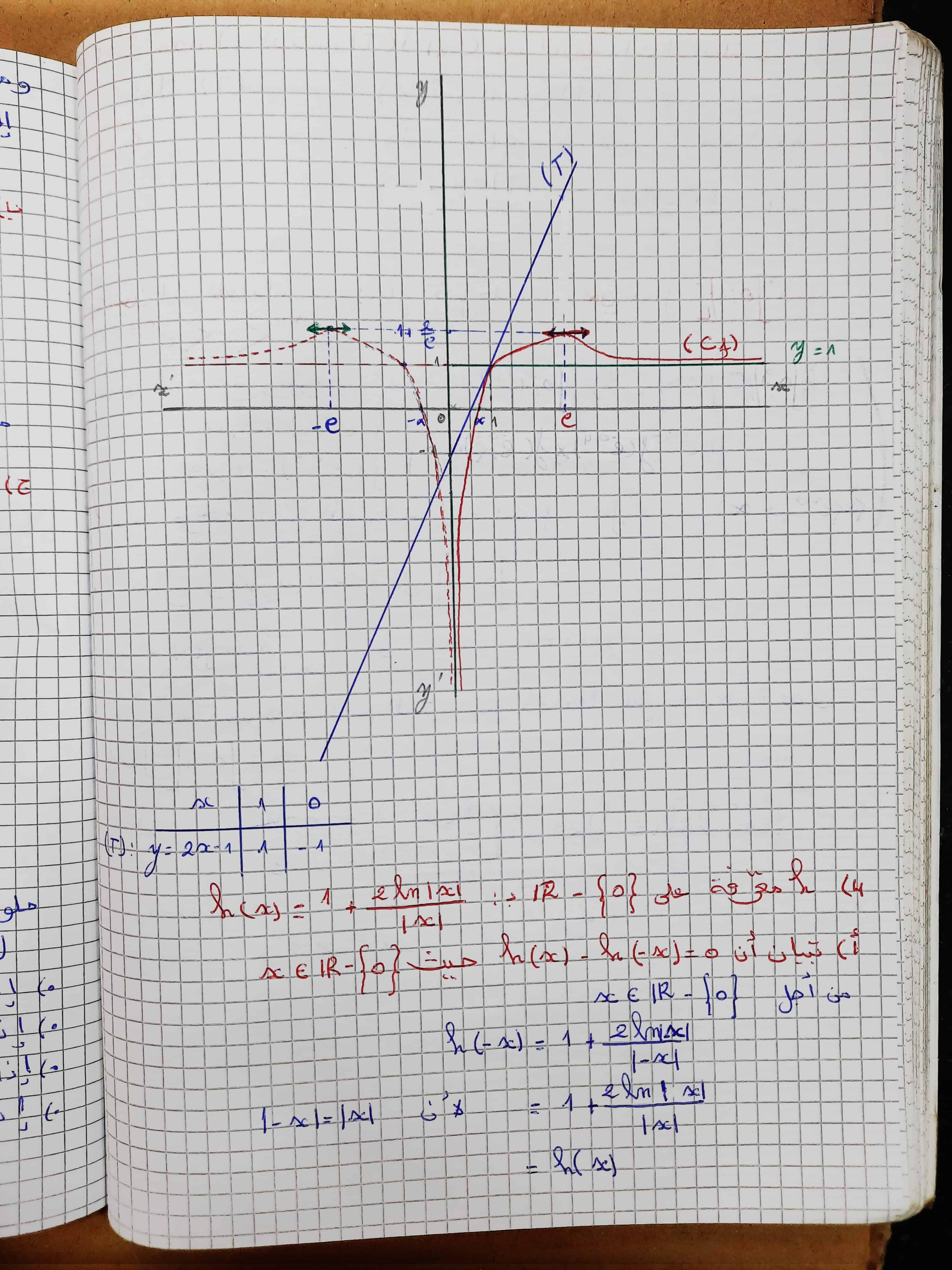
* f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;1]$

$\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty$ و $f(1) = 1$

أي حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;1[$

وبما أن $$\begin{cases} f(e^{-0,4}) = -0,19 \\ f(e^{-0,3}) = 0,19 \end{cases}$$ أي $f(e^{-0,4}) \times f(e^{-0,3}) < 0$

إذن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$



x	1	0
(T): $y = 2x - 1$	1	-1

4) h معرّفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ: $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$

أ) تبيان أن $h(x) - h(-x) = 0$ حيث $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

من أجل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$h(-x) = 1 + \frac{2\ln|-x|}{|-x|}$$

$$= 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$$ لأن $|-x| = |x|$

$$= h(x)$$

ومنه $h(x) - h(-x) = 0$

الإستنتاج

h دالة زوجية لأن $h(-x) = h(x)$ و (C_h) له محور تناظر $(y'y)$

ب) إنشاء (C_h) علما (C_f).

لدينا $|x| = \begin{cases} x \; ; \; x \geq 0 \\ -x \; ; \; x \leq 0 \end{cases}$ ؛ $h(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{2\ln x}{x} \; ; \; x > 0 \\ 1 + \dfrac{2\ln(-x)}{-x} \; ; \; x < 0 \end{cases}$

من أجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا $h(x) = f(x)$ أي (C_h) منطبق على (C_f).

من أجل $x \in]-\infty;0[$ لدينا (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لـ $(y'y)$.

ج) المناقشة بيانيا عدد حلول المعادلة $\ln x^2 = (m-1)|x|$

من أجل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ لدينا

$$\ln x^2 = (m-1)|x|$$

تكتب

$$2\ln|x| = (m-1)|x|$$

$$\frac{2\ln|x|}{|x|} = m - 1$$

$$1 + \frac{2\ln|x|}{|x|} = m$$

$$h(x) = m$$

$$\begin{cases} y = h(x) \\ y = m \end{cases}$$

حلول المعادلة المعطاة هي فواصل نقاط تقاطع (C_h) مع المستقيم (Δm) الذي معادلته $y = m$

- إذا كان $m \leq 1$ لدينا حلان
- إذا كان $1 < m < 1 + \frac{2}{e}$ لدينا 4 حلول
- إذا كان $m = 1 + \frac{2}{e}$ لدينا حلان مضاعفان e و $-e$
- إذا كان $m > 1 + \frac{2}{e}$ لا توجد حلول.

التمرين (76)

الجزء (1)

f معرفة على $]-\infty ; -1[$

$A(0;3)$ ، $B(-1;1)$ ، $E(1; 3+\ln 2)$

(AB) مماس لـ (C) عند A

(Δ) مماس لـ (C) عند E

(1) أ) معادلة (AB)

معادلة (AB) هي من الشكل $y = ax + b$

$A \in (AB)$ يعني
$$\begin{cases} y_A = a x_A + b \\ 3 = a(0) + b \end{cases}$$
$b = 3$

$B \in (AB)$ يعني
$y_B = a x_B + b$
$1 = a(-1) + b$
$1 = -a + b$

نحل الجملة
$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

أي $-a + 3 = 1$ ، $a = 2$

ومنه معادلة (AB) هي: $y = 2x + 3$

$\vec{u}\binom{x}{y}$ و $\vec{u'}\binom{x'}{y'}$ مرتبطان خطيا (أو $\vec{u} \parallel \vec{u'}$)
يعني:
$xy' = x'y$
أو
$xy' - x'y = 0$

طـ2)

لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوي

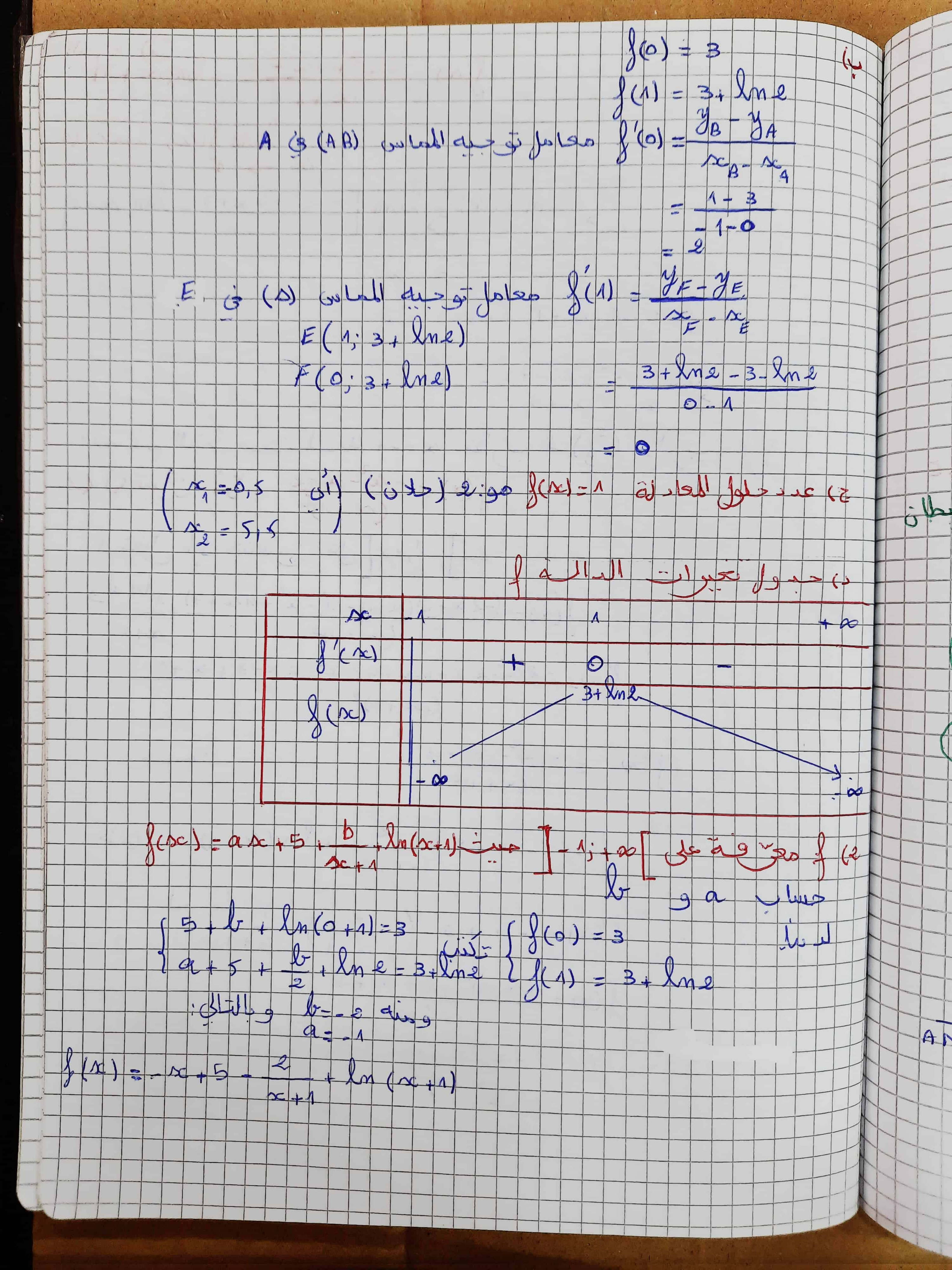
$M \in (AB)$ يعني $\vec{AM} \parallel \vec{AB}$

لأن $\vec{AB}\binom{-1}{-2}$ و $\vec{AM}\binom{x-0}{y-3}$

أي: $(-2)(x-0) = (-1)(y-3)$

أي $-2x = -y + 3$

$(AB):\ y = 2x + 3$



ب) $f(0) = 3$

$f(1) = 3 + \ln 2$

$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ معامل توجيه المماس (AB) في A

$= \frac{1-3}{-1-0}$

$= 2$

$f'(1) = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E}$ معامل توجيه المماس (Δ) في E

$E(1; 3+\ln 2)$

$F(0; 3+\ln 2)$

$= \frac{3+\ln 2 - 3 - \ln 2}{0-1}$

$= 0$

ج) عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ هو: 2 (حلان) أي $\begin{cases} x_1 = 0,5 \\ x_2 = 5,5 \end{cases}$

د) جدول تغيرات الدالة f

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3+\ln 2$	↘	$-\infty$

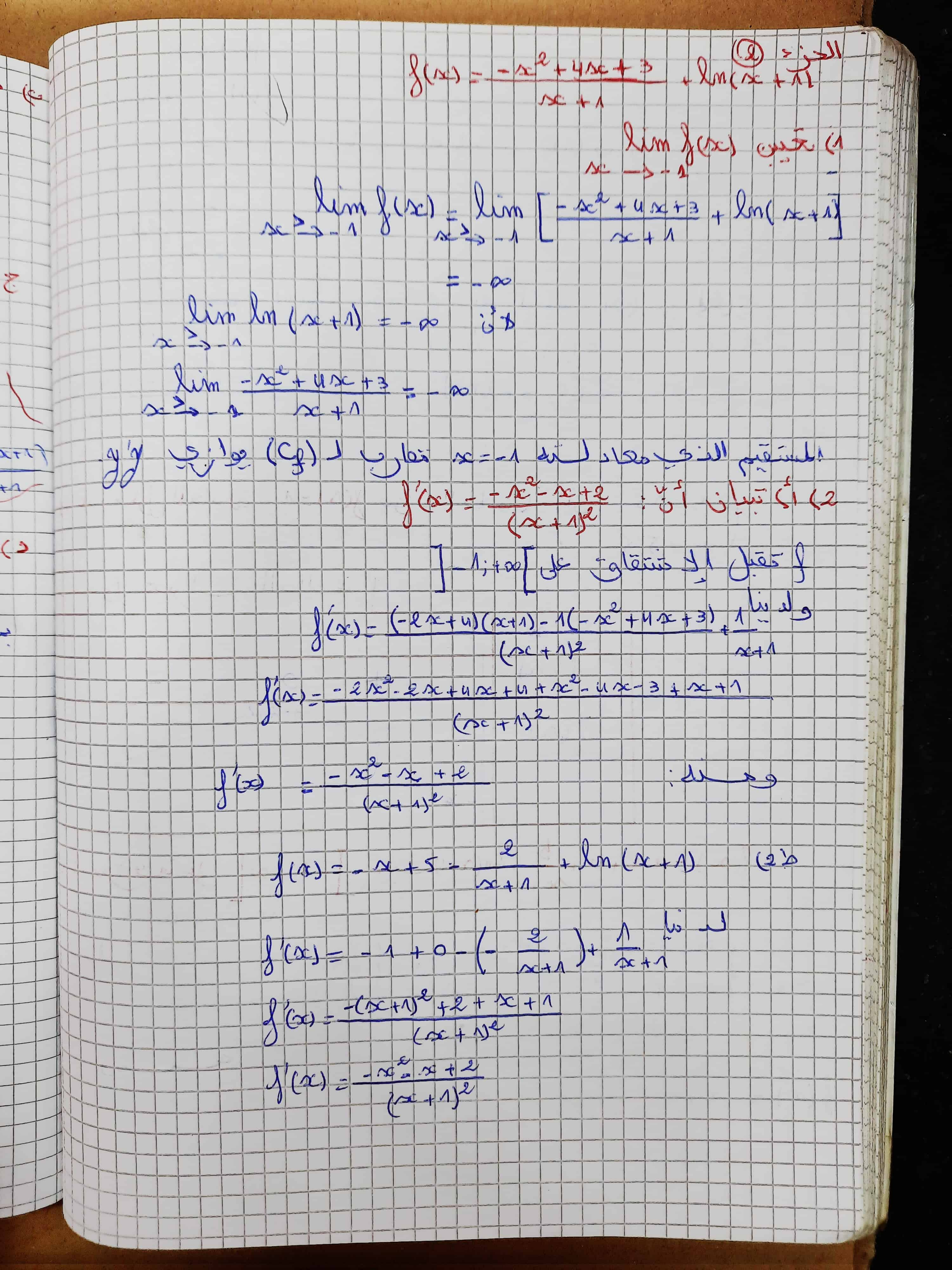
2) f معرّفة على $]-1;+\infty[$ حيث: $f(x) = ax + 5 + \frac{b}{x+1} + \ln(x+1)$

حساب a و b

لدينا $\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 3+\ln 2 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 5 + b + \ln(0+1) = 3 \\ a + 5 + \frac{b}{2} + \ln 2 = 3 + \ln 2 \end{cases}$

ومنه $b = -2$ وبالتالي: $a = -1$

$f(x) = -x + 5 - \frac{2}{x+1} + \ln(x+1)$



الجزء ② :

$$f(x) = \frac{-x^2+4x+3}{x+1} + \ln(x+1)$$

1) تعيين $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \left[\frac{-x^2+4x+3}{x+1} + \ln(x+1) \right]$$

$$= -\infty$$

لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \ln(x+1) = -\infty$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{-x^2+4x+3}{x+1} = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x=-1$ مقارب لـ (C_f) يوازي $y'y$

2) أ) تبيان أن: $f'(x) = \frac{-x^2-x+2}{(x+1)^2}$

f تقبل الاشتقاق على $]-1;+\infty[$

ولدينا

$$f'(x) = \frac{(-2x+4)(x+1) - 1(-x^2+4x+3)}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2-2x+4x+4+x^2-4x-3+x+1}{(x+1)^2}$$

ومنه:

$$f'(x) = \frac{-x^2-x+2}{(x+1)^2}$$

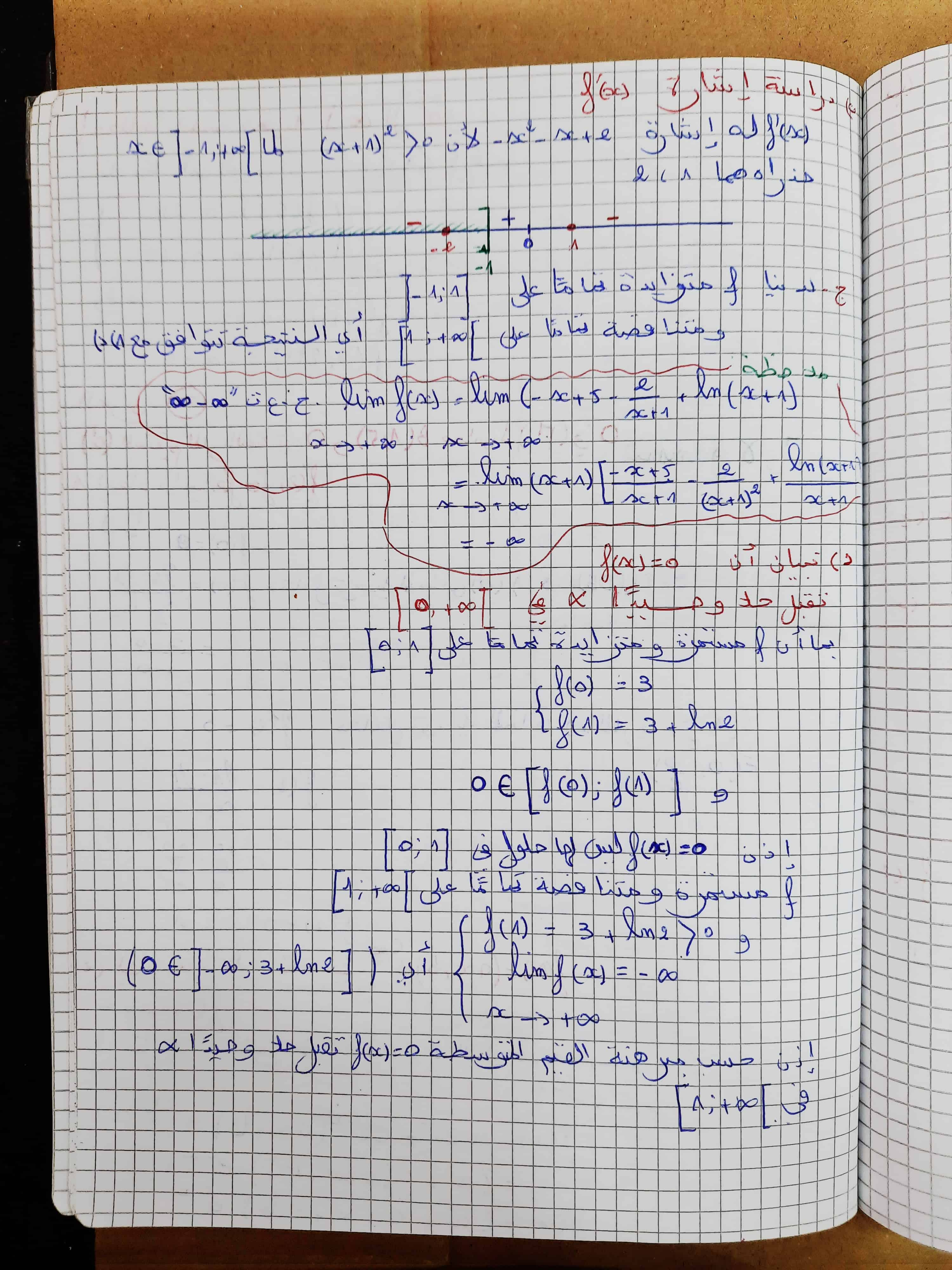
ب) $f(x) = -x+5-\frac{2}{x+1} + \ln(x+1)$

لدينا

$$f'(x) = -1+0-\left(-\frac{2}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-(x+1)^2+2+x+1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2-x+2}{(x+1)^2}$$



ب) دراسة إشارة $f'(x)$

$f'(x)$ لها إشارة $-x^2-x+2$ لأن $(x+1)^2>0$ لما $x\in]-1,+\infty[$

جذراها هما 1 ، -2

-2 ; -1 ; 0 ; 1 — $-$; $+$; $-$

ج- لدينا f متزايدة تماما على $]-1;1]$

ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$ أي النتيجة تتوافق مع (1 د)

ملاحظة

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x+5-\frac{2}{x+1}+\ln(x+1)\right)$ ح.غ.ت "$\infty-\infty$"

$= \lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{-x+5}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]$

$= -\infty$

د) تبيان أن $f(x)=0$

تقبل حلا وحيدا α في $[0,+\infty[$

بما أن f مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;1]$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 3+\ln 2 \end{cases}$$

و $0 \notin [f(0);f(1)]$

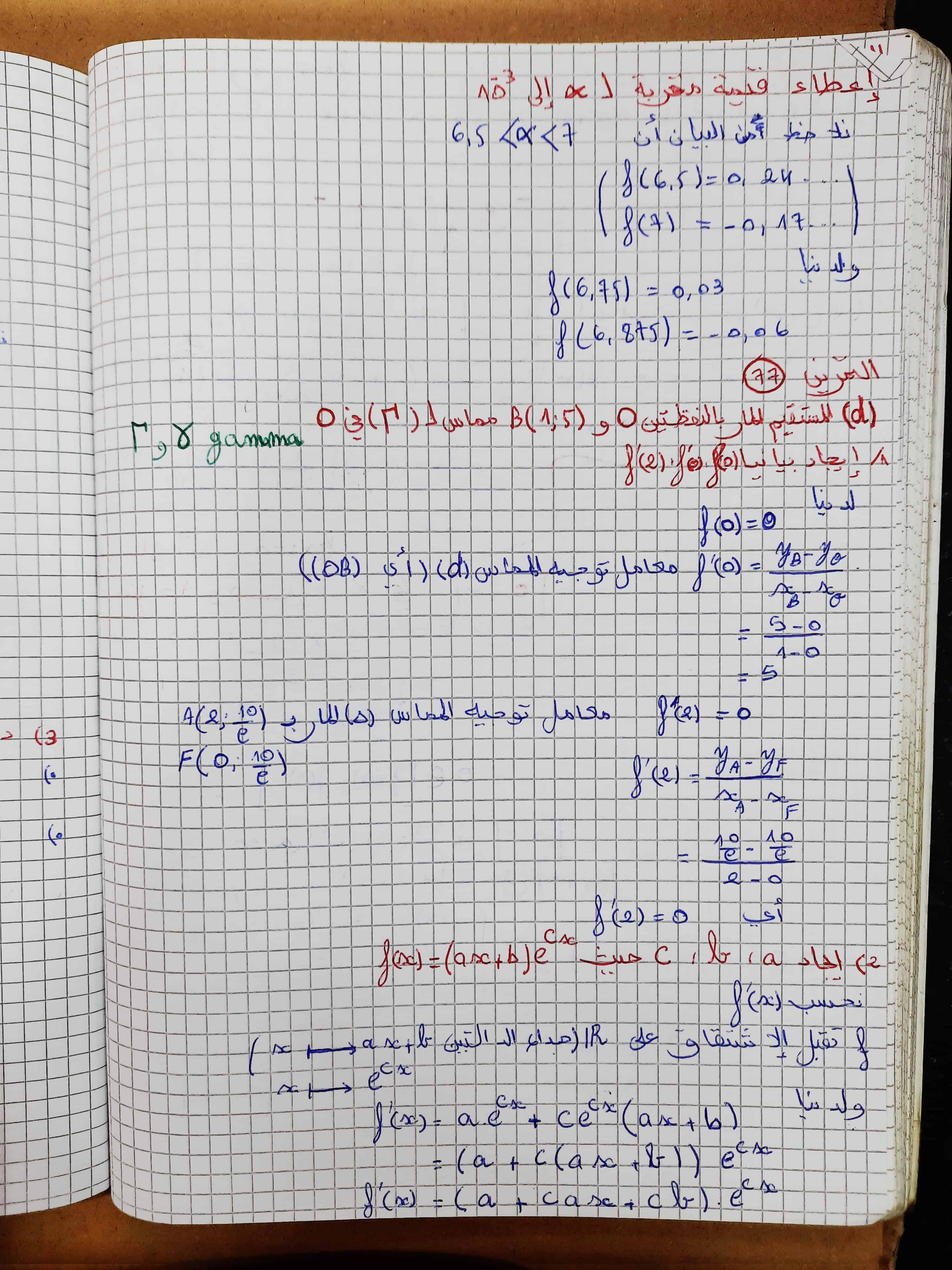
إذن $f(x)=0$ ليس لها حلول في $[0;1]$

f مستمرة ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$

و $\begin{cases} f(1) = 3+\ln 2 > 0 \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$ أي $(0\in]-\infty;3+\ln 2])$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

في $[1;+\infty[$.



إعطاء قيمة مقربة لـ α إلى 10^{-3}

نلاحظ من البيان أن $6,5 < \alpha < 7$

$$\begin{cases} f(6,5) = 0,24\ldots \\ f(7) = -0,17\ldots \end{cases}$$

ولدينا

$f(6,75) = 0,03$

$f(6,875) = -0,06$

التمرين 77

(d) المستقيم المار بالنقطتين O و $B(1;5)$ مماس لـ (Γ) في O

γ gamma و Γ

1/ إيجاد بيانيا $f(0)$، $f'(0)$، $f'(e)$

لدينا

$f(0) = 0$

$f'(0) = \dfrac{y_B - y_O}{x_B - x_O}$ معامل توجيه المماس (d) (أي (OB))

$= \dfrac{5-0}{1-0}$

$= 5$

$f'(e) = 0$ معامل توجيه المماس (Δ) المار بـ $A(e; \frac{10}{e})$

$F(0; \frac{10}{e})$

$f'(e) = \dfrac{y_A - y_F}{x_A - x_F}$

$= \dfrac{\frac{10}{e} - \frac{10}{e}}{e - 0}$

أي $f'(e) = 0$

2) إيجاد a، b، c حيث $f(x) = (ax+b)e^{cx}$

نحسب $f'(x)$

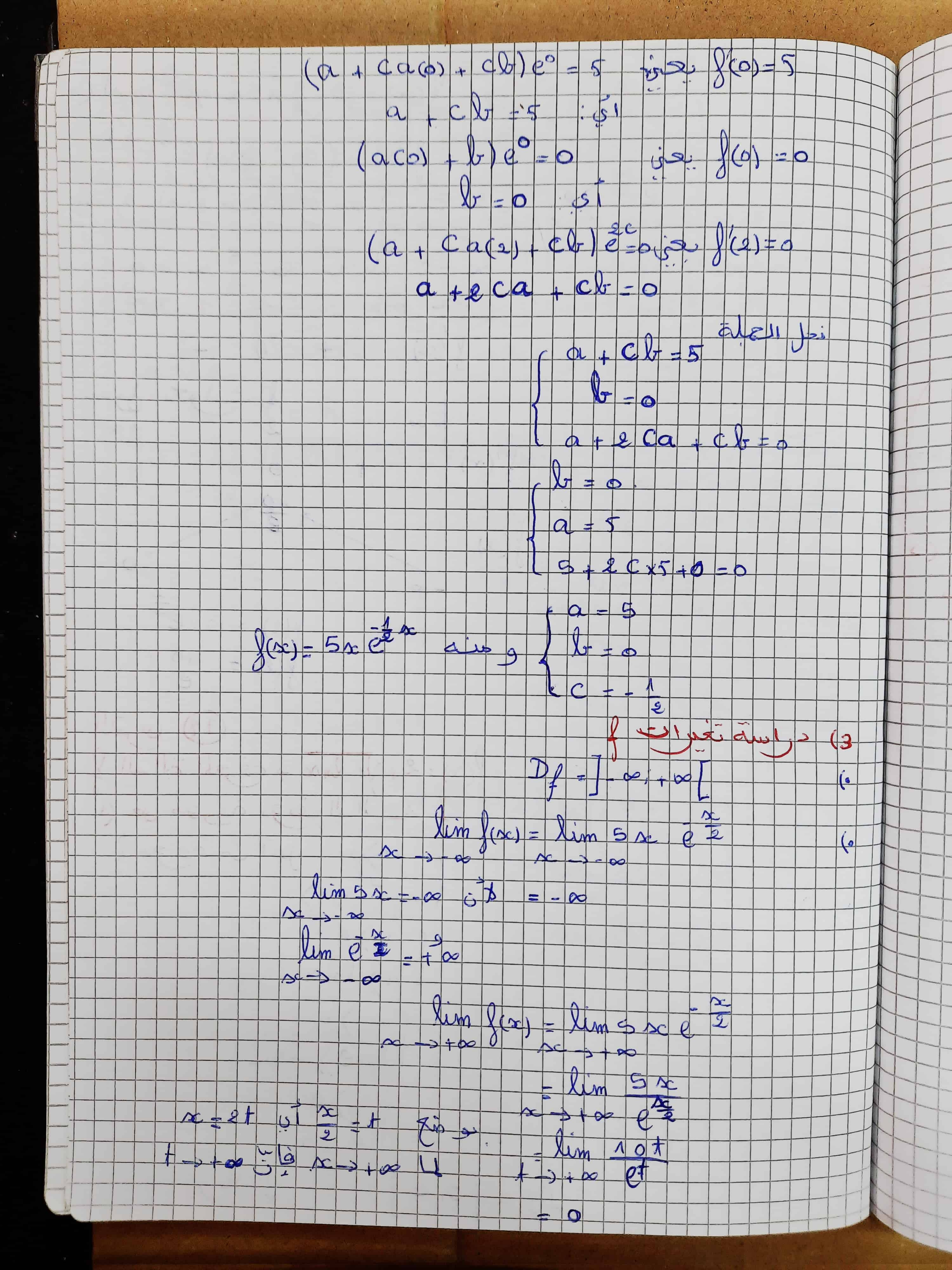
f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ (جداء الدالتين $x \longmapsto ax+b$ و $x \longmapsto e^{cx}$)

ولدينا

$f'(x) = a e^{cx} + c e^{cx}(ax+b)$

$= (a + c(ax+b))\, e^{cx}$

$f'(x) = (a + cax + cb) \cdot e^{cx}$



$(a + ca(0) + cb)e^{0} = 5$ يعني $f'(0) = 5$

أي: $a + cb = 5$

$(a(0) + b)e^{0} = 0$ يعني $f(0) = 0$

أي $b = 0$

$(a + ca(2) + cb)e^{2c} = 0$ يعني $f'(2) = 0$

$a + 2ca + cb = 0$

نحل الجملة

$$\begin{cases} a + cb = 5 \\ b = 0 \\ a + 2ca + cb = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 5 \\ 5 + 2c \times 5 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$ ومنه $f(x) = 5x e^{-\frac{1}{2}x}$

3) دراسة تغيرات f

1) $D_f =]-\infty ; +\infty[$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 5x e^{-\frac{x}{2}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 5x = -\infty$ و $= -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 5x e^{-\frac{x}{2}}$

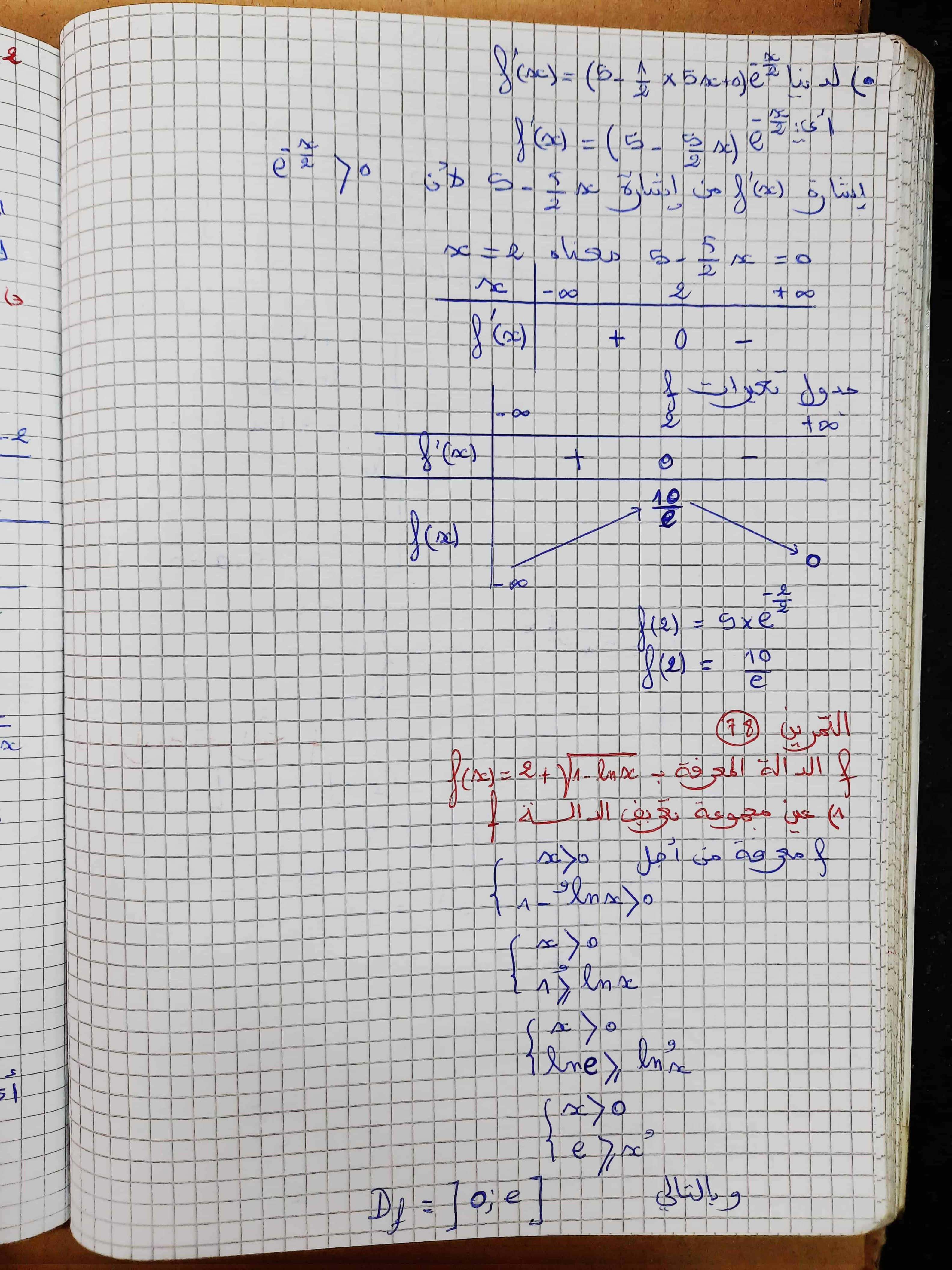
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x}{e^{\frac{x}{2}}}$

نضع $\frac{x}{2} = t$ أي $x = 2t$

لما $x \to +\infty$ فإن $t \to +\infty$

$= \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{10t}{e^{t}}$

$= 0$



ب) لدينا $f'(x) = (5 - \frac{1}{2} \times 5x + 0)e^{-\frac{x}{2}}$

أي: $f'(x) = (5 - \frac{5}{2}x)e^{-\frac{x}{2}}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $5 - \frac{5}{2}x$ لأن $e^{-\frac{x}{2}} > 0$

$5 - \frac{5}{2}x = 0$ معناه $x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{10}{e}$	↘	0

$f(2) = 5 \times e^{-\frac{2}{2}}$

$f(2) = \frac{10}{e}$

التمرين (78)

f الدالة المعرفة ب: $f(x) = 2 + \sqrt{1 - \ln x}$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f

f معرفة من أجل

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 \geq \ln x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln e \geq \ln x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ e \geq x \end{cases}$$

وبالتالي $D_f =]0; e]$

2) احسب $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(2 + \sqrt{1 - \ln x} \right) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$ أي $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} (-\ln x) = +\infty$

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب $(y'y)$ لـ (C_f) منطبق على $(y'y)$

3) هل الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار e وفسر النتيجة هندسيا.

f تقبل الاشتقاق على يسار e يعني $\lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = l$

حيث $l \in \mathbb{R}$

$f(e) = 2 + \sqrt{1 - \ln e}$
$= 2 + 0$
$= 2$

لأن

$$\lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{2 + \sqrt{1 - \ln x} - 2}{x - e}$$

"$\frac{0}{0}$" ح.ع.ت

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{x - e}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{\sqrt{1 - \ln x}\,\sqrt{1 - \ln x}}{(x - e)\sqrt{1 - \ln x}}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{1 - \ln x}{(x - e)\sqrt{1 - \ln x}}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{1 - \ln x}{x - e} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \ln x}}$$

$$= -\infty$$

لأن:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{1 - \ln x}{x - e} = \lim_{x \overset{<}{\to} e} \left(- \frac{\ln x - 1}{x - e} \right)$$

$$= - \lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e}$$

$$= - \lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{g(x) - g(e)}{x - e}$$

حيث $g(x) = \ln x$
$g'(x) = \frac{1}{x}$

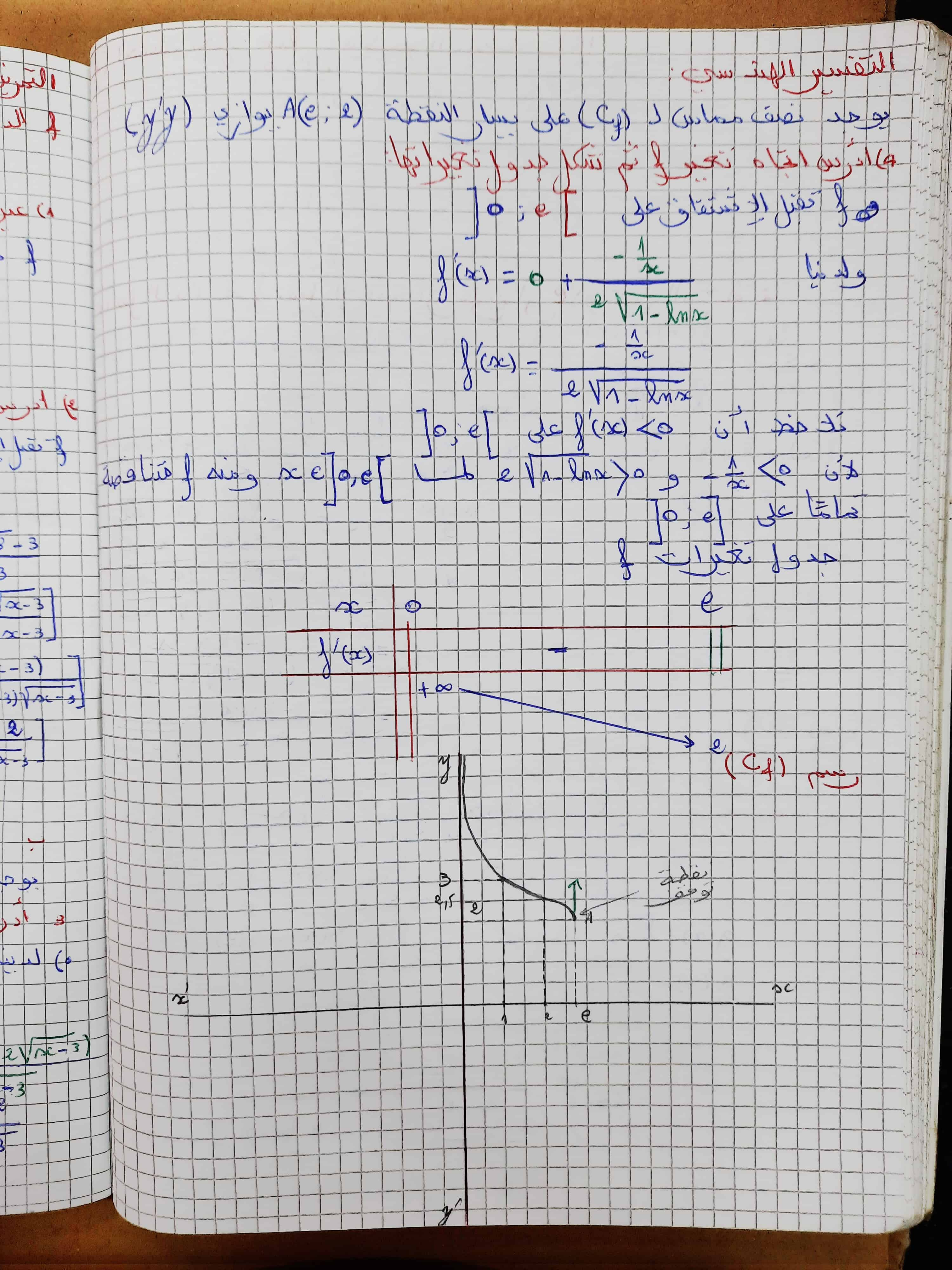
$$= - g'(e)$$

$$= - \frac{1}{e}$$

أي:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = -\infty$$

ومنه f لا تقبل الاشتقاق على يسار e



التفسير الهندسي :

يوجد نصف مماس لـ (C_f) على يسار النقطة $A(e;2)$ يوازي $(y'y)$

4) أدرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها:

f تقبل الإشتقاق على $]0;e[$

ولدينا

$$f'(x) = 0 + \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{1-\ln x}}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{1-\ln x}}$$

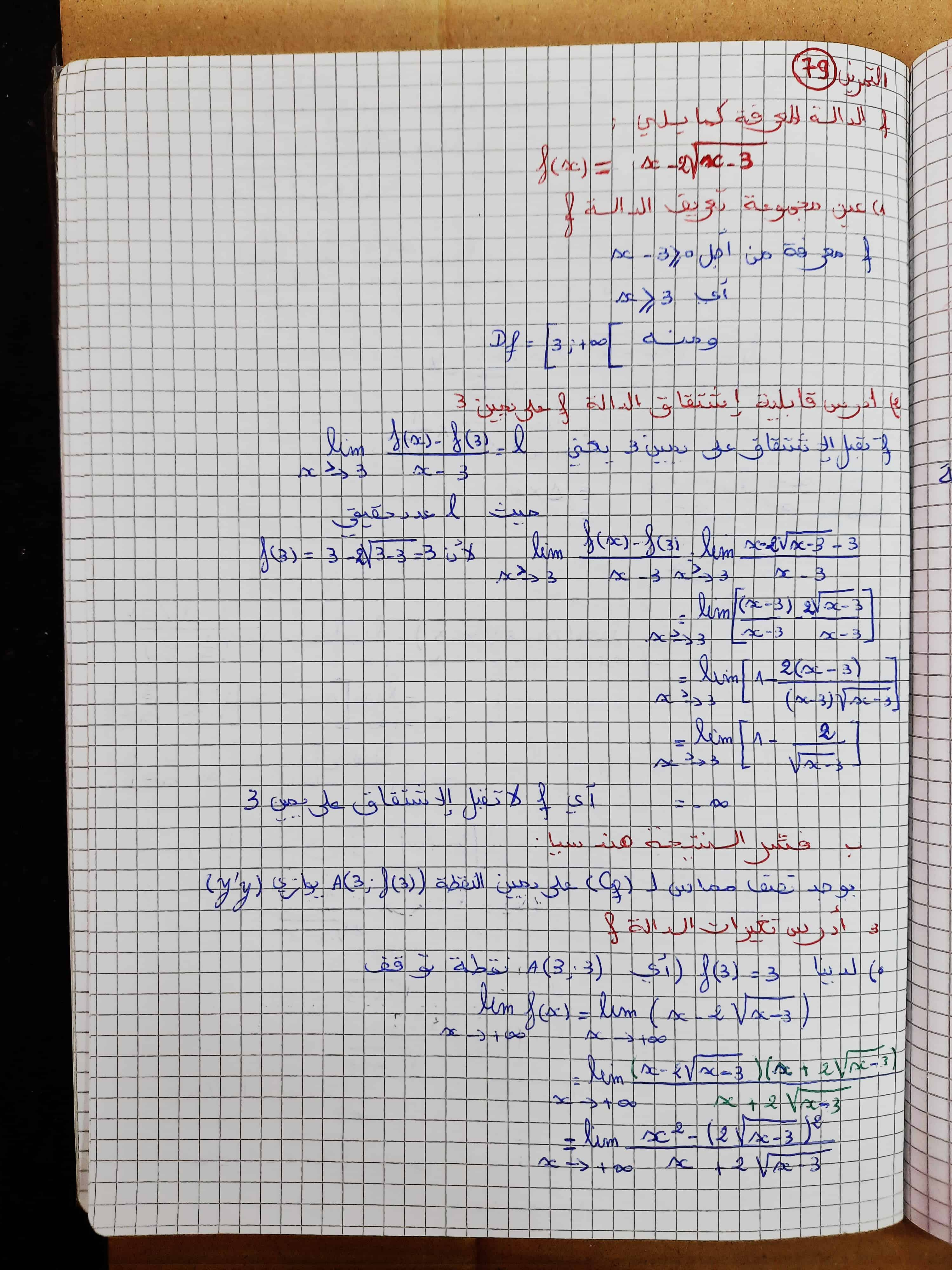
نلاحظ أن $f'(x) < 0$ على $]0;e[$

لأن $-\frac{1}{x} < 0$ و $2\sqrt{1-\ln x} > 0$ لما $x \in]0,e[$ ومنه f متناقصة تماما على $]0;e[$

جدول تغيرات f

x	0		e
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2

رسم (C_f)



التمرين 79

f الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x) = x - 2\sqrt{x-3}$$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f

f معرفة من أجل $x-3 \geq 0$

أي $x \geq 3$

ومنه $D_f = [3;+\infty[$

2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على يمين 3

f تقبل الإشتقاق على يمين 3 يعني $\lim_{x \to 3^>} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = l$

حيث l عدد حقيقي

$f(3) = 3 - 2\sqrt{3-3} = 3$ لأن

$$\lim_{x \to 3^>} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^>} \frac{x - 2\sqrt{x-3} - 3}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^>} \left[\frac{(x-3)}{x-3} - \frac{2\sqrt{x-3}}{x-3}\right]$$

$$= \lim_{x \to 3^>} \left[1 - \frac{2(x-3)}{(x-3)\sqrt{x-3}}\right]$$

$$= \lim_{x \to 3^>} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{x-3}}\right]$$

$= -\infty$ أي f لا تقبل الإشتقاق على يمين 3

ب- فسر النتيجة هندسيا:

يوجد نصف مماس لـ (C_f) على يمين النقطة $A(3;f(3))$ يوازي $(y'y)$

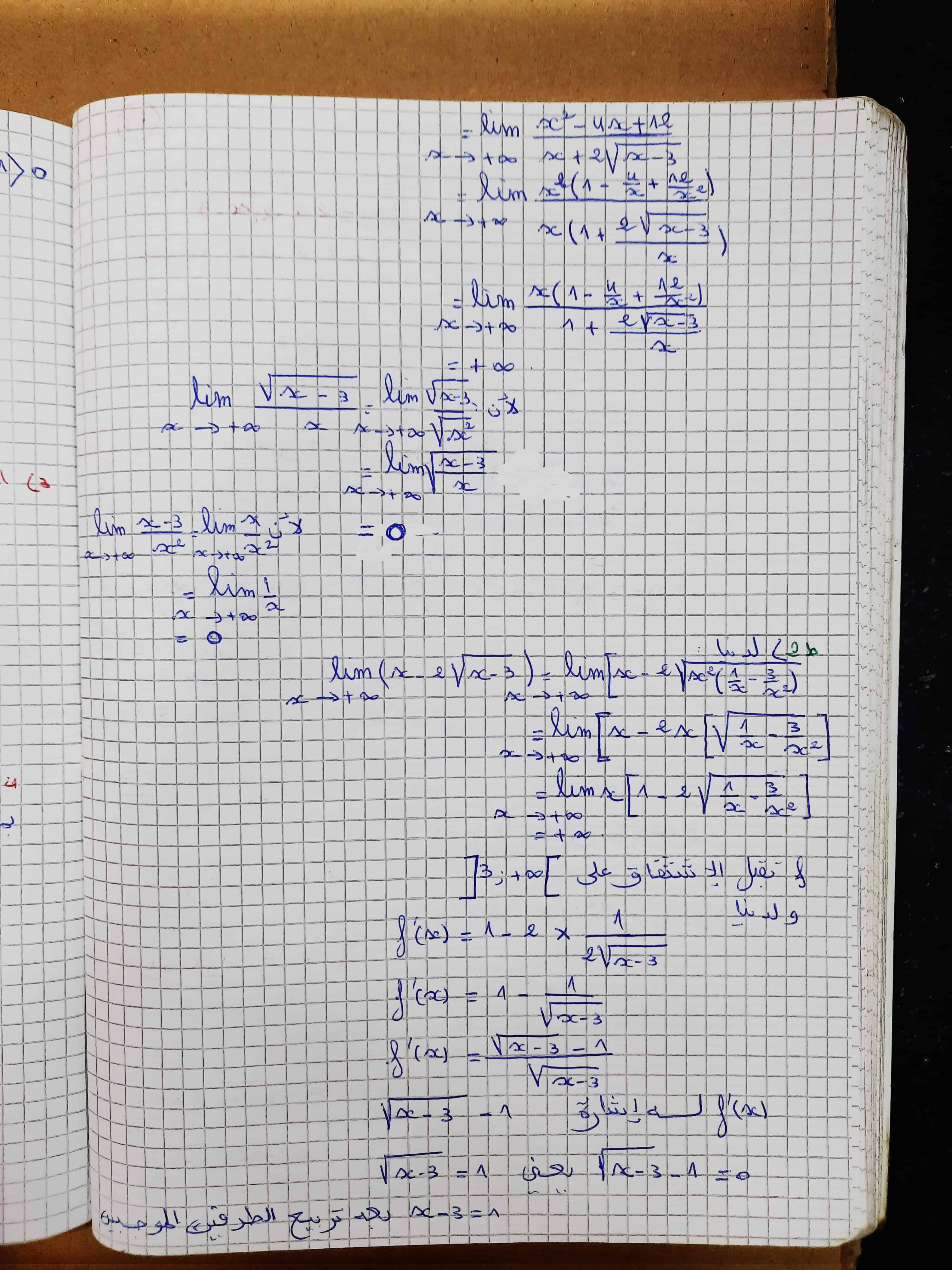
3- أدرس تغيرات الدالة f

ـ) لدينا $f(3) = 3$ (أي $A(3;3)$ نقطة توقف

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - 2\sqrt{x-3})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-2\sqrt{x-3})(x+2\sqrt{x-3})}{x+2\sqrt{x-3}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (2\sqrt{x-3})^2}{x+2\sqrt{x-3}}$$



$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 12}{x + 2\sqrt{x-3}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{2\sqrt{x-3}}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2}\right)}{1 + \frac{2\sqrt{x-3}}{x}}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2}} \quad \text{لأن } x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x-3}{x^2}}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} \quad \text{لأن}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$$

$$= 0$$

د2) لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - 2\sqrt{x-3}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - 2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x - 2x\left[\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}\right]\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left[1 - 2\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}\right]$$

$$= +\infty$$

f تقبل الاشتقاق على $]3 ; +\infty[$

ولدينا

$$f'(x) = 1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

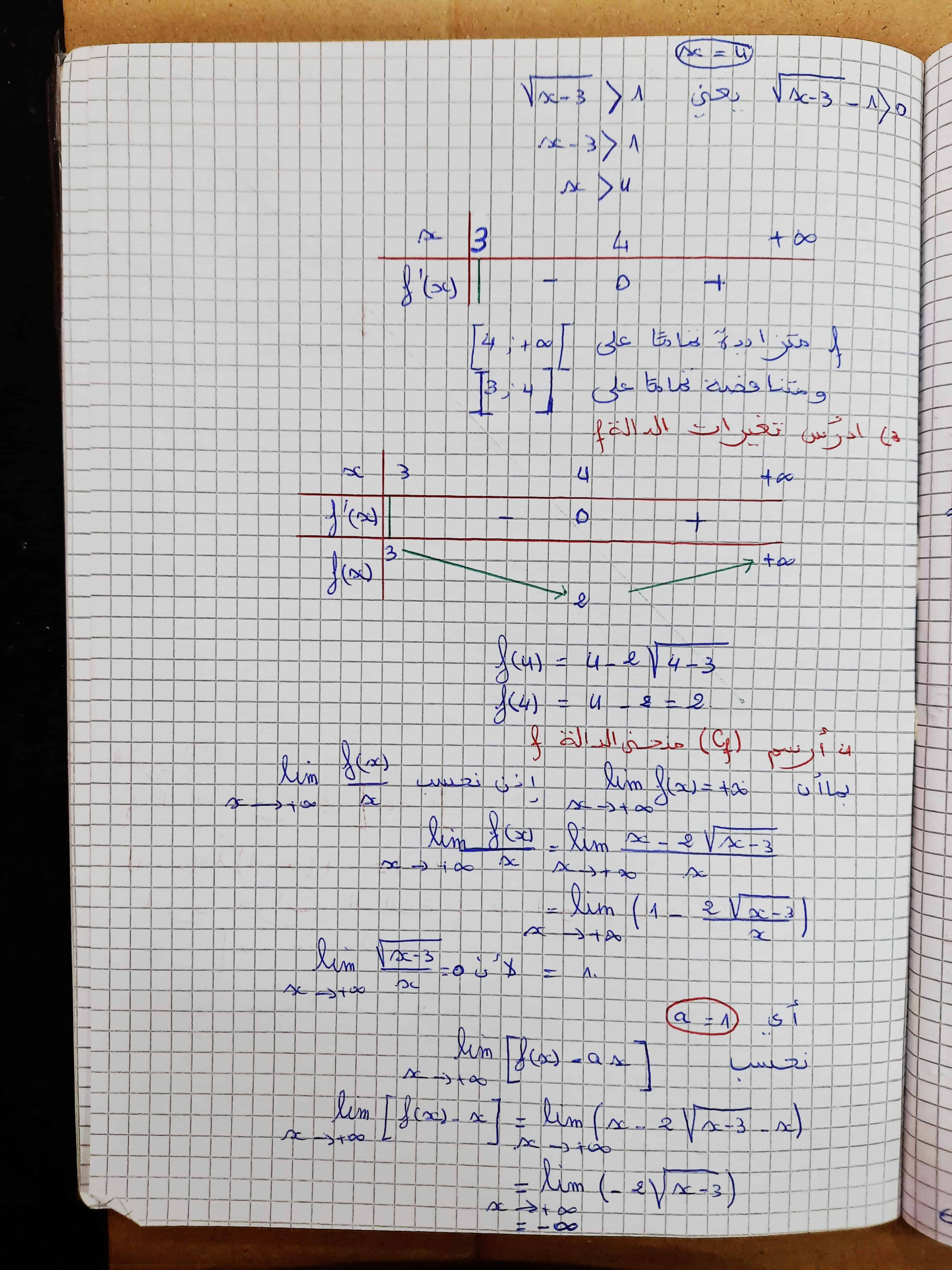
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x-3} - 1}{\sqrt{x-3}}$$

$f'(x)$ لـه إشارة $\sqrt{x-3} - 1$

$\sqrt{x-3} - 1 = 0$ يعني $\sqrt{x-3} = 1$

بعد تربيع الطرفين الموجبين $x - 3 = 1$



$x = 4$

$\sqrt{x-3} - 1 > 0$ يعني $\sqrt{x-3} > 1$

$x - 3 > 1$

$x > 4$

x	3		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على $]4 ; +\infty[$

ومتناقصة تماما على $]3 ; 4]$

3) ادرس تغيرات الدالة f

x	3		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	2	↗	$+\infty$

$f(4) = 4 - 2\sqrt{4-3}$

$f(4) = 4 - 2 = 2$

4) أرسم (C_f) منحنى الدالة f

بما أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ إذن نحسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2\sqrt{x-3}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2\sqrt{x-3}}{x}\right)$$

$$= 1$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x} = 0$

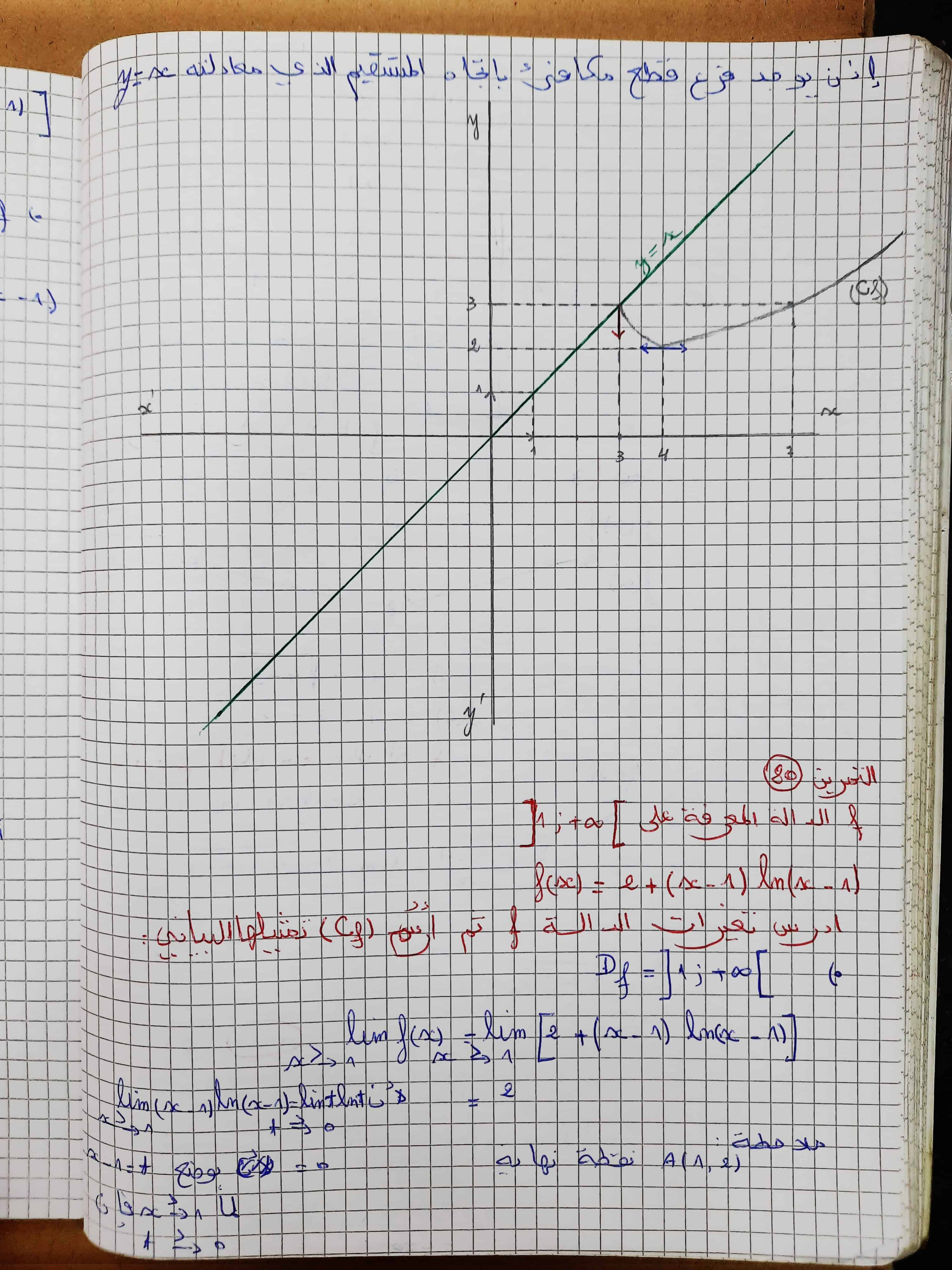
أي $a = 1$

نحسب $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} (x - 2\sqrt{x-3} - x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (-2\sqrt{x-3})$$

$$= -\infty$$



إذن يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته $y=x$

التمرين 80

f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$

$$f(x) = 2 + (x-1)\ln(x-1)$$

ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم (C_f) تمثيلها البياني:

1) $D_f =]1;+\infty[$

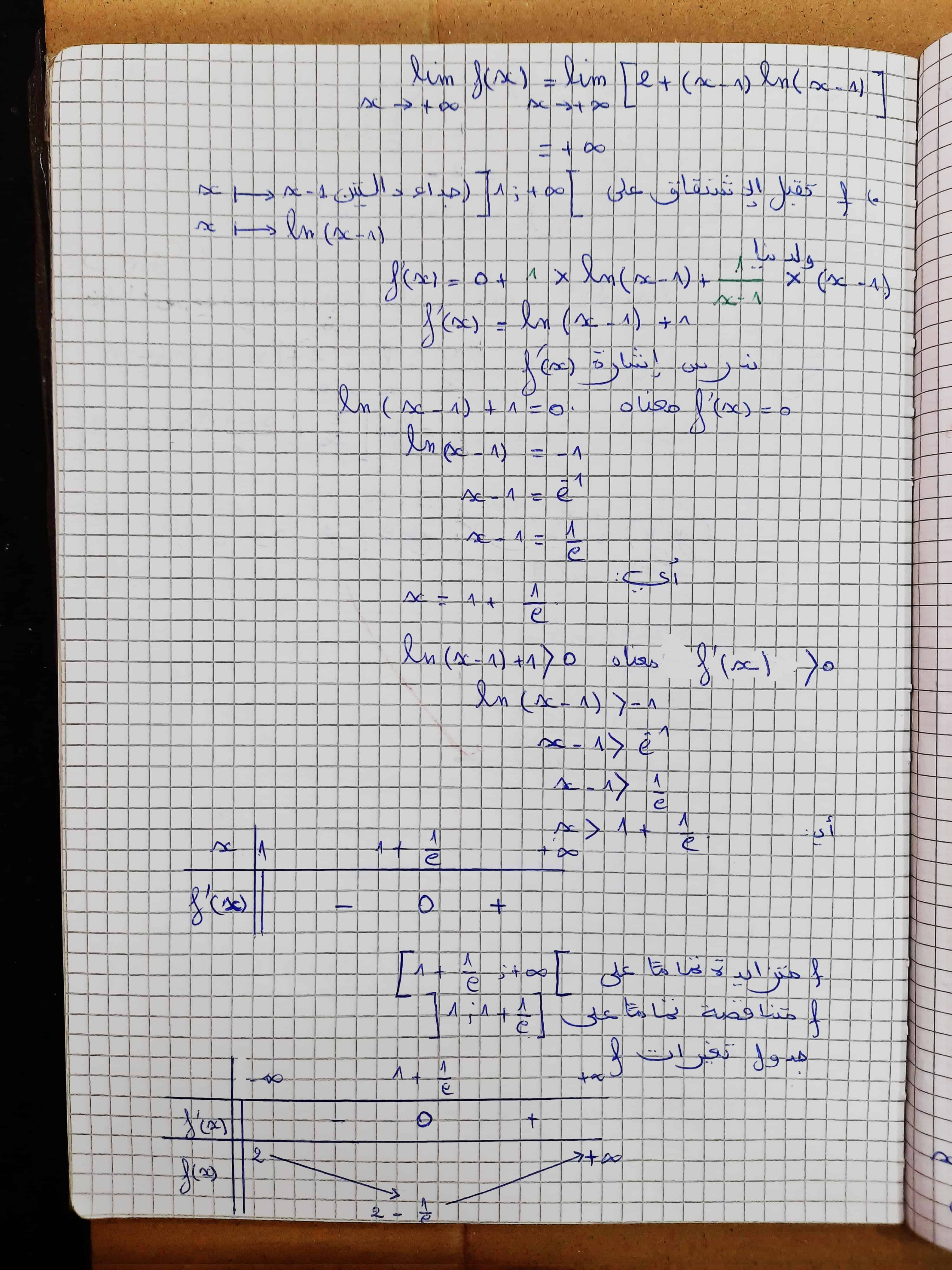
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \left[2 + (x-1)\ln(x-1)\right] = 2$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} (x-1)\ln(x-1) = \lim_{t \overset{>}{\to} 0} t\ln t = 0$$

نضع $x-1 = t$

لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن $t \overset{>}{\to} 0$

ملاحظة: $A(1,2)$ نقطة نهاية



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[2+(x-1)\ln(x-1)\right]$$
$$= +\infty$$

f قابلة للإشتقاق على $]1;+\infty[$ (جداء دالتين $x \longmapsto x-1$
$x \longmapsto \ln(x-1)$

ولدينا:
$$f'(x) = 0 + 1 \times \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} \times (x-1)$$
$$f'(x) = \ln(x-1) + 1$$

ندرس إشارة $f'(x)$

$f'(x)=0$ معناه $\ln(x-1)+1=0$.
$$\ln(x-1) = -1$$
$$x-1 = e^{-1}$$
$$x-1 = \frac{1}{e}$$
أي:
$$x = 1+\frac{1}{e}$$

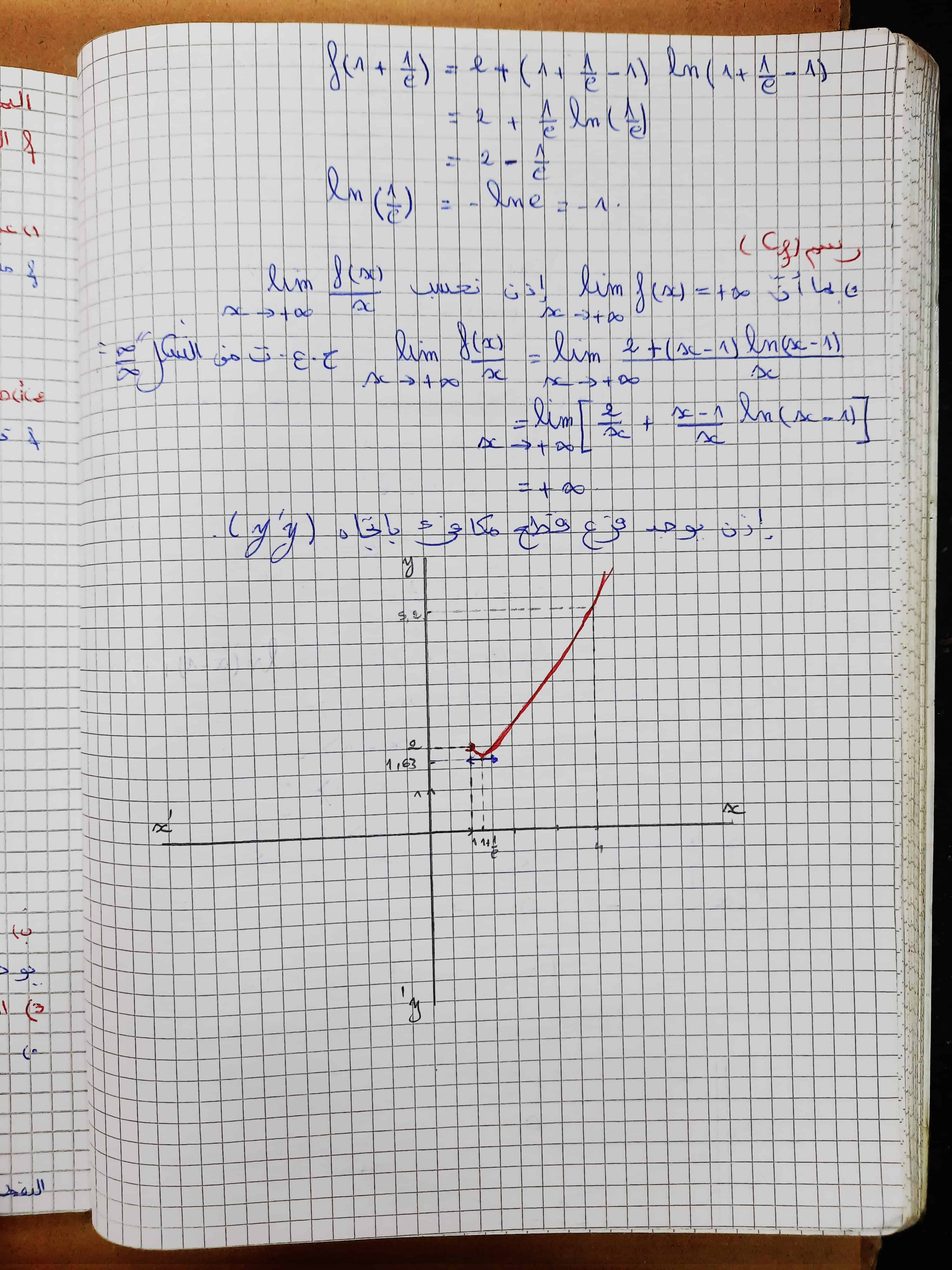
$f'(x)>0$ معناه $\ln(x-1)+1>0$
$$\ln(x-1) > -1$$
$$x-1 > e^{-1}$$
$$x-1 > \frac{1}{e}$$
أي: $x > 1+\frac{1}{e}$

x	1		$1+\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على $\left[1+\frac{1}{e};+\infty\right[$
f متناقصة تماما على $\left]1;1+\frac{1}{e}\right]$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		$1+\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$2-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$



$$f\left(1+\frac{1}{e}\right) = 2 + \left(1+\frac{1}{e}-1\right)\ln\left(1+\frac{1}{e}-1\right)$$
$$= 2 + \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)$$
$$= 2 - \frac{1}{e}$$
$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln e = -1.$$

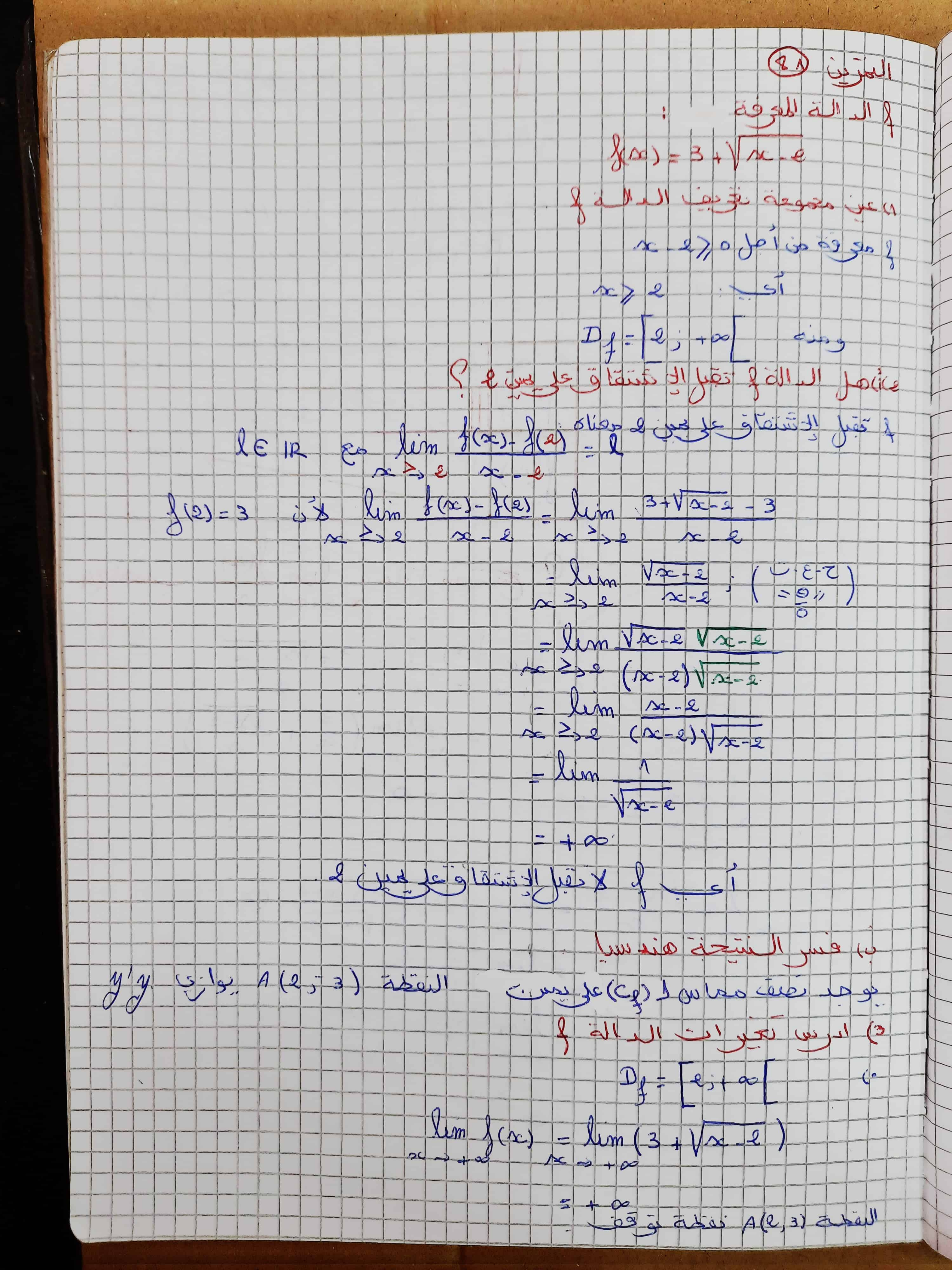
رسم (C_f) :

ج) بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ إذن نحسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+(x-1)\ln(x-1)}{x}$$ ح.ع.ت من الشكل "$\frac{\infty}{\infty}$" :

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x} + \frac{x-1}{x}\ln(x-1)\right]$$
$$= +\infty$$

إذن يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه $(y'y)$.



التمرين (21)

f الدالة المعرفة :

$$f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f

f معرفة من أجل $x-2 \geq 0$

أي $x \geq 2$

ومنه $D_f = [2;+\infty[$

2) أ) هل الدالة f تقبل الإشتقاق على يمين 2 ؟

f تقبل الإشتقاق على يمين 2 معناه $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = l$ مع $l \in \mathbb{R}$

لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{3+\sqrt{x-2}-3}{x-2}$ ، $f(2)=3$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$; (ح.ع.ت $\frac{0}{0}$)

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}}{(x-2)\sqrt{x-2}}$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{x-2}{(x-2)\sqrt{x-2}}$

$= \lim \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

$= +\infty$

أي f لا تقبل الإشتقاق على يمين 2

ب) فسر النتيجة هندسيا

يوجد نصف مماس لـ (C_f) على يمين النقطة $A(2;3)$ يوازي $y'y$

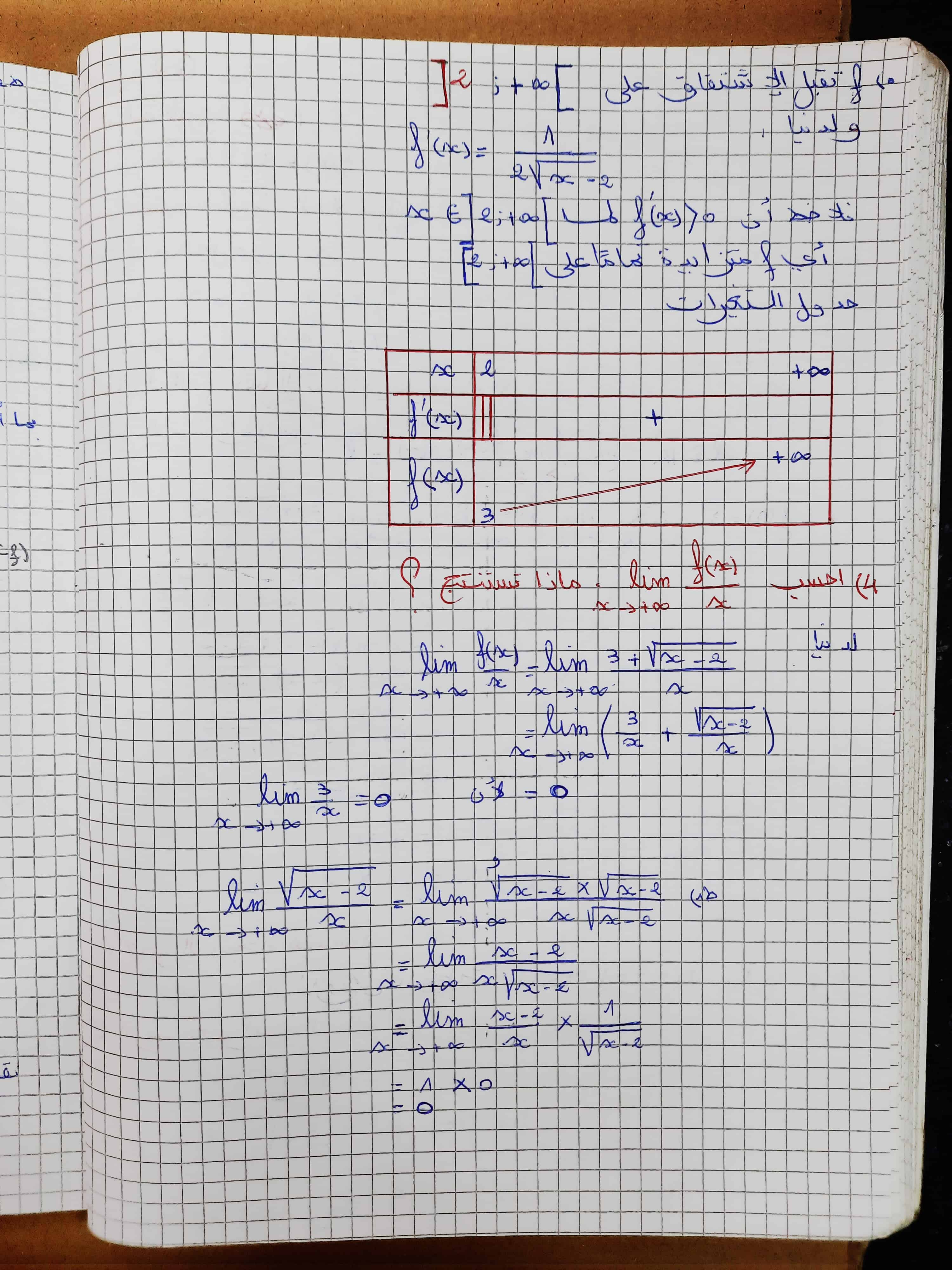
3) ادرس تغيرات الدالة f

لدينا $D_f = [2;+\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3+\sqrt{x-2})$

$= +\infty$

النقطة $A(2,3)$ نقطة توقف



٣) f تقبل الإشتقاق على $]2;+\infty[$

ولدينا :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

نلاحظ أن $f'(x) > 0$ لما $x \in]2;+\infty[$

أي f متزايدة تماما على $]2;+\infty[$

جدول التغيرات

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $\qquad$ $+$
$f(x)$	3 $\nearrow$ $+\infty$

4) احسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج ؟

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\sqrt{x-2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{\sqrt{x-2}}{x} \right)$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$ $\qquad$ [illegible] $= 0$

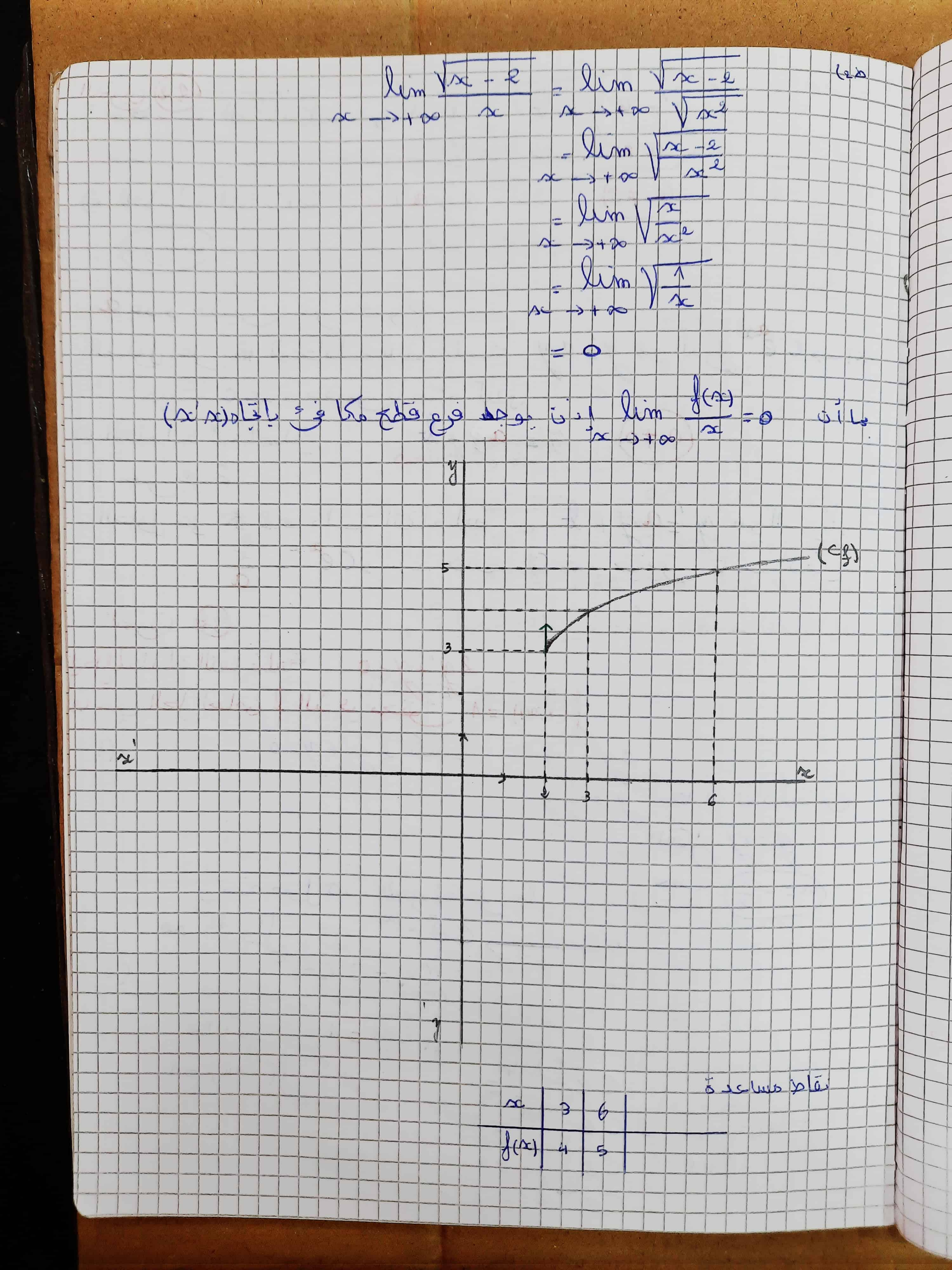
ط) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-2} \times \sqrt{x-2}}{x\sqrt{x-2}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$= 1 \times 0$$

$$= 0$$



(ط2)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$= 0$$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ إذن يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه $(x'x)$

نقاط مساعدة

x	3	6
$f(x)$	4	5

المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ حيث $a \neq 0$

$a \neq 0$

① المعادلة التفاضلية $y' = ay$ حيث

مبرهنة

a عدد حقيقي غير معدوم

الحلول على $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال $x \longmapsto ce^{ax}$

حيث c عدد حقيقي ثابت كيفي

② المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ $\quad a \neq 0$

مبرهنة

الحلول على $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هي الدوال $x \longmapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث c عدد حقيقي ثابت كيفي

التمرين ②

1) حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 0$

2) عين الحل الخاص f الذي يحقق $f(\ln 4) = 1$

1) نكتب $2y' + y = 0$

$2y' = -y$

$y' = -\frac{1}{2}y$ معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay$ حيث $a = -\frac{1}{2}$

ومنه حلول هذه المعادلة على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \longmapsto ce^{-\frac{1}{2}x}$

$f(x) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

2) بما أن: $f(\ln 4) = 1$

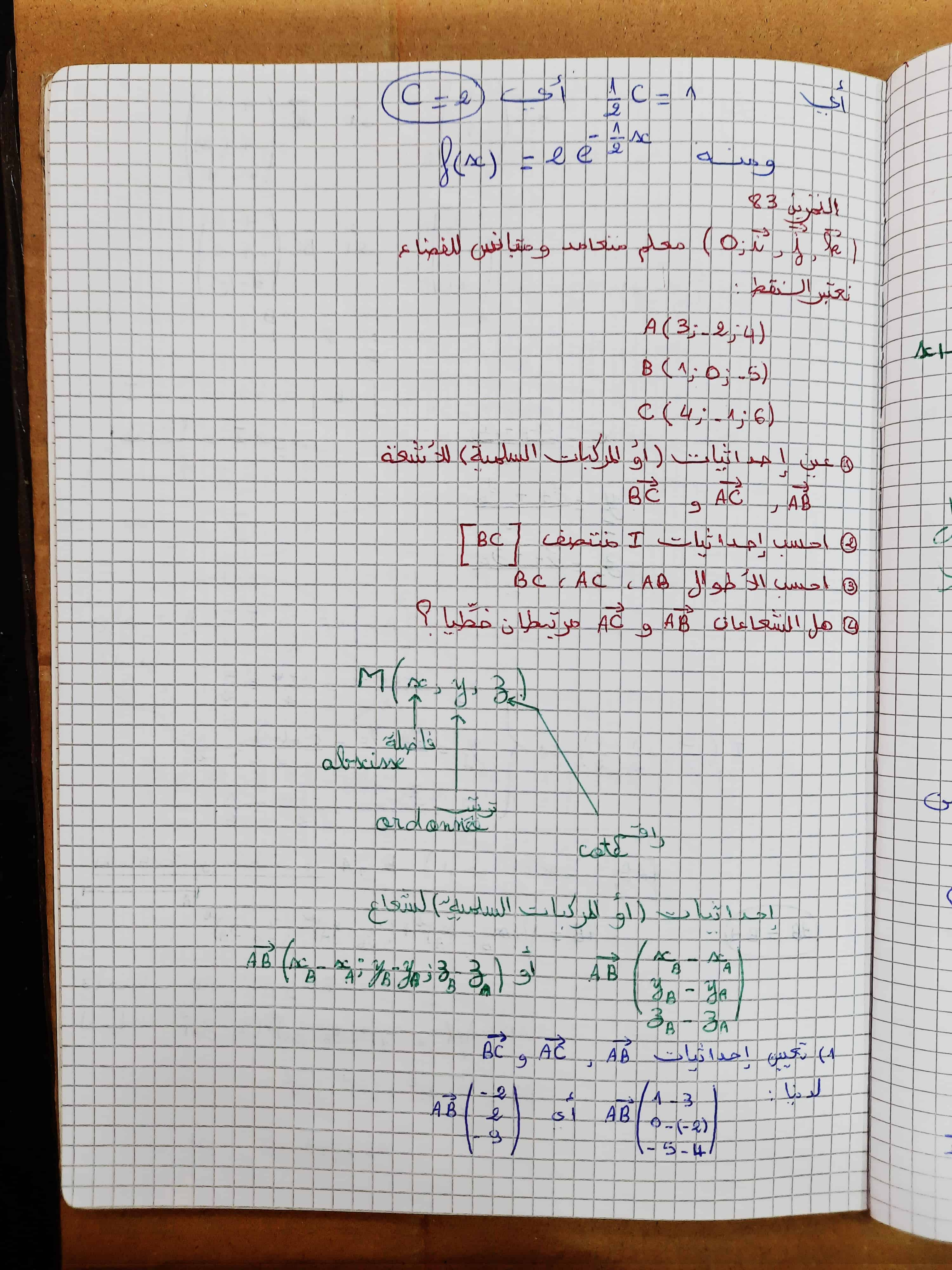
نكتب $f(\ln 4) = 1$

$ce^{-\frac{1}{2}\ln 4} = 1$

$ce^{-\ln\sqrt{4}} = 1$ لأن $\frac{1}{2}\ln 4 = \ln\sqrt{4} = \ln 2$

$ce^{-\ln 2} = 1$

$ce^{\ln\frac{1}{2}} = 1$



أي $\frac{1}{2}C = 1$ أي $C = 2$

ومنه $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$

التمرين 83

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء

نعتبر النقط:

$A(3;-2;4)$

$B(1;0;-5)$

$C(4;-1;6)$

1) عين إحداثيات (أو المركبات السلمية) للأشعة $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ و $\vec{BC}$

2) احسب إحداثيات I منتصف $[BC]$

3) احسب الأطوال AB ، AC ، BC

4) هل الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطان خطيا؟

$M(x, y, z)$

فاصلة abscisse

ترتيب ordonnée

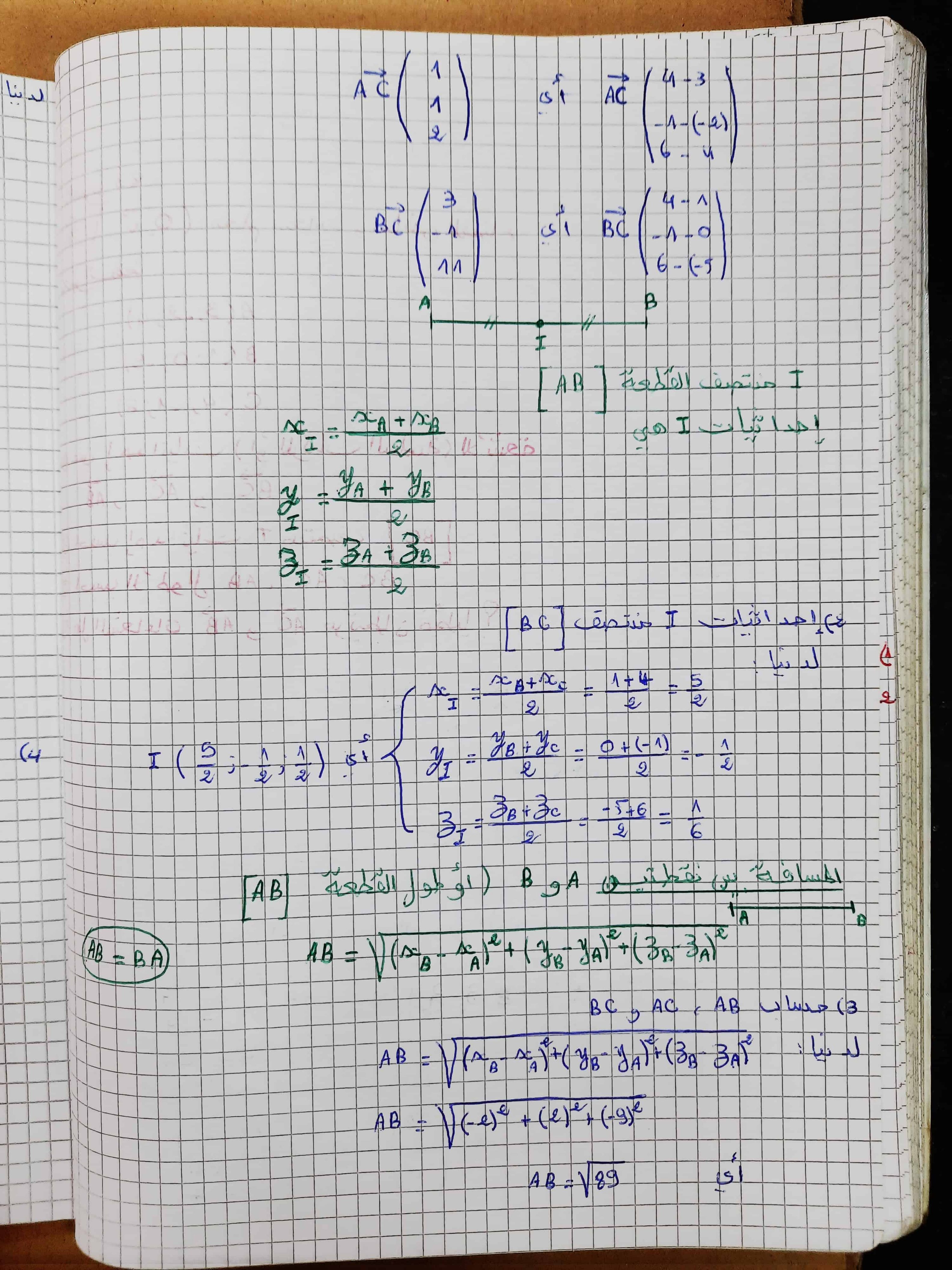
راقم cote

إحداثيات (أو المركبات السلمية) لشعاع

$\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$ أو $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

1) تعيين إحداثيات $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ و $\vec{BC}$

لدينا: $\vec{AB}\begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-(-2) \\ -5-4 \end{pmatrix}$ أي $\vec{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$



لدينا

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-3\\-1-(-2)\\6-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-1\\11\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4-1\\-1-0\\6-(-5)\end{pmatrix}$

I منتصف القطعة $[AB]$

إحداثيات I هي

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

ع) إحداثيات I منتصف $[BC]$

1

لدينا:

2

$$x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+(-1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{-5+6}{2} = \frac{1}{6}$$

(4

أي $I\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

المسافة بين نقطتين A و B (أو طول القطعة $[AB]$)

$AB = BA$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

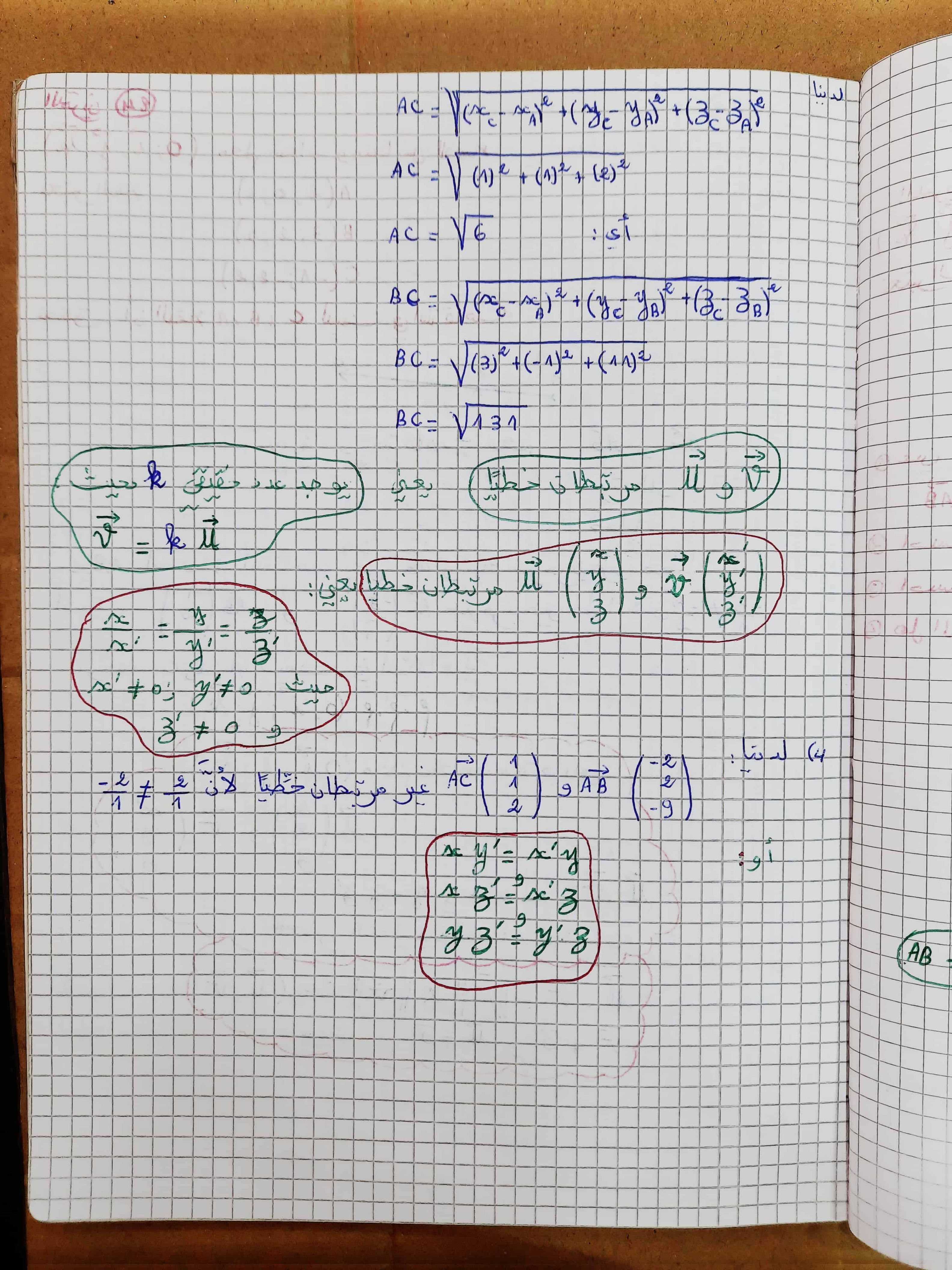
3) حساب AB ، AC و BC

لدينا:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (-9)^2}$$

أي $AB = \sqrt{89}$



لدينا

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}$$

$$AC = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2}$$

أي: $AC = \sqrt{6}$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2}$$

$$BC = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (11)^2}$$

$$BC = \sqrt{131}$$

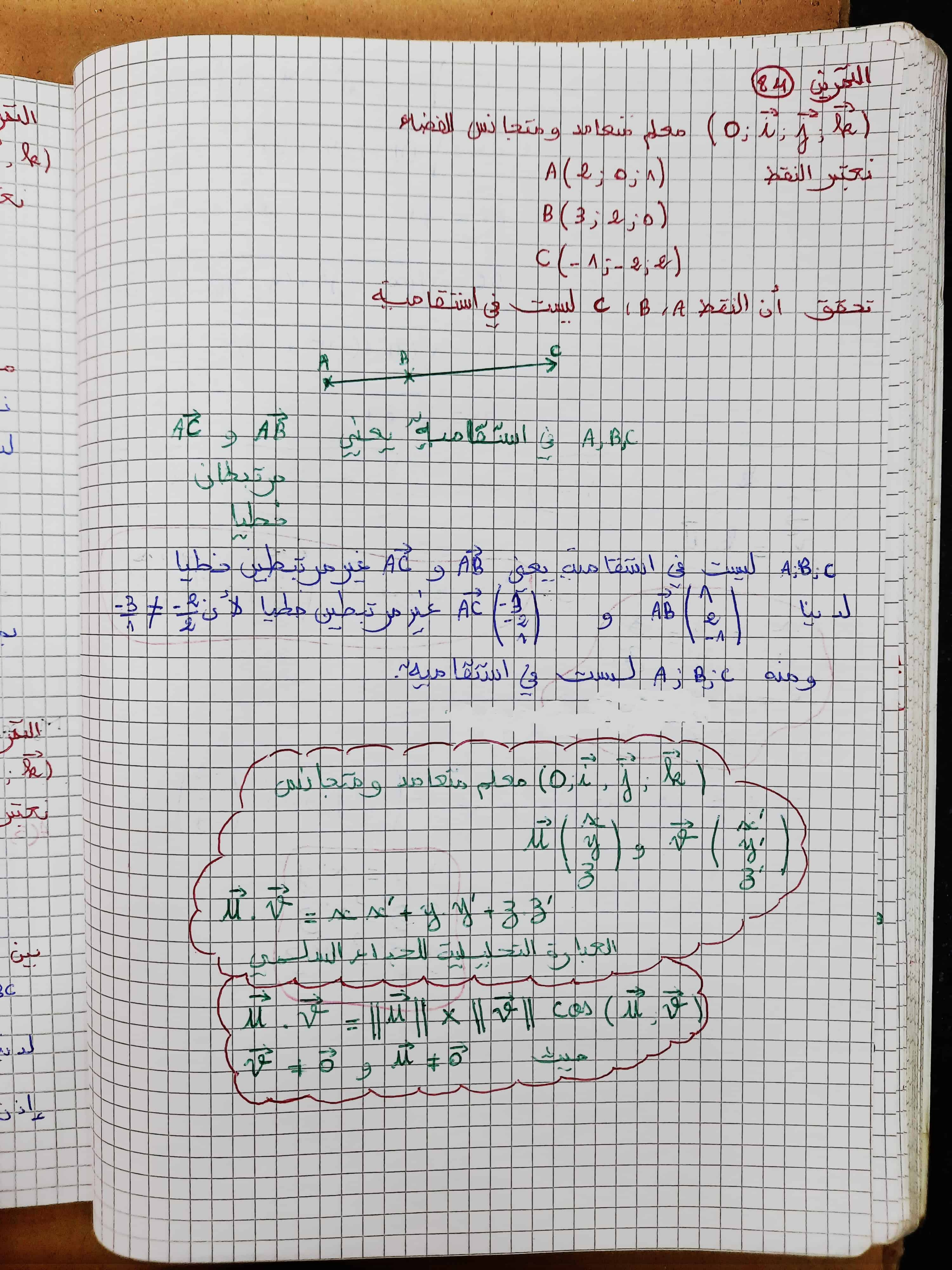
$\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا يعني: يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\vec{v} = k\vec{u}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا يعني: $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$ حيث $x' \neq 0$ ، $y' \neq 0$ و $z' \neq 0$

4) لدينا: $\vec{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ غير مرتبطان خطيا لأن $\frac{2}{1} \neq \frac{-2}{1}$

أو:

$$xy' = x'y$$
و
$$xz' = x'z$$
و
$$yz' = y'z$$



التمرين 41

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء

نعتبر النقط $A(2;0;1)$

$B(3;2;0)$

$C(-1;-2;2)$

تحقق أن النقط A ، B ، C ليست في استقامية

A,B,C في استقامية يعني $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطان خطيا

A;B;C ليست في استقامية يعني $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{-2}{2} \neq \frac{-3}{1}$

ومنه A;B;C ليست في استقامية.

$(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس

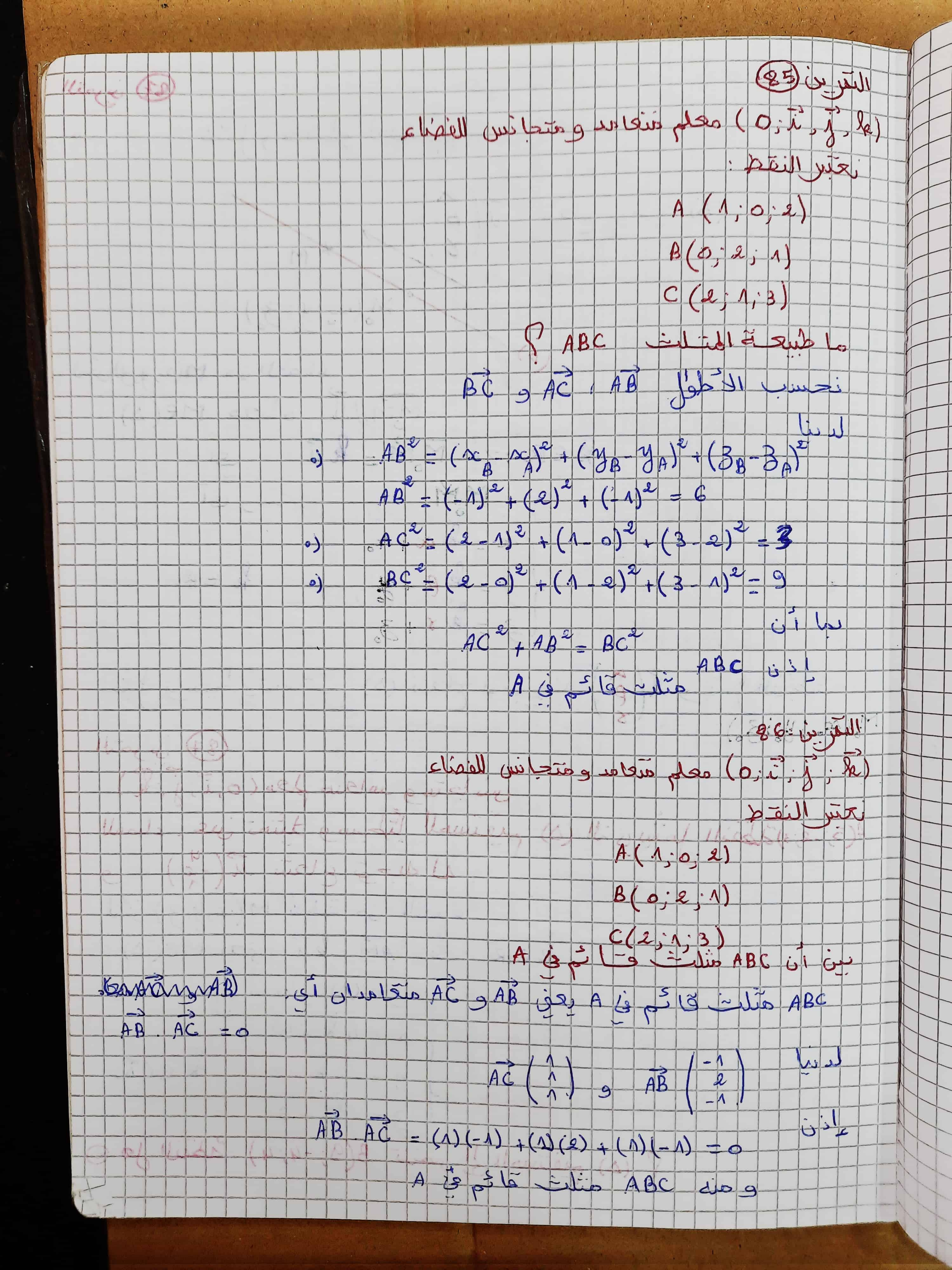
$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$

العبارة التحليلية للجداء السلمي

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u},\vec{v})$

حيث $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$



التمرين 45

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء

نعتبر النقط :

$A(1;0;2)$

$B(0;2;1)$

$C(2;1;3)$

ما طبيعة المثلث ABC ؟

نحسب الأطوال $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ و $\vec{BC}$

لدينا

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

$$AB^2 = (-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2 = 6$$

$$AC^2 = (2-1)^2 + (1-0)^2 + (3-2)^2 = 3$$

$$BC^2 = (2-0)^2 + (1-2)^2 + (3-1)^2 = 9$$

بما أن

$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$

إذن ABC مثلث قائم في A

التمرين 46

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء

نعتبر النقط

$A(1;0;2)$

$B(0;2;1)$

$C(2;1;3)$

بين أن ABC مثلث قائم في A

ABC مثلث قائم في A يعني $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ متعامدان أي

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

إذن

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (1)(-1) + (1)(2) + (1)(-1) = 0$$

ومنه ABC مثلث قائم في A

التمرين 87

تمثيل وسيطي لمستقيم

$\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (Δ)

M

$M_0(x_0; y_0; z_0)$

(Δ)

لتكن $M(x;y;z)$ من الفضاء

$M \in (\Delta)$ معناه $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{u}$

أي $\overrightarrow{M_0M} = k\vec{u}$ مع: $k \in \mathbb{R}$

ومنه:

$$\begin{cases} x = k\alpha + x_0 \\ y = k\beta + y_0 \\ z = k\gamma + z_0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

تمثيل وسيطي لمستقيم (Δ) شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $M_0(x_0; y_0; z_0)$

التمرين 87

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء، عين تمثيلا وسيطيًا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(5;-2;3)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (\Delta)$ يعني $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ حيث $k \in \mathbb{R}$

ومنه تمثيل وسيطي (Δ) هو:

$$\begin{cases} x = 4k + 5 \\ y = -2k - 2 \\ z = k + 3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

هل النقطة $B(9; -4; 4)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) ؟

$B \in (\Delta)$ يعني

$$\begin{cases} x_B = 4k + 5 \\ y_B = -2k - 2 \\ z_B = k + 3 \end{cases}$$ تقبل حلا وحيدا

أي:

$$\begin{cases} 9 = 4k + 5 \\ -4 = -2k - 2 \\ 4 = k + 3 \end{cases}$$ تقبل حلا وحيدا

بما أن

$$\begin{cases} k = 1 \\ -4 = -2(1) - 2 \quad (\text{محققة}) \\ 4 = 1 + 3 \quad (\text{محققة}) \end{cases}$$ إذن $B \in (\Delta)$

طـ2) $B \in (\Delta)$ يعني $\vec{AB}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ أي $\vec{AB} = \vec{u}$

ومنه $B \in (\Delta)$

3) هل النقطة $E(3;-7;2)$ تنتمي لـ (Δ)

$E \in (\Delta)$ معناه $\vec{u}$ و $\vec{AE}$ مرتبطان خطيا

لدينا $\vec{AE}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا

لأن $\frac{4}{-2} \neq \frac{-2}{-5}$

ومنه $E \notin (\Delta)$

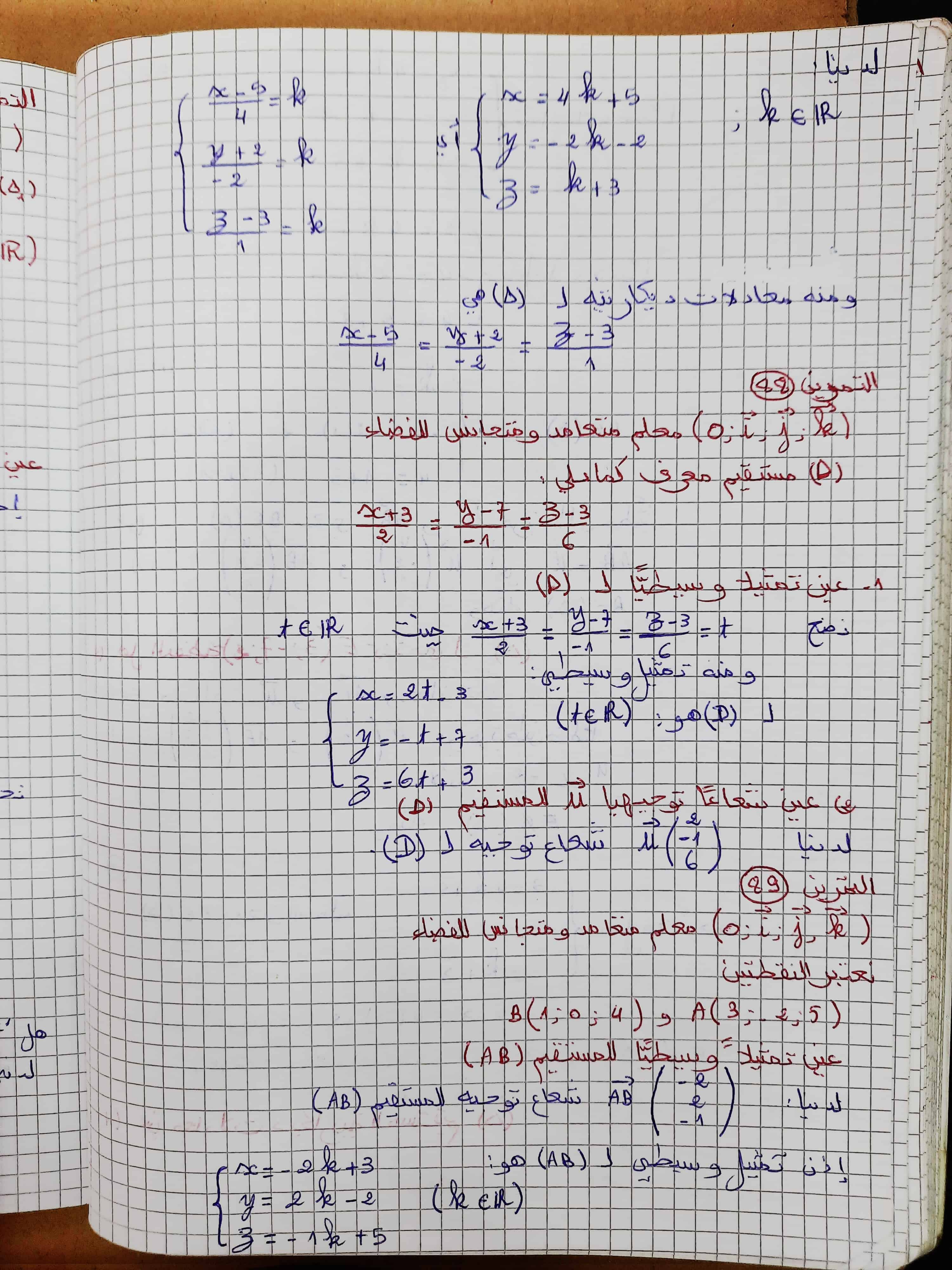
طـ2) $E \in (\Delta)$ يعني الجملة

$$\begin{cases} 3 = 4k + 5 \\ -7 = -2k - 2 \\ 2 = k + 3 \end{cases}$$ تقبل حلا وحيدا

بما أن

$$\begin{cases} 3 = 4(-1) + 5 \quad (\text{غير محققة}) \\ -7 = -2(-1) - 2 \quad (\text{غير محققة}) \\ k = -1 \end{cases}$$ إذن: $E \notin (\Delta)$

4) عين معادلات ديكارتية للمستقيم (Δ)



لدينا:

$$\begin{cases} x = 4k + 5 \\ y = -2k - 2 \\ z = k + 3 \end{cases} \quad ; k \in \mathbb{R}$$

أي:

$$\begin{cases} \frac{x-5}{4} = k \\ \frac{y+2}{-2} = k \\ \frac{z-3}{1} = k \end{cases}$$

ومنه معادلات ديكارتية لـ (Δ) هي

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

التمرين (48)

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء

(D) مستقيم معرف كما يلي:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-3}{6}$$

1- عين تمثيلا وسيطيا لـ (D)

نضع $\frac{x+3}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-3}{6} = t$ حيث $t \in \mathbb{R}$

ومنه تمثيل وسيطي لـ (D) هو: $(t \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -t + 7 \\ z = 6t + 3 \end{cases}$$

2) عين شعاعا توجيهيا $\vec{u}$ للمستقيم (D)

لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (D).

التمرين (49)

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء

نعتبر النقطتين

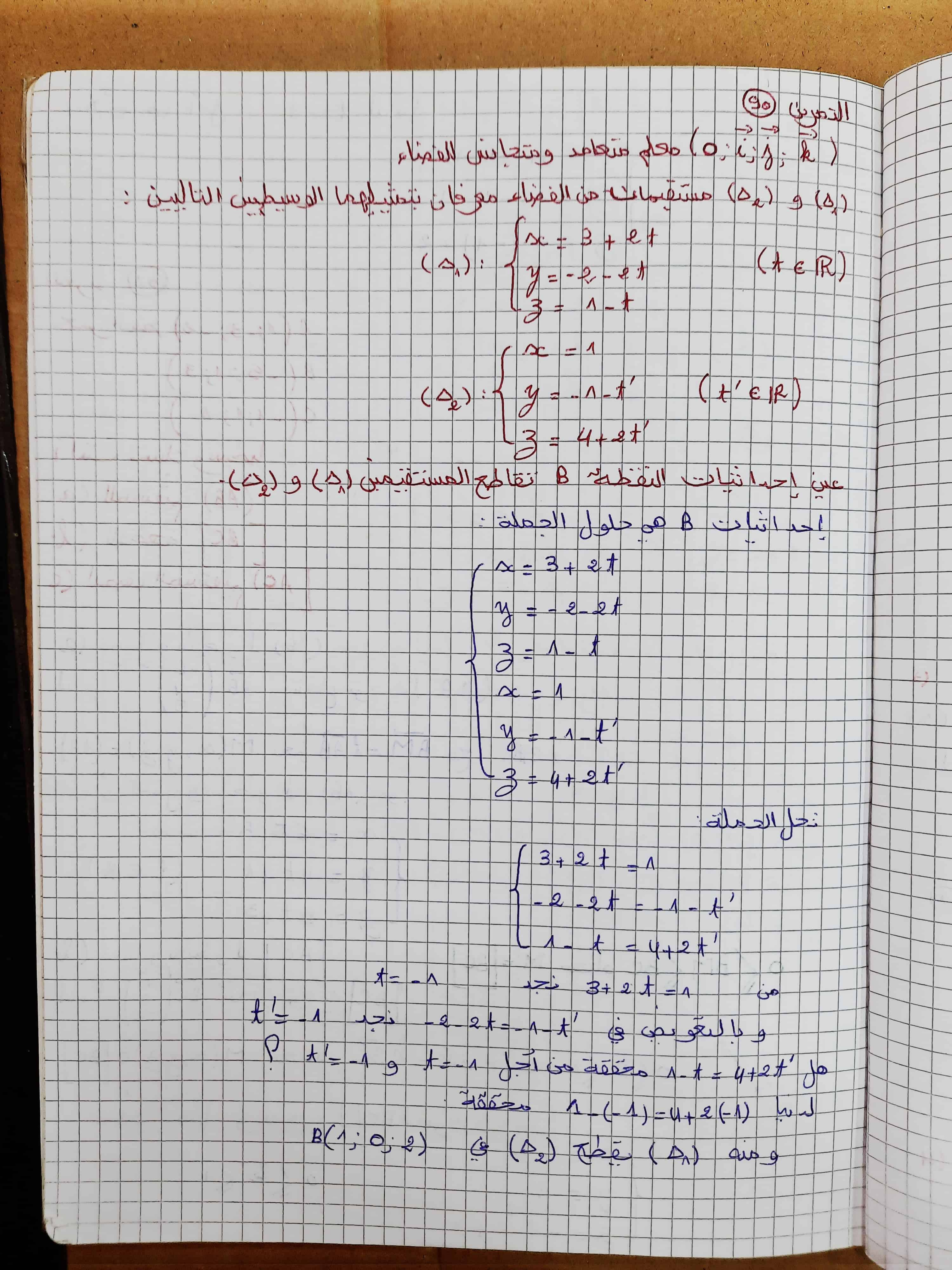
$A(3; -2; 5)$ و $B(1; 0; 4)$

عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

لدينا: $\vec{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (AB)

إذن تمثيل وسيطي لـ (AB) هو: $(k \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} x = -2k + 3 \\ y = 2k - 2 \\ z = -1k + 5 \end{cases}$$



التمرين 90

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين :

$$(\Delta_1) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(\Delta_2) : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

عين إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

إحداثيات B هي حلول الجملة :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \\ x = 1 \\ y = -1 - t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases}$$

نحل الجملة :

$$\begin{cases} 3 + 2t = 1 \\ -2 - 2t = -1 - t' \\ 1 - t = 4 + 2t' \end{cases}$$

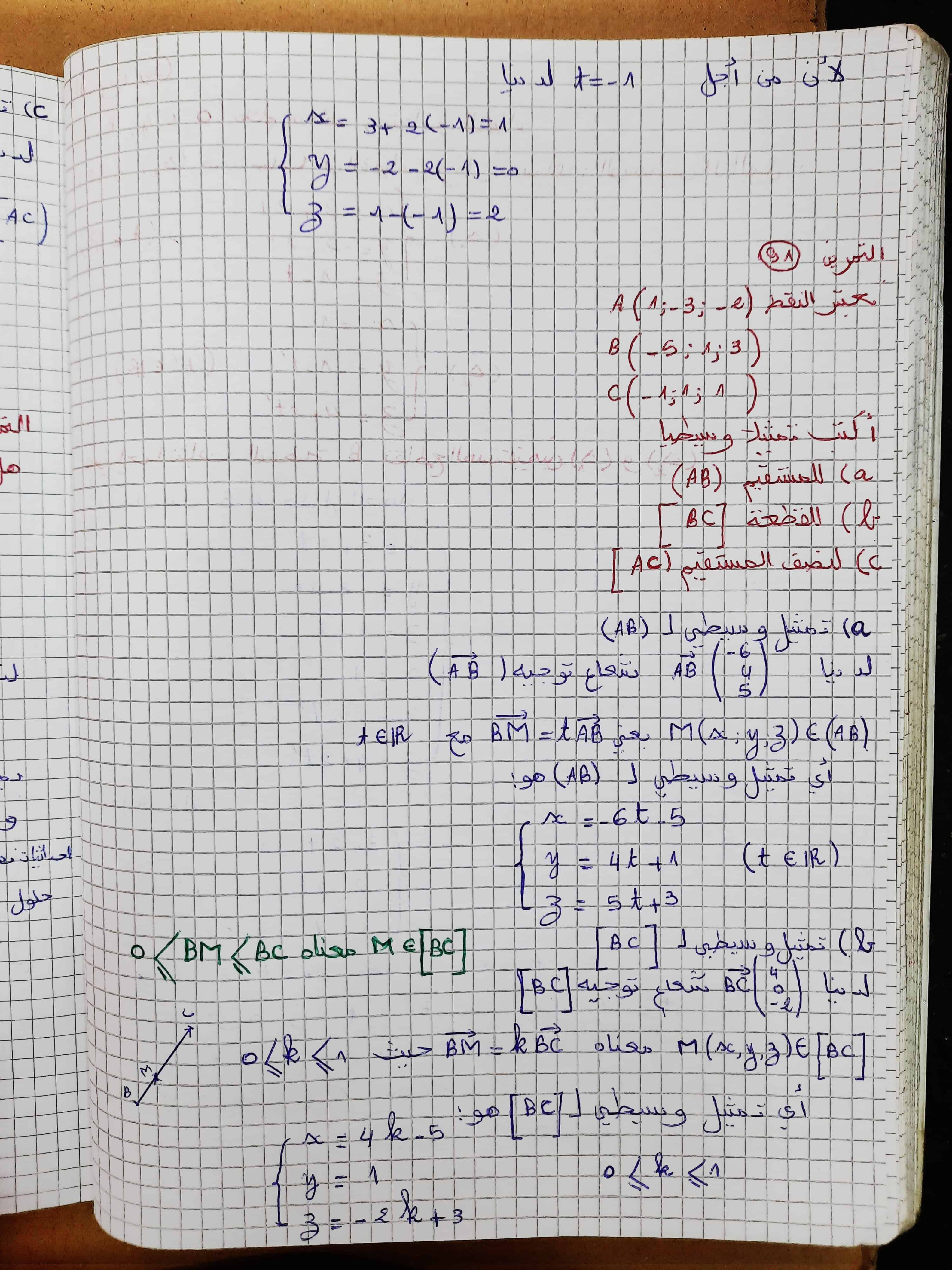
من $3 + 2t = 1$ نجد $t = -1$

وبالتعويض في $-2 - 2t = -1 - t'$ نجد $t' = -1$

هل $1 - t = 4 + 2t'$ محققة من أجل $t = -1$ و $t' = -1$ ؟

لدينا $1 - (-1) = 4 + 2(-1)$ محققة

ومنه (Δ_1) يقطع (Δ_2) في $B(1; 0; 2)$



لأن من أجل $t=-1$ لدينا

$$\begin{cases} x = 3+2(-1)=1 \\ y = -2-2(-1)=0 \\ z = 1-(-1)=2 \end{cases}$$

التمرين 98

نعتبر النقط $A(1;-3;-2)$

$B(-5;1;3)$

$C(-1;1;1)$

أكتب تمثيلا وسيطيا

a) للمستقيم (AB)

b) القطعة $[BC]$

c) لنصف المستقيم $[AC)$

a) تمثيل وسيطي لـ (AB)

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}-6\\4\\5\end{pmatrix}$ شعاع توجيه $(\vec{AB})$

$M(x;y;z)\in(AB)$ يعني $\vec{BM}=t\vec{AB}$ مع $t\in\mathbb{R}$

أي تمثيل وسيطي لـ (AB) هو:

$$\begin{cases} x = -6t-5 \\ y = 4t+1 \\ z = 5t+3 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

b) تمثيل وسيطي لـ $[BC]$

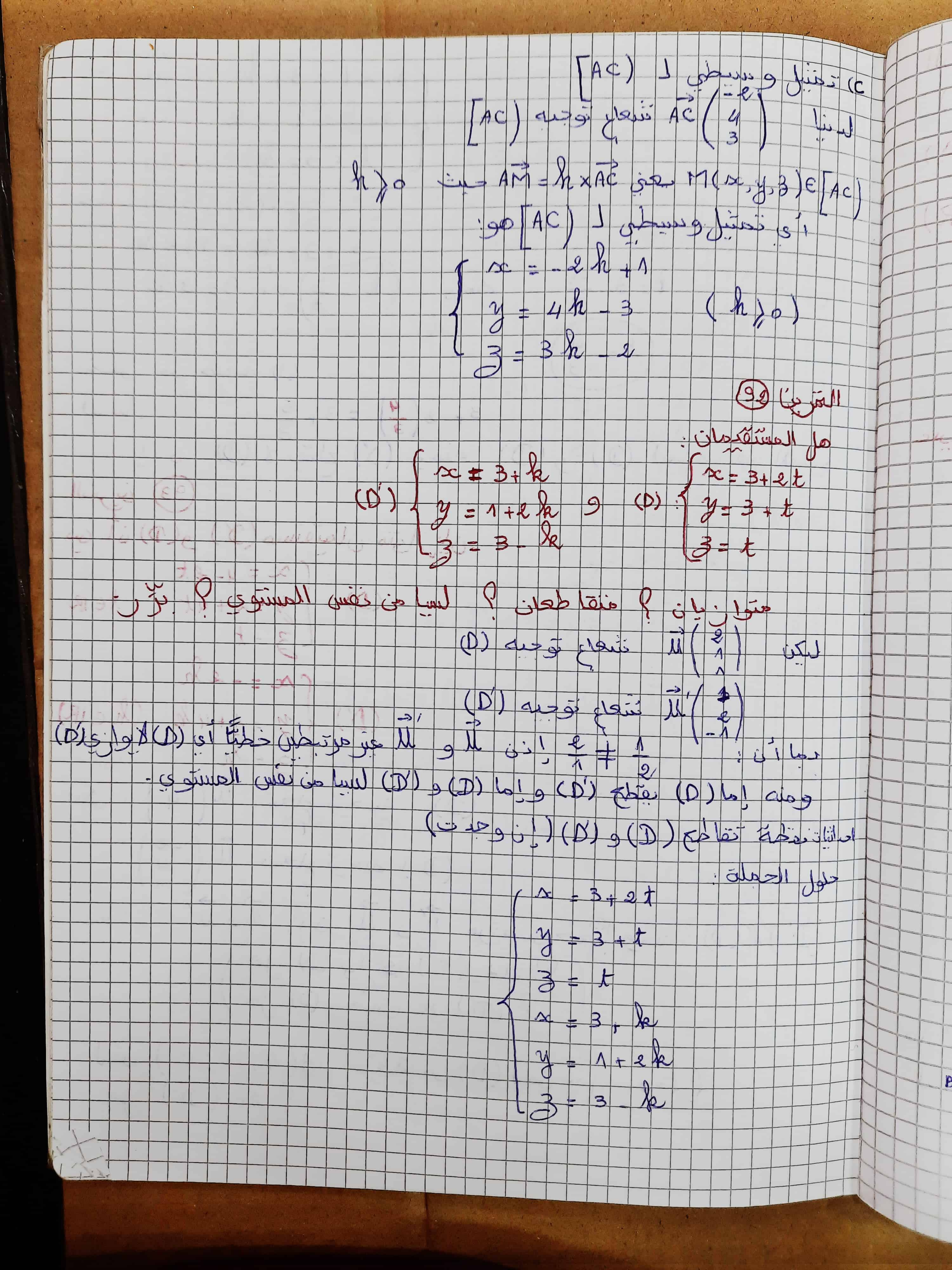
لدينا $\vec{BC}\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه $[BC]$

$M\in[BC]$ معناه $0\leqslant BM\leqslant BC$

$M(x,y,z)\in[BC]$ معناه $\vec{BM}=k\vec{BC}$ حيث $0\leqslant k\leqslant 1$

أي تمثيل وسيطي لـ $[BC]$ هو:

$$\begin{cases} x = 4k-5 \\ y = 1 \\ z = -2k+3 \end{cases} \quad 0\leqslant k\leqslant 1$$



c) تمثيل وسيطي لـ $[AC)$

لدينا $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه $[AC)$

$M(x,y,z)\in[AC)$ يعني $\vec{AM}=k\times\vec{AC}$ حيث $k\geq 0$

أي تمثيل وسيطي لـ $[AC)$ هو:

$$\begin{cases} x=-2k+1 \\ y=4k-3 \\ z=3k-2 \end{cases} \quad (k\geq 0)$$

التمرين 92

هل المستقيمان:

$$(D):\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases} \quad \text{و} \quad (D'):\begin{cases} x=3+k \\ y=1+2k \\ z=3-k \end{cases}$$

متوازيان؟ متقاطعان؟ ليسا من نفس المستوي؟ برّر.

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D)

$\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D')

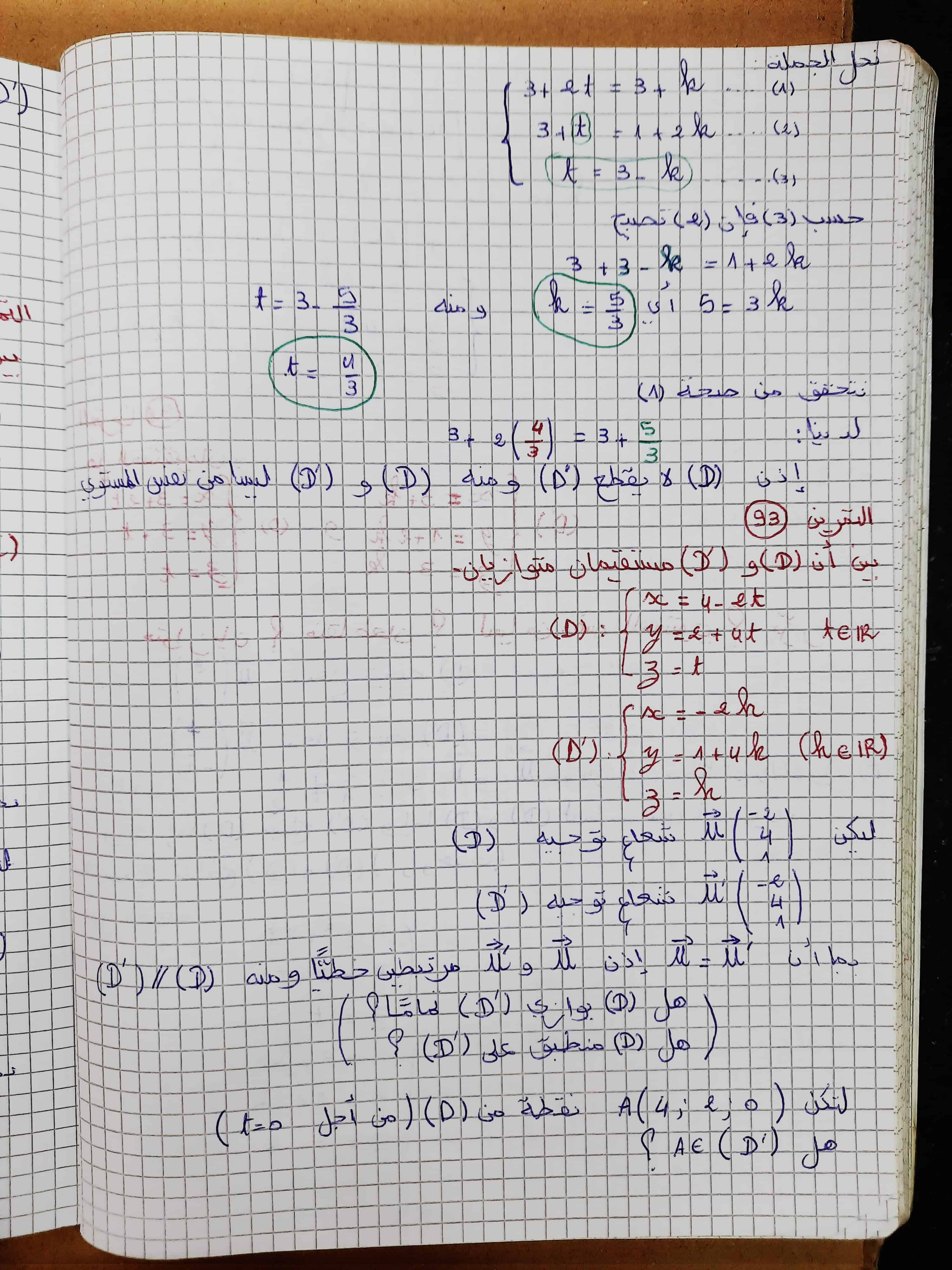
بما أن: $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}$ إذن $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيًا أي (D) لا يوازي (D')

ومنه إما (D) يقطع (D') وإما (D) و (D') ليسا من نفس المستوي.

احداثيات نقطة تقاطع (D) و (D') (إن وجدت)

حلول الجملة:

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=t \\ x=3+k \\ y=1+2k \\ z=3-k \end{cases}$$



نحل الجملة:

$$\begin{cases} 3+2t = 3+k & \dots (1) \\ 3+t = 1+2k & \dots (2) \\ t = 3-k & \dots (3) \end{cases}$$

حسب (3) فإن (2) تصبح

$$3+3-k = 1+2k$$

$5 = 3k$ أي $k = \frac{5}{3}$ ومنه $t = 3 - \frac{5}{3}$

$$t = \frac{4}{3}$$

نتحقق من صحة (1)

لدينا: $3+2\left(\frac{4}{3}\right) = 3+\frac{5}{3}$

إذن (D) لا يقطع (D') ومنه (D) و (D') ليسا من نفس المستوي

التمرين (93)

بين أن (D) و (D') مستقيمان متوازيان ان.

$$(D): \begin{cases} x = 4-2t \\ y = 2+4t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(D'): \begin{cases} x = -2k \\ y = 1+4k \\ z = k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D)

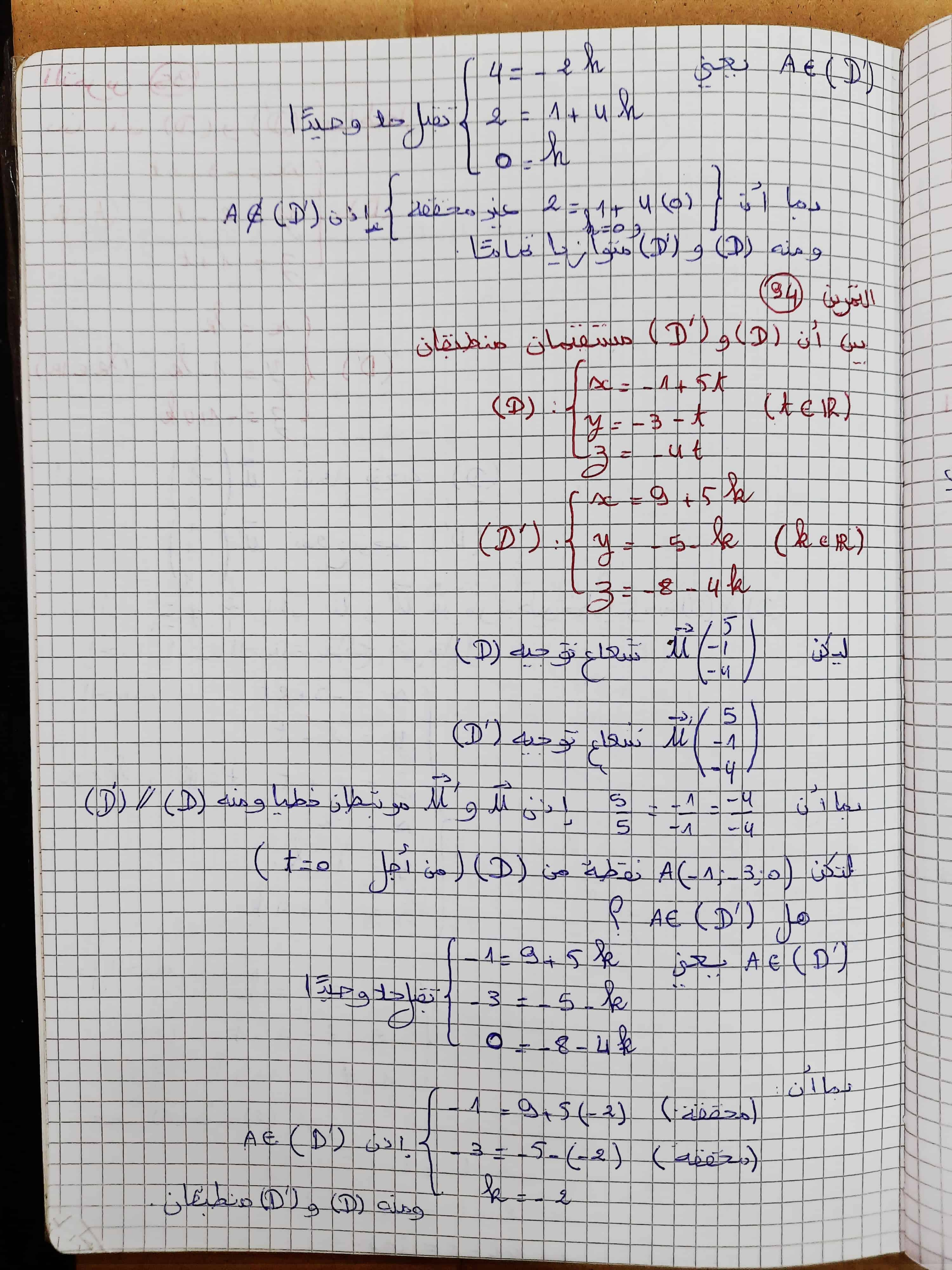
$\vec{u'}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D')

بما أن $\vec{u} = \vec{u'}$ إذن $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ مرتبطين خطياً ومنه $(D') \parallel (D)$

(هل (D) يوازي (D') تماماً ؟
هل (D) منطبق على (D') ؟)

لتكن $A(4 ; 2 ; 0)$ نقطة من (D) (من أجل $t=0$)

هل $A \in (D')$ ؟



$A \in (D')$ يعني
$$\begin{cases} 4 = -2k \\ 2 = 1 + 4k \\ 0 = k \end{cases}$$
تقبل حلا وحيدا

بما أن $\{ 2 = 1 + 4(0)$ غير محققة ($k = 0$) إذن $A \notin (D')$

ومنه (D) و (D') متوازيان تماما.

التمرين 94

بين أن (D) و (D') مستقيمان منطبقان

$$(D) : \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(D') : \begin{cases} x = 9 + 5k \\ y = -5 - k \\ z = -8 - 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D)

$\vec{u'}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D')

بما أن $\frac{5}{5} = \frac{-1}{-1} = \frac{-4}{-4}$ إذن $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ مرتبطان خطيا ومنه $(D) \parallel (D')$

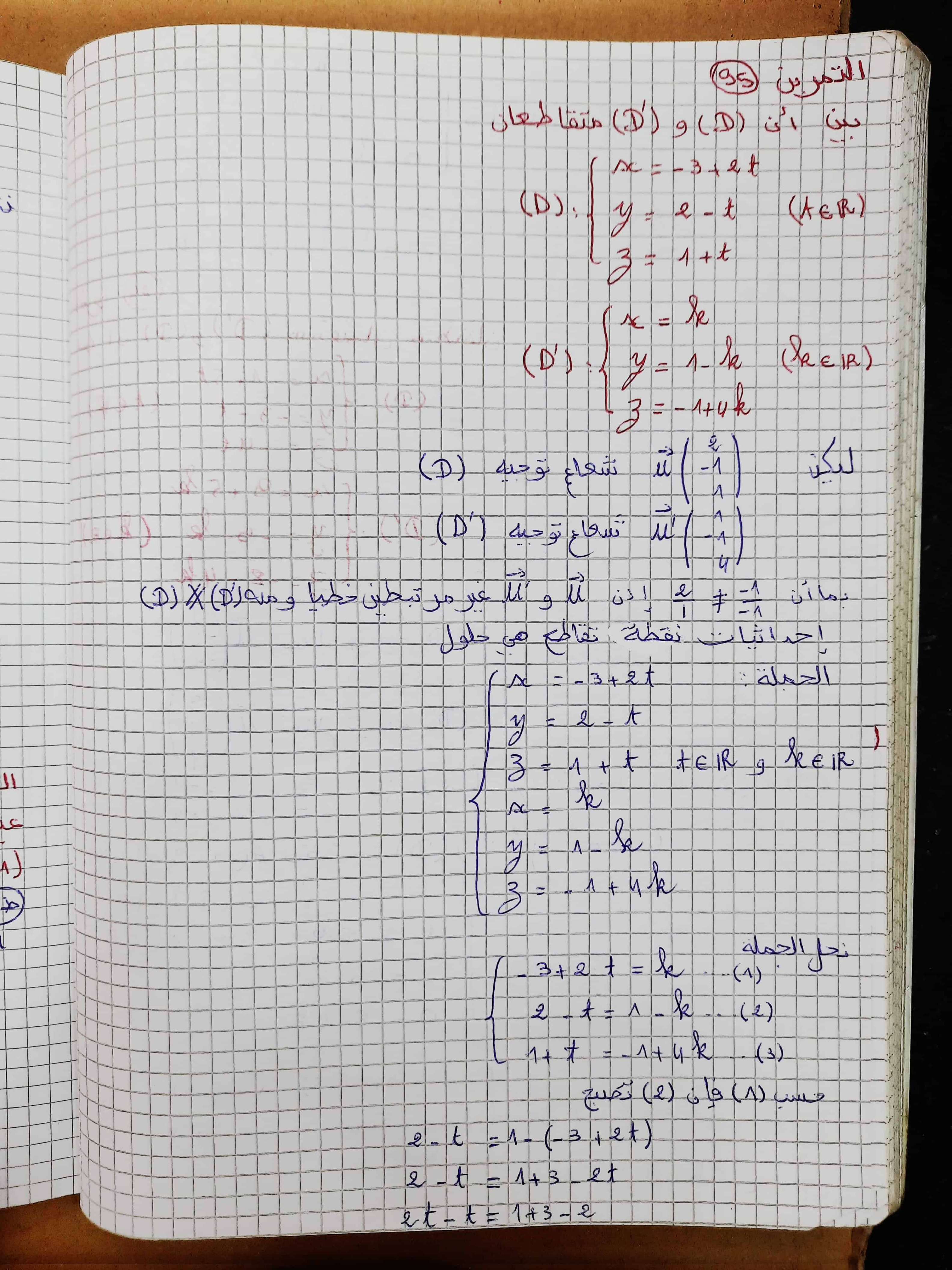
لتكن $A(-1;-3;0)$ نقطة من (D) (من أجل $t = 0$)

هل $A \in (D')$ ؟

$A \in (D')$ يعني
$$\begin{cases} -1 = 9 + 5k \\ -3 = -5 - k \\ 0 = -8 - 4k \end{cases}$$
تقبل حلا وحيدا

بما أن:
$$\begin{cases} -1 = 9 + 5(-2) & \text{(محققة)} \\ -3 = -5 - (-2) & \text{(محققة)} \\ k = -2 \end{cases}$$
إذن $A \in (D')$

ومنه (D) و (D') منطبقان.



التمرين 95

بين أن (D) و (D') متقاطعان

$$(D):\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

$$(D'):\begin{cases} x = k \\ y = 1-k \\ z = -1+4k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{R})$$

لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D)

$\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D')

بما أن $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-1}$ إذن $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا ومنه $(D) \nparallel (D')$

إحداثيات نقطة تقاطع هي حلول الجملة:

$$\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \quad t\in\mathbb{R} \text{ و } k\in\mathbb{R} \\ x = k \\ y = 1-k \\ z = -1+4k \end{cases}$$

نحل الجملة

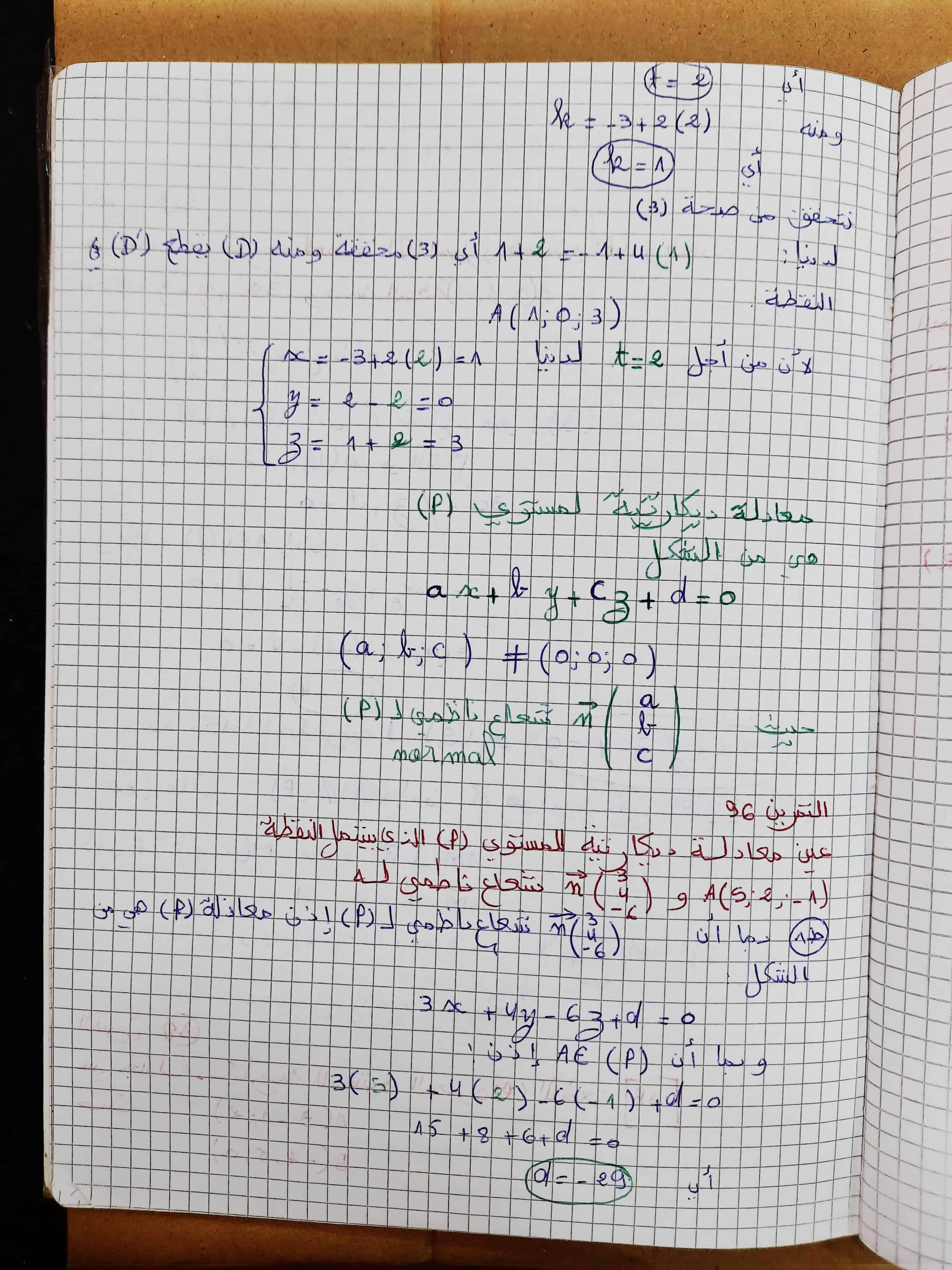
$$\begin{cases} -3+2t = k \quad ...(1) \\ 2-t = 1-k \quad ...(2) \\ 1+t = -1+4k \quad ...(3) \end{cases}$$

حسب (1) فإن (2) تصبح

$$2-t = 1-(-3+2t)$$

$$2-t = 1+3-2t$$

$$2t-t = 1+3-2$$



أي $t = 2$

ومنه $k = -3 + 2(2)$

أي $k = 1$

نتحقق من صحة (3)

لدينا: $1 + 2 = -1 + 4$ (1) أي (3) محققة ومنه (D) يقطع (D') في النقطة

$$A(1;0;3)$$

لأن من أجل $t = 2$ لدينا

$$\begin{cases} x = -3 + 2(2) = 1 \\ y = 2 - 2 = 0 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

معادلة ديكارتية لمستوي (P) هي من الشكل

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$(a;b;c) \neq (0;0;0)$$

حيث $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P)

normal

التمرين 96

عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(5;2;-1)$ و $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له

(1) بما أن $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P) إذن معادلة (P) هي من الشكل:

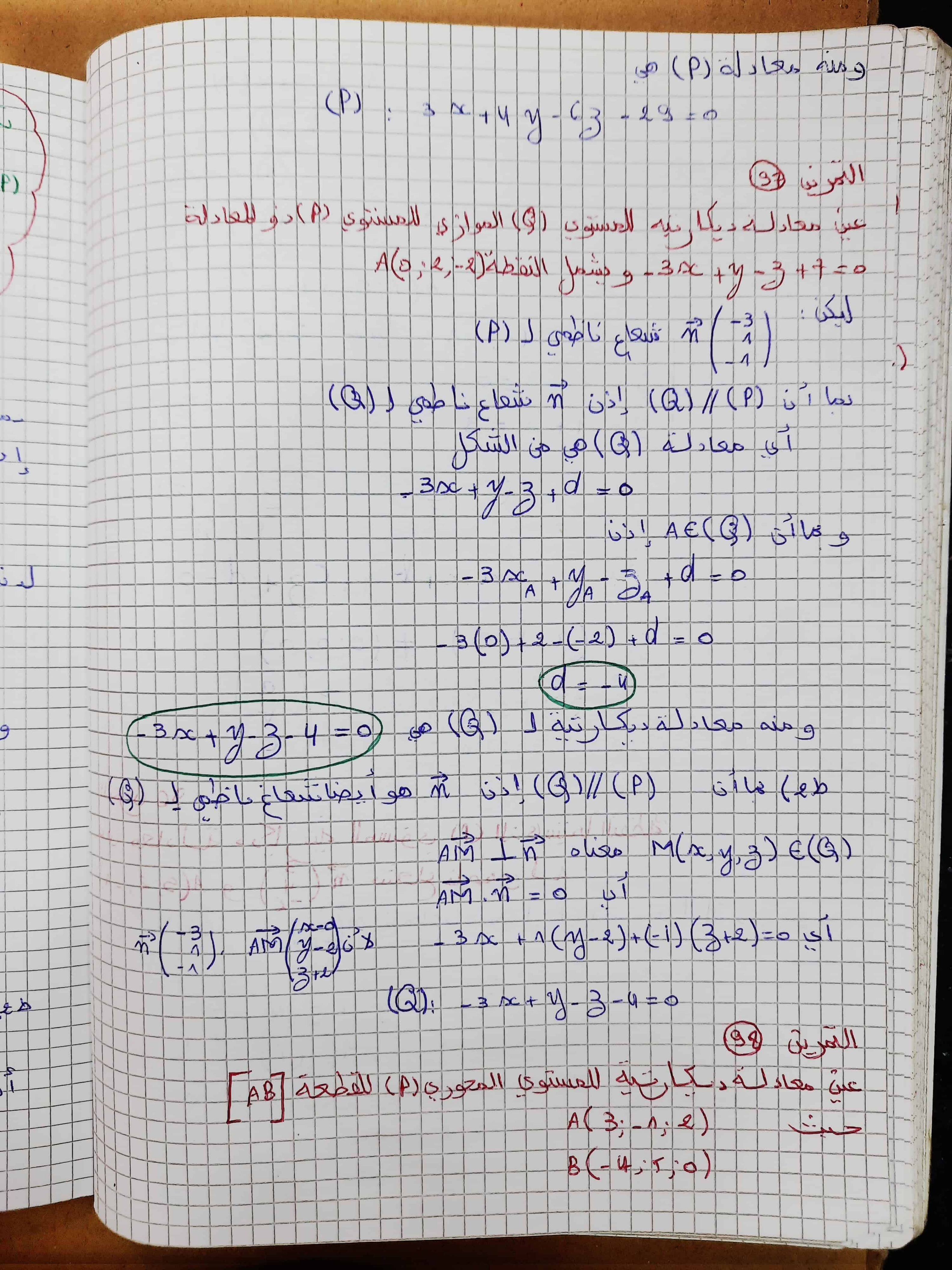
$$3x + 4y - 6z + d = 0$$

وبما أن $A \in (P)$ إذن:

$$3(5) + 4(2) - 6(-1) + d = 0$$

$$15 + 8 + 6 + d = 0$$

أي $d = -29$



ومنه معادلة (P) هي

$(P) : 3x + 4y - 6z - 29 = 0$

التمرين 97

عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الموازي للمستوي (P) ذو المعادلة $-3x + y - z + 7 = 0$ ويشمل النقطة $A(0;2;-2)$

ليكن: $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P)

بما أن $(Q)//(P)$ إذن $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (Q)

أي معادلة (Q) هي من الشكل

$-3x + y - z + d = 0$

وبما أن $A \in (Q)$ إذن

$-3x_A + y_A - z_A + d = 0$

$-3(0) + 2 - (-2) + d = 0$

$d = -4$

ومنه معادلة ديكارتية لـ (Q) هي $-3x + y - z - 4 = 0$

ط2) بما أن $(P)//(Q)$ إذن $\vec{n}$ هو أيضا شعاع ناظمي لـ (Q)

$M(x,y,z) \in (Q)$ معناه $\vec{AM} \perp \vec{n}$

أي $\vec{AM}\cdot\vec{n} = 0$

أي $-3x + 1(y-2) + (-1)(z+2) = 0$

لدينا $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y-2\\z+2\end{pmatrix}$ ، $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$

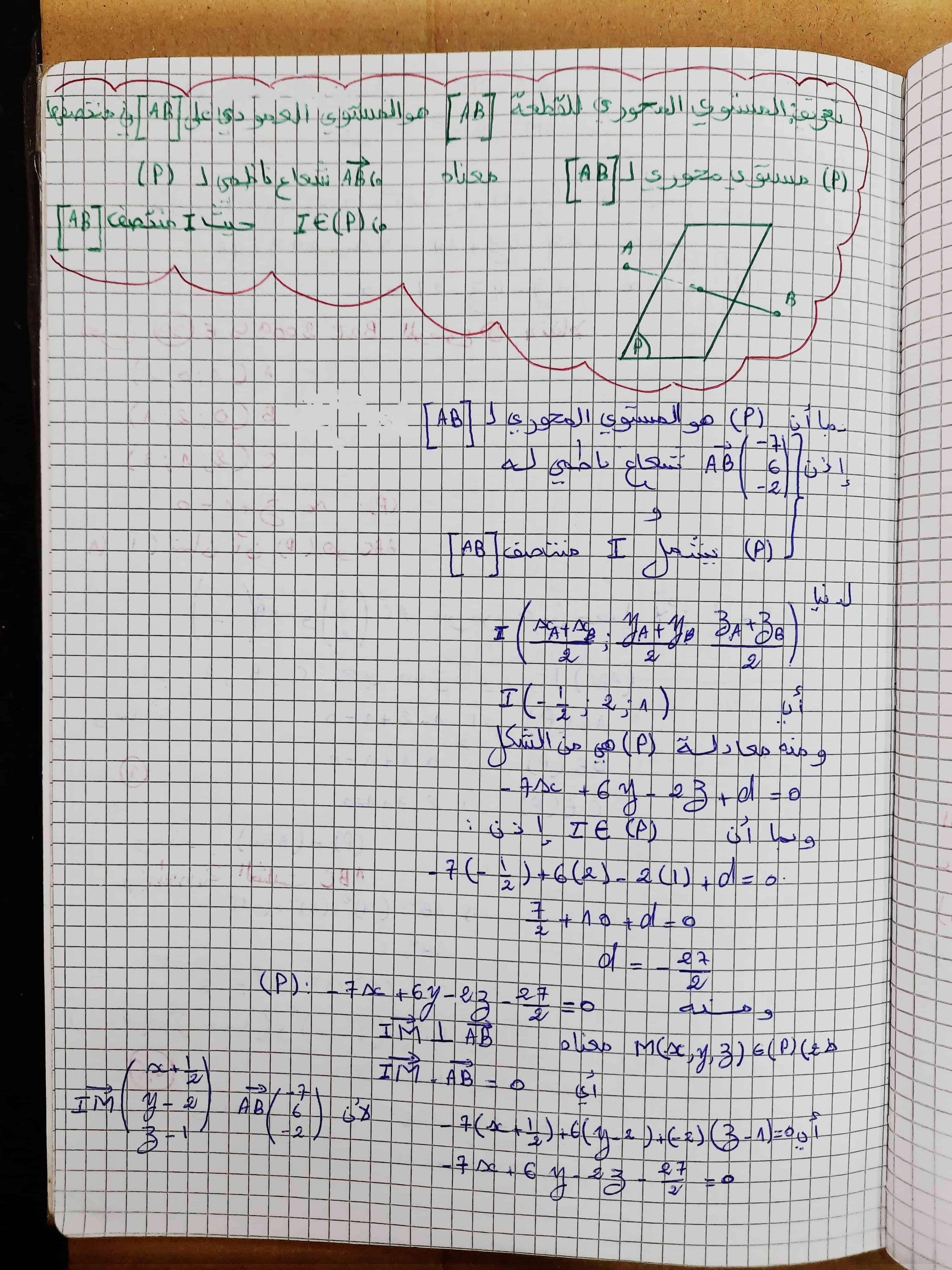
$(Q): -3x + y - z - 4 = 0$

التمرين 98

عيّن معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (P) للقطعة $[AB]$

حيث $A(3;-1;2)$

$B(-4;5;0)$



تعريف: المستوي المحوري للقطعة [AB] هو المستوي العمودي على [AB] في منتصفها

(P) مستوي محوري لـ [AB] معناه $\vec{AB}$ شعاع ناظمي لـ (P)

و $I \in (P)$ حيث I منتصف [AB]

بما أن (P) هو المستوي المحوري لـ [AB]

إذن: $\vec{AB}\begin{pmatrix}-7\\6\\-2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له

و

(P) يشمل I منتصف [AB]

لدينا

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

أي $I\left(-\frac{1}{2};2;1\right)$

ومنه معادلة (P) هي من الشكل

$$-7x+6y-2z+d=0$$

وبما أن $I \in (P)$ إذن:

$$-7\left(-\frac{1}{2}\right)+6(2)-2(1)+d=0$$

$$\frac{7}{2}+10+d=0$$

$$d=-\frac{27}{2}$$

ومنه

$$(P): -7x+6y-2z-\frac{27}{2}=0$$

ط2) $M(x,y,z)\in(P)$ معناه $\vec{IM}\perp\vec{AB}$

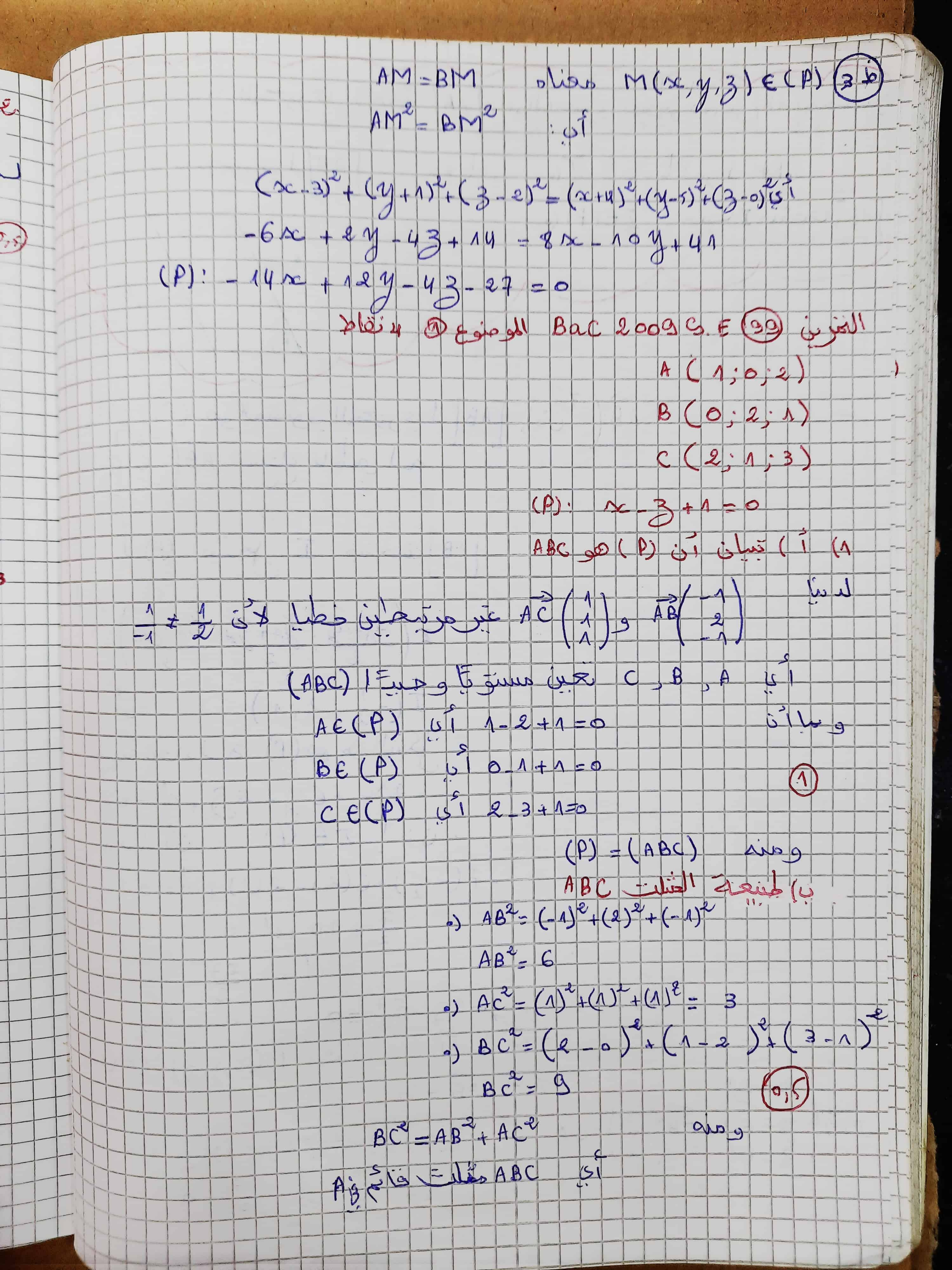
أي $\vec{IM}\cdot\vec{AB}=0$

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}-7\\6\\-2\end{pmatrix}$ و $\vec{IM}\begin{pmatrix}x+\frac{1}{2}\\y-2\\z-1\end{pmatrix}$

أي

$$-7\left(x+\frac{1}{2}\right)+6(y-2)+(-2)(z-1)=0$$

$$-7x+6y-2z-\frac{27}{2}=0$$



ط 3) $M(x,y,z)\in(P)$ معناه $AM=BM$

أي: $AM^2=BM^2$

أي $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=(x+4)^2+(y-5)^2+(z-0)^2$

$-6x+2y-4z+14=8x-10y+41$

$(P): -14x+12y-4z-27=0$

التمرين (99) BAC 2009 G.E الموضوع (1) 4 نقاط

$A(1;0;2)$

$B(0;2;1)$

$C(2;1;3)$

$(P): x-z+1=0$

1) أ) تبيان أن (P) هو (ABC)

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{2}$

أي A ، B ، C تعين مستويا وحيدا (ABC)

وبما أن $1-2+1=0$ أي $A\in(P)$

$0-1+1=0$ أي $B\in(P)$

$2-3+1=0$ أي $C\in(P)$

(1)

ومنه $(P)=(ABC)$

ب) طبيعة المثلث ABC

- $AB^2=(-1)^2+(2)^2+(-1)^2$

$AB^2=6$

- $AC^2=(1)^2+(1)^2+(1)^2=3$
- $BC^2=(2-0)^2+(1-2)^2+(3-1)^2$

$BC^2=9$

(0,5)

ومنه $BC^2=AB^2+AC^2$

أي ABC مثلث قائم في A

ج) أ) نتحقق أنّ $D \notin (ABC)$

لدينا

$x_D - z_D + 1 = 2 - 4 + 1 \neq 0$

إذن $D \notin (ABC)$ (0,5)

ب) طبيعة $(ABCD)$

بما $D \notin (ABCD)$ إذن $ABCD$ رباعي وجوه .

المسافة بين النقطة $A(x_A ; y_A ; z_A)$ والمستوي (P) الذي معادلته

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$d[A, (P)] = \frac{|a x_A + b y_A + c z_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3) أ) حساب $d[D ; (ABC)]$

لدينا

$$d[D, (ABC)] = \frac{|x_D - z_D + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|2 - 4 + 1|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

u.l : unité de longueur (وحدة طول)

u.a : unité d'aire (وحدة مساحة)

u.v : unité de volume (وحدة حجم)

ب) حجم $(ABCD)$ (Volume)

$$V_{(ABCD)} = \frac{1}{3} S_B \times h$$ حيث h الإرتفاع

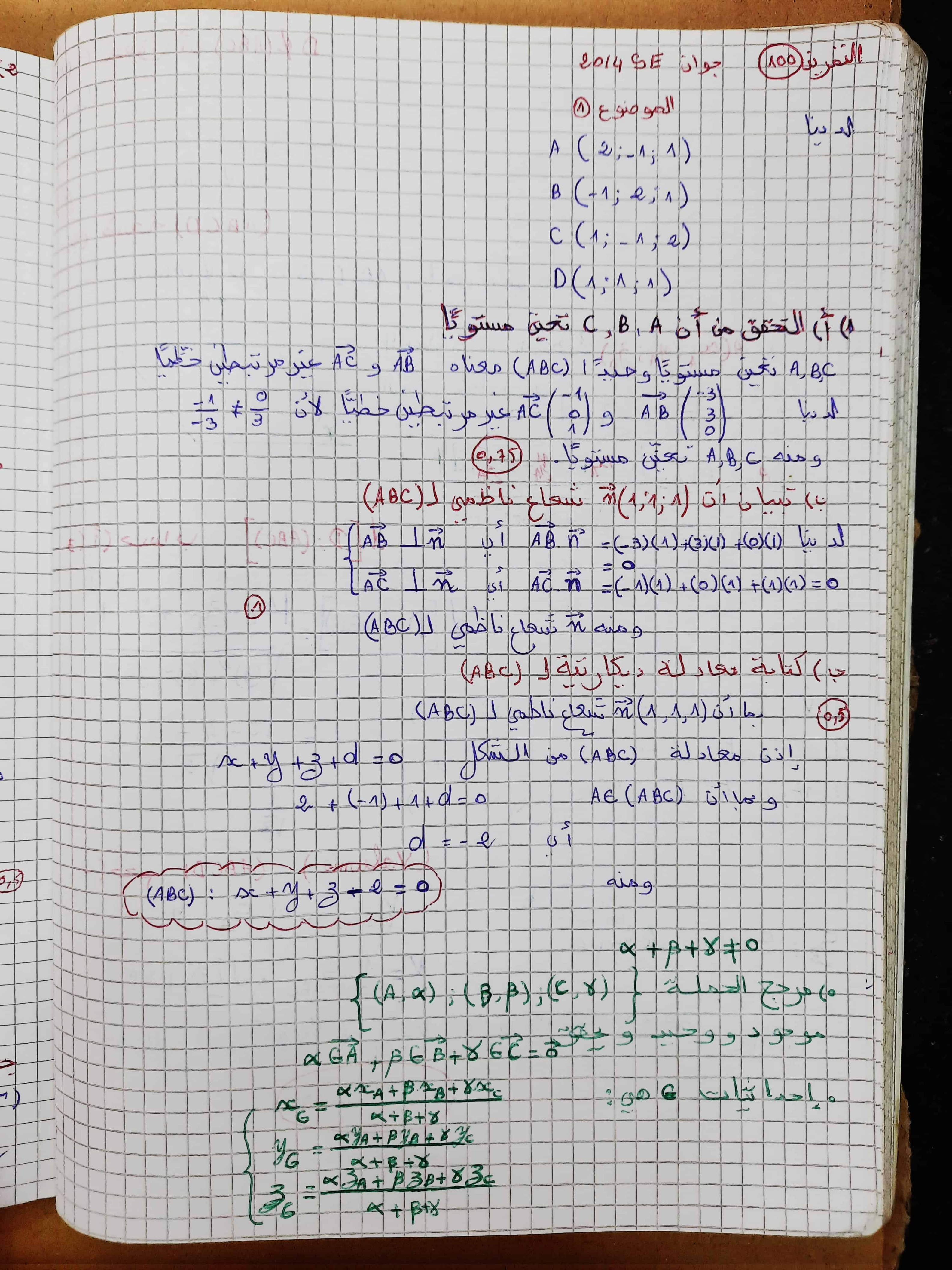
S_B : Surface de base

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \times d[D ; (ABC)]$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} u.a$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \, u.v$$

$$V = \frac{1}{2} \, u.v$$



التمرين (100) جوان 2014 SE

الموضوع (1)

لديــنا

$A(2;-1;1)$

$B(-1;2;1)$

$C(1;-1;2)$

$D(1;1;1)$

1) أ) التحقق من أن C, B, A تعين مستويا

A,B,C تعين مستويا وحيدا (ABC) معناه $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا

لديـنا $\vec{AB}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{-1}{-3} \neq \frac{0}{3}$

ومنه A,B,C تعين مستويا. (0,75)

ب) تبيان أن $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

لديـنا
$$\begin{cases}\vec{AB} \perp \vec{n} & \text{أي } \vec{AB}\cdot\vec{n} = (-3)(1)+(3)(1)+(0)(1) = 0\\ \vec{AC} \perp \vec{n} & \text{أي } \vec{AC}\cdot\vec{n} = (-1)(1)+(0)(1)+(1)(1) = 0\end{cases}$$

(1)

ومنه $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

ج) كتابة معادلة ديكارتية لـ (ABC)

(0,5) بما أن $\vec{n}(1,1,1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

إذن معادلة (ABC) من الشكل $x+y+z+d=0$

وبما أن $A \in (ABC)$: $2+(-1)+1+d=0$

أي $d=-2$

ومنه

$$(ABC):\ x+y+z-2=0$$

$\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

• مرجح الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$

موجود ووحيد ويحقق

$$\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}=\vec{0}$$

• إحداثيات G هي:

$$\begin{cases}x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\\[2mm] y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_A+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\\[2mm] z_G = \dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\end{cases}$$

2) G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C;-1)\}$

أ) احداثيات G

بما أن $1+2+(-1)\neq 0$ إذن G موجود ووحيد ولدينا:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1\times(2)+2(-1)+(-1)(1)}{1+2+(-1)} = -\dfrac{1}{2} \\ y_G = \dfrac{1\times(-1)+2(2)+(-1)(-1)}{1+2+(-1)} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ z_G = \dfrac{1(1)+2(1)+(-1)(2)}{1+2+(-1)} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

أي $G\left(-\dfrac{1}{2}; 2; \dfrac{1}{2}\right)$

ب) $\Gamma = \{M \; ; \; \|\vec{MA}+2\vec{MB}-\vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|\}$

تبيان أن (Γ) المستوي المحوري لـ $[GD]$

Γ gamma
γ

$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}$

حيث G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

$\|k\vec{u}\| = |k|\times\|\vec{u}\|$

$\|\vec{AB}\| = AB = BA$

$k\in\mathbb{R}$

بما أن G مرجح الجملة $\{(A;1);(B,2);(C,-1)\}$

إذن $\vec{MA}+2\vec{MB}-\vec{MC} = (1+2-1)\vec{MG}$

$M\in(\Gamma)$ معناه $\|\vec{MA}+2\vec{MB}-\vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|$

(0,5)

أي $\|2\vec{MG}\| = 2\|\vec{MD}\|$

أي $|2|\times\|\vec{MG}\| = 2\|\vec{MD}\|$

$MG = MD$

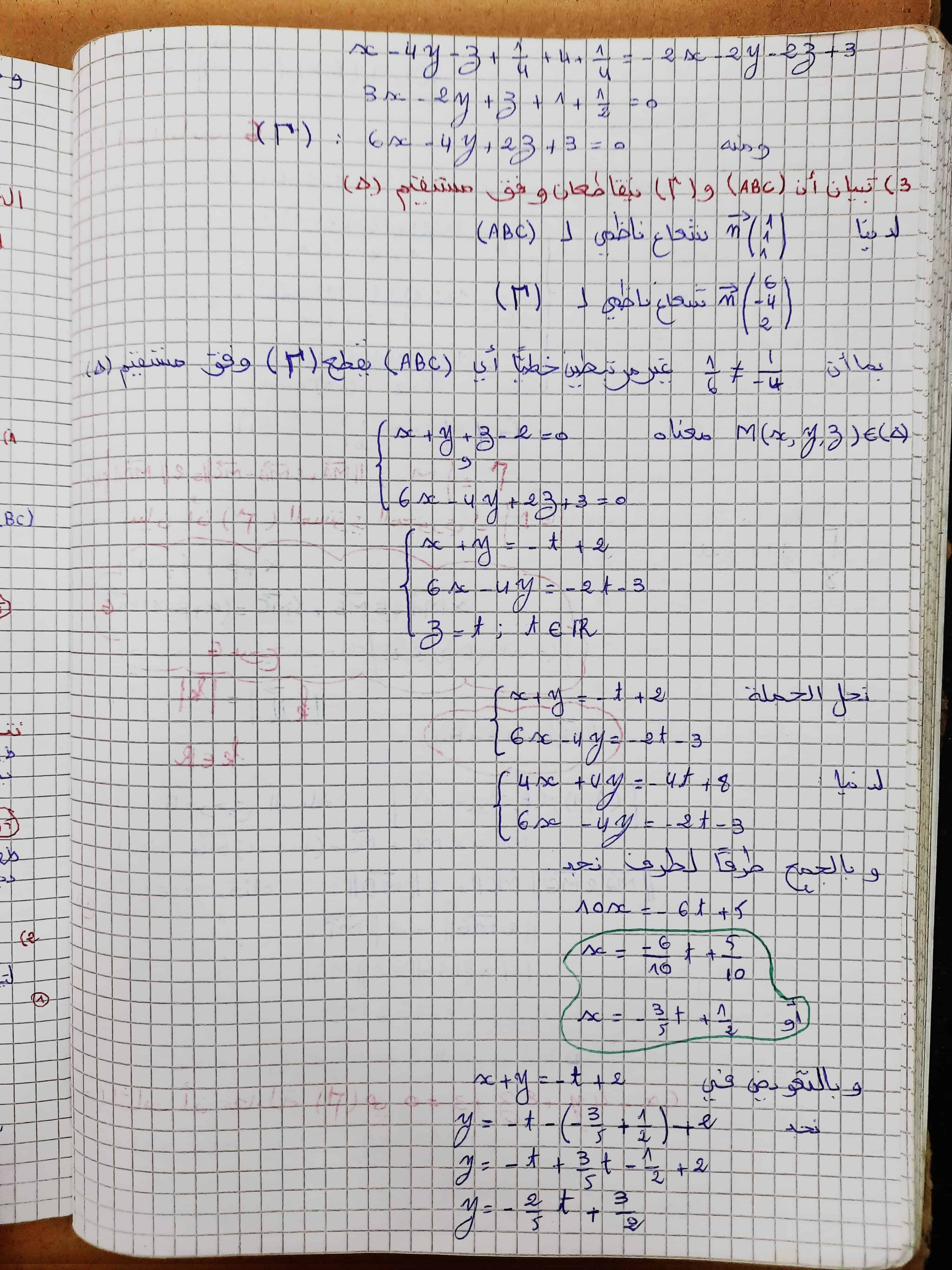
ومنه (Γ) هو المستوي المحوري لـ $[GD]$

جـ) إثبات أن معادلة (Γ) هي $6x-4y+2z+3=0$

$M(x;y;z)\in(\Gamma)$ معناه $MG = MD$

أي $MG^2 = MD^2$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$$



$$x - 4y - z + \frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{4} = -2x - 2y - 2z + 3$$

$$3x - 2y + z + 1 + \frac{1}{2} = 0$$

ومنه $(\Gamma) : 6x - 4y + 2z + 3 = 0$

3) تبيان أن (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

لدينا $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

$\vec{n'}\begin{pmatrix}6\\-4\\2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (Γ)

بما أن $\frac{1}{6} \neq \frac{1}{-4}$ غير مرتبطين خطيا أي (ABC) يقطع (Γ) وفق مستقيم (Δ)

$M(x, y, z) \in (\Delta)$ معناه

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ \text{و} \\ 6x - 4y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -t + 2 \\ 6x - 4y = -2t - 3 \\ z = t \; ; \; t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

نحل الجملة

$$\begin{cases} x + y = -t + 2 \\ 6x - 4y = -2t - 3 \end{cases}$$

لدينا

$$\begin{cases} 4x + 4y = -4t + 8 \\ 6x - 4y = -2t - 3 \end{cases}$$

وبالجمع طرفا لطرف نجد

$$10x = -6t + 5$$

$$x = \frac{-6}{10} t + \frac{5}{10}$$

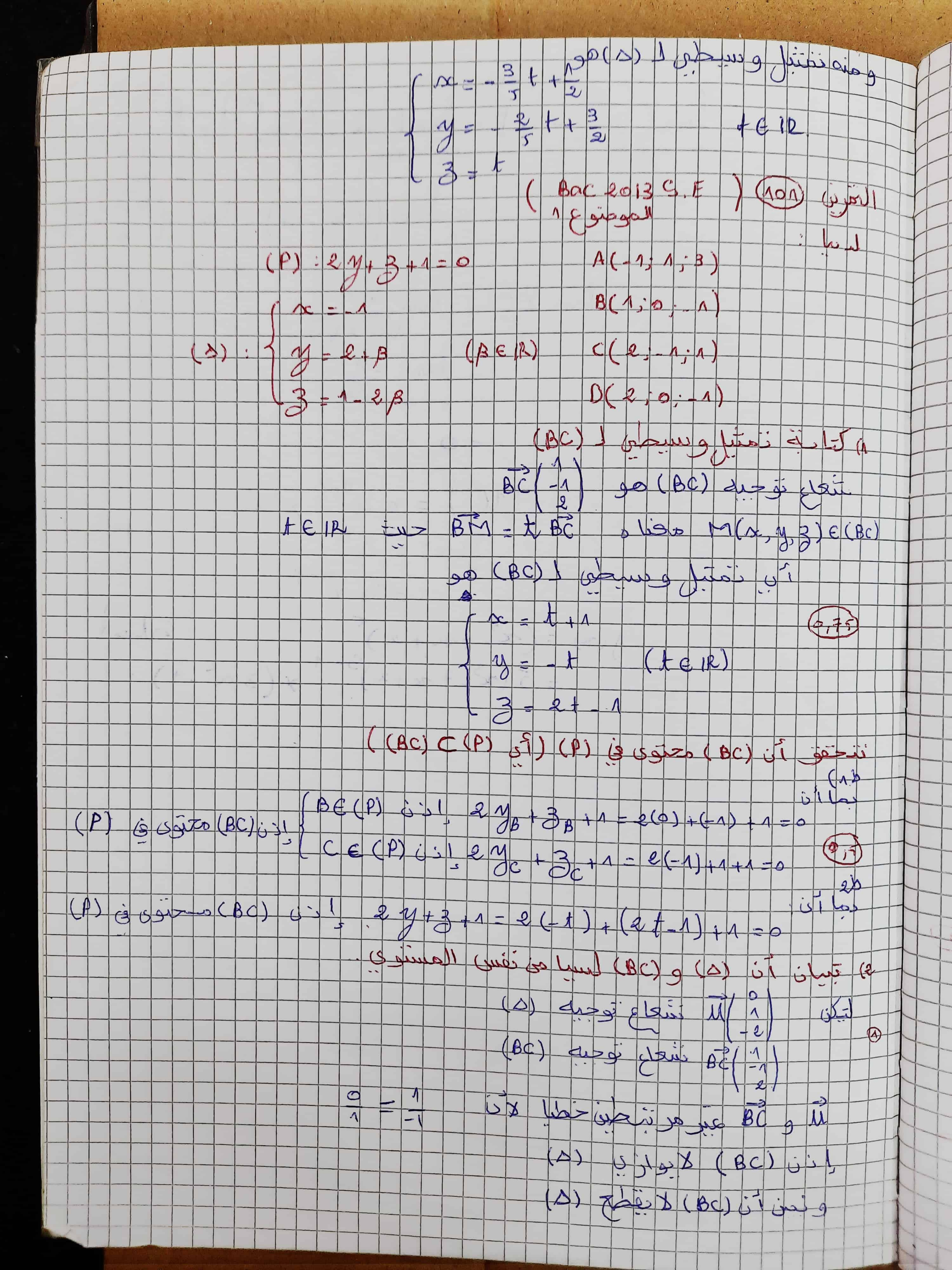
أو $x = -\frac{3}{5} t + \frac{1}{2}$

وبالتعويض في $x + y = -t + 2$

نجد $y = -t - (-\frac{3}{5} + \frac{1}{2}) + 2$

$$y = -t + \frac{3}{5} t - \frac{1}{2} + 2$$

$$y = -\frac{2}{5} t + \frac{3}{2}$$



ومنه تمثيل وسيطي لـ (Δ) هو

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{5}t + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{5}t + \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

التمرين (108) (Bac 2013 S.E الموضوع 1)

لدينا :

$A(-1;1;3)$

$B(1;0;-1)$

$C(2;-1;1)$

$D(2;0;-1)$

$(P) : 2y + z + 1 = 0$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

1) كتابة تمثيل وسيطي لـ (BC)

شعاع توجيه (BC) هو $\vec{BC}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$M(x,y,z) \in (BC)$ معناه $\vec{BM} = t\,\vec{BC}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

أي تمثيل وسيطي لـ (BC) هو

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(0,75)

نتحقق أن (BC) محتوى في (P) (أي $(BC) \subset (P)$)

ط1) بما أن
$B \in (P)$ لأن $2y_B + z_B + 1 = 2(0) + (-1) + 1 = 0$
$C \in (P)$ لأن $2y_C + z_C + 1 = 2(-1) + 1 + 1 = 0$
إذن (BC) محتوى في (P)

(0,75)

ط2) بما أن $2y + z + 1 = 2(-t) + (2t - 1) + 1 = 0$ إذن (BC) محتوى في (P)

2) تبيان أن (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (Δ)

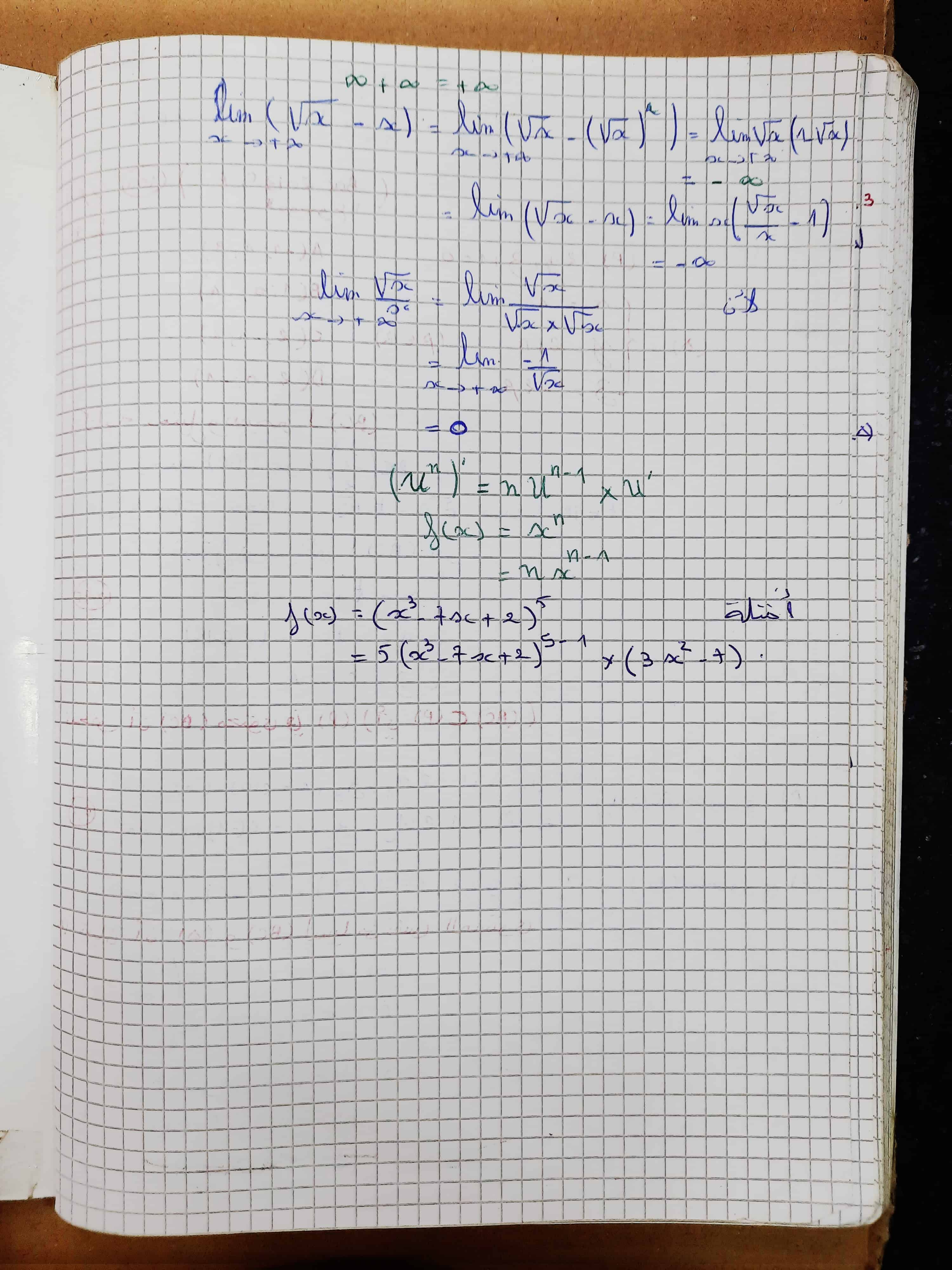
$\vec{BC}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (BC)

(1)

$\vec{u}$ و $\vec{BC}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$

إذن (BC) لا يوازي (Δ)

ونبين أن (BC) لا يقطع (Δ)



$\infty + \infty = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - x) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - (\sqrt{x})^2) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$$

$$= -\infty$$

$$= \lim (\sqrt{x} - x) = \lim x\left(\frac{\sqrt{x}}{x} - 1\right)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= 0$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} \times u'$$

$$f(x) = x^n$$

$$= n x^{n-1}$$

مثلاً

$$f(x) = (x^3 - 7x + 2)^5$$

$$= 5(x^3 - 7x + 2)^{5-1} \times (3x^2 - 7).$$

التمرين (101) (Bac 2013 S.E الموضوع 1).

لدينا $A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ ، $D(2;0;-1)$

$(P): 2y+z+1=0$

$$(\Delta): \begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

1) كتابة تمثيل وسيطي لـ (BC)

شعاع توجيه (BC) هو $\vec{BC}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$M(x,y,z) \in (BC)$ معناه $\vec{BM} = t\,\vec{BC}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

أي تمثيل وسيطي لـ (BC) هو

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t \\ z=2t-1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

نتحقق أن (BC) محتوى في (P) (أي $(BC) \subset (P)$)

ط1:

بما أن

$\begin{cases} B \in (P) \text{ إذن } 2y_B + z_B + 1 = 2(0)+(-1)+1=0 \\ C \in (P) \text{ إذن } 2y_C + z_C + 1 = 2(-1)+1+1=0 \end{cases}$ إذن (BC) محتوى في (P).

ط2:

بما أن: $2y+z+1 = 2(-t)+(2t-1)+1=0$ إذن (BC) محتوى في (P).

تبيان أن (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي :

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (Δ)

$\vec{BC}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (BC)

$\vec{u}$ و $\vec{BC}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$

إذن (BC) لا يوازي (Δ)

ونبين أن (BC) لا يقطع (Δ).

إحداثيات نقطة تقاطع (إن وجدت) (BC) و (Δ) هي حلول الجملة

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2+\beta \\ z = 1-2\beta \\ x = t+1 \\ y = -t \\ z = 2t-1 \end{cases}$$

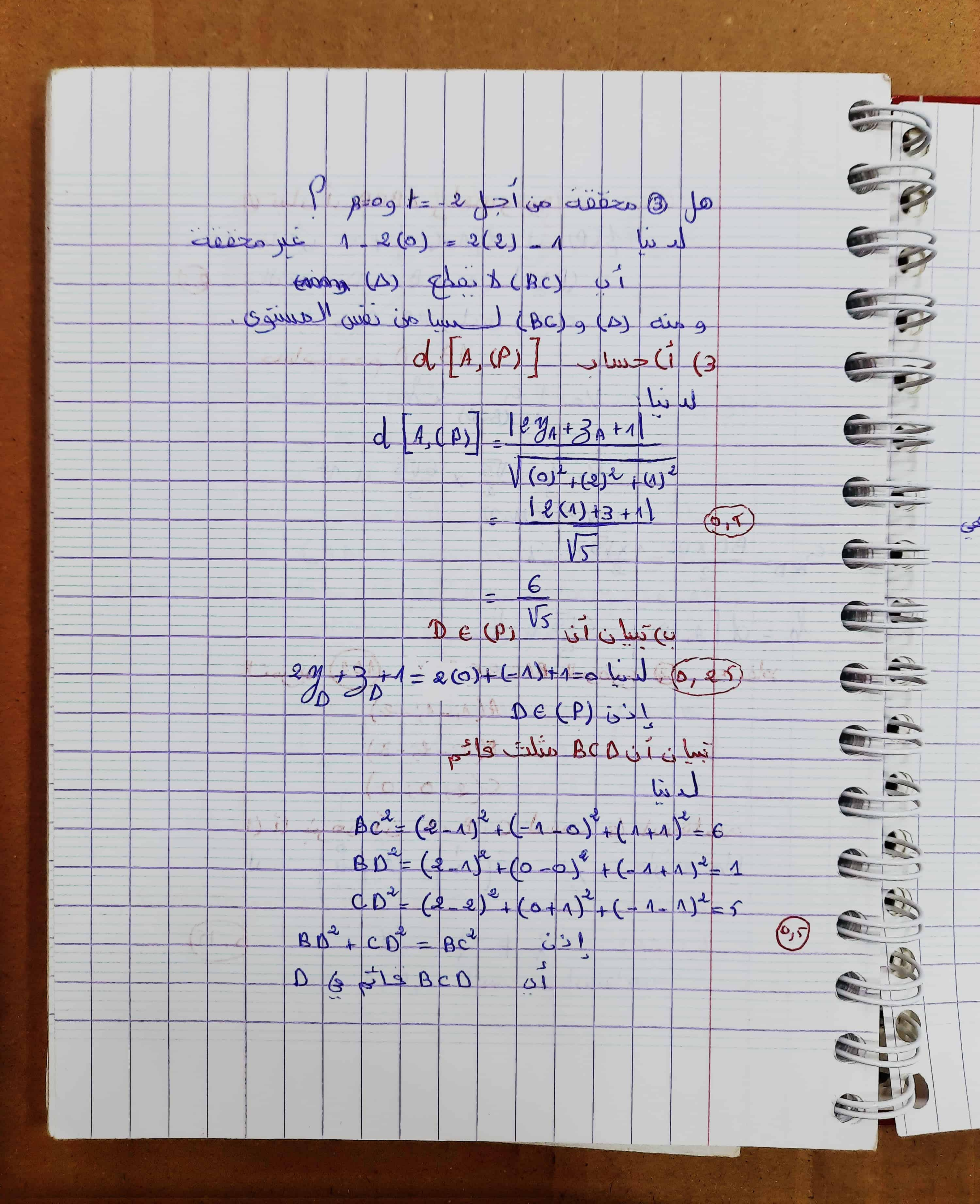
نحل الجملة

$$\begin{cases} -1 = t+1 \quad \dots \textcircled{1} \\ 2+\beta = -t \quad \dots \textcircled{2} \\ 1-2\beta = 2t-1 \quad \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

من ① لدينا $t = -2$

و ② تصبح $2+\beta = 2$

$\beta = 0$



هل ③ محققة من أجل $t=2$ و $\beta=0$ ؟

لدينا $1-2(0)=2(2)-1$ غير محققة

أي (BC) لا يقطع (Δ)

ومنه (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوى.

3) أ) حساب $d[A,(P)]$

لدينا:

$$d[A,(P)]=\frac{|2y_A+z_A+1|}{\sqrt{(0)^2+(2)^2+(1)^2}}$$

$$=\frac{|2(1)+3+1|}{\sqrt{5}}$$ (0,2)

$$=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

ب) تبيان أن $D\in(P)$

لدينا $2y_D+z_D+1=2(0)+(-1)+1=0$ (0,25)

إذن $D\in(P)$

تبيان أن BCD مثلث قائم

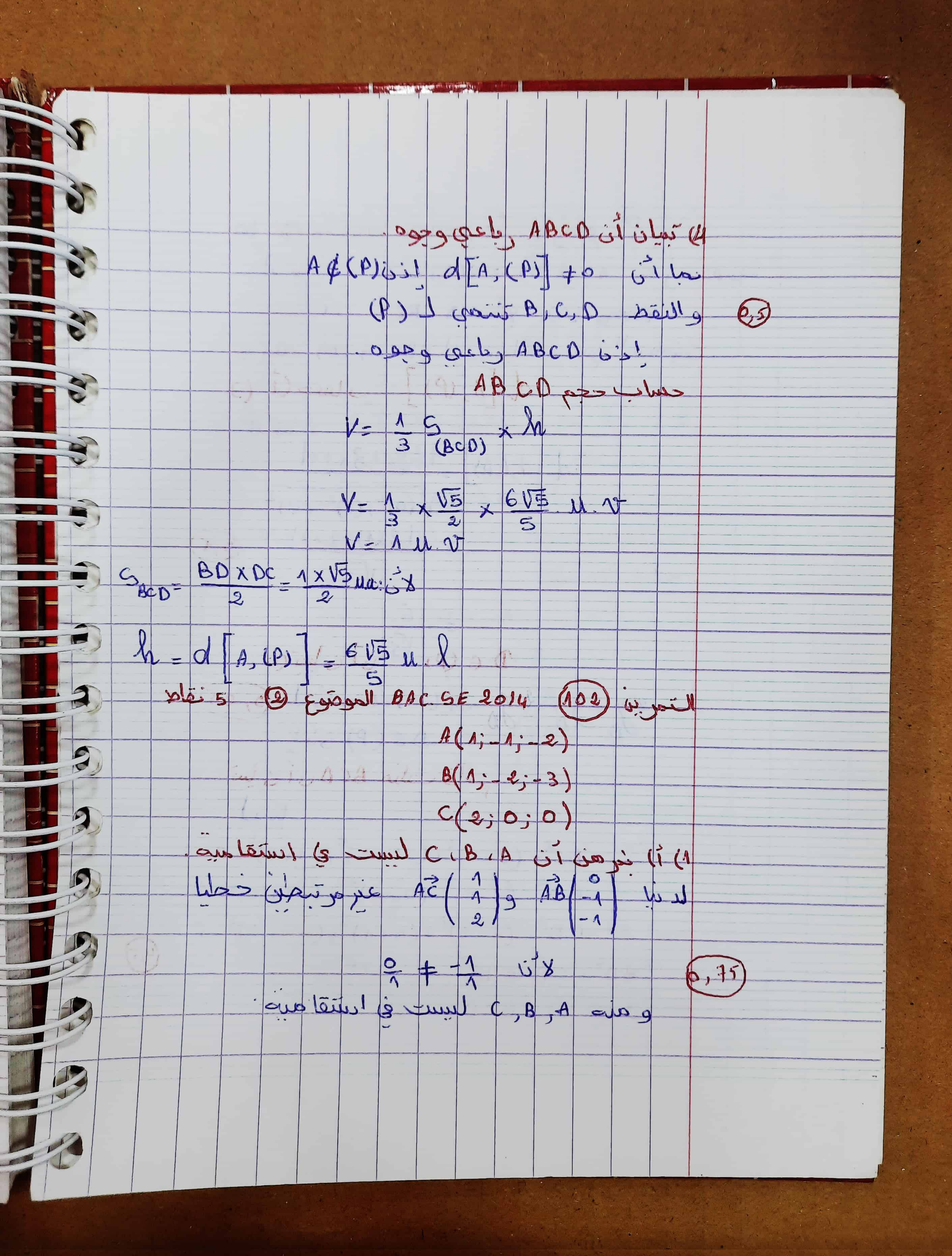
لدينا

$$BC^2=(2-1)^2+(-1-0)^2+(1+1)^2=6$$
$$BD^2=(2-1)^2+(0-0)^2+(-1+1)^2=1$$
$$CD^2=(2-2)^2+(0+1)^2+(-1-1)^2=5$$

(0,5)

إذن $BD^2+CD^2=BC^2$

أي BCD قائم في D



4) تبيان أن $ABCD$ رباعي وجوه

بما أن $d[A,(P)] \neq 0$ إذن $A \notin (P)$

والنقط B, C, D تنتمي لـ (P) (0,5)

إذن $ABCD$ رباعي وجوه.

حساب حجم $ABCD$

$$V = \frac{1}{3} S_{(BCD)} \times h$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{6\sqrt{5}}{5} \ u.v$$

$$V = 1 \ u.v$$

لأن: $S_{BCD} = \frac{BD \times DC}{2} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{2} \ u.a$

$$h = d[A,(P)] = \frac{6\sqrt{5}}{5} \ u.l$$

التمرين (102) BAC SE 2014 الموضوع (2) 5 نقاط

$A(1;-1;-2)$

$B(1;-2;-3)$

$C(2;0;0)$

1) أ) نبرهن أن A، B، C ليست في استقامية

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا

لأن $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1}$ (0,75)

ومنه A, B, C ليست في استقامية

ب) كتابة تمثيل وسيطي لـ (ABC).

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا

× M

A

$\vec{v}$

$\vec{u}$

$M(x,y,z) \in (P)$ معناه $\vec{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

$\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

بما أن A, B, C ليست في استقامية

إذن تعين مستويا وحيدا (ABC)

$M(x,y,z) \in (ABC)$ معناه $\vec{AM} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

ومنه تمثيل وسيطي لـ (ABC) هو:

$$\begin{cases} x = \alpha(0) + \beta(1) + 1 \\ y = \alpha(-1) + \beta(1) + (-1) \\ z = \alpha(-1) + \beta(2) + (-2) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \beta + 1 \\ y = -\alpha + \beta - 1 \\ z = -\alpha + 2\beta - 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

0,75

ج) نتحقق أن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية لـ (ABC)

0,75

ط1)

لدينا

$x+y-z-2=(\beta+1)+(-\alpha+\beta-1)-(-\alpha+2\beta-2)-2$

أي $x+y-z-2=0$

ط2:

لدينا $x_A+y_A-z_A-2=1-1+2-2=0$ أي $A\in(ABC)$ و

$x_B+y_B-z_B-2=1-2+3-2=0$ أي $B\in(ABC)$ و

$x_C+y_C-z_C-2=2+0-0-2=0$ أي $C\in(ABC)$ و

وبما أن C، B، A ليست في استقامية إذن معادلة

(ABC) هي $x+y-z-2=0$.

2) $(P): x-y-2z+5=0$

$(Q): 3x+2y-z+10=0$

نبرهن أن (P) يقطع (Q) وفق مستقيم (Δ) $\begin{cases} x=t-3 \\ y=-t \\ z=t+1 \ ; \ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

لدينا:

$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P)

$\vec{n_2}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (Q)

بما أن $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطيا

لأن: $\frac{1}{3}\neq-\frac{1}{2}$

إذن (P) يقطع (Q) وفق مستقيم (Δ).

وبما أن

$x - y - 2z + 5 = t - 3 - (-t) - 2(t+1) + 5 = 0$ أي (Δ) محتوى في (P)

$3x + 2y - z + 10 = 3(t-3) + 2(-t) - (t+1) + 10 = 0$ أي (Δ) محتوى في (Q)

ومنه تمثيل وسيطي لـ (Δ) هو:

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2b.

$M(x, y, z) \in (\Delta)$ معناه

$$\begin{cases} x - y - 2z + 5 = 0 \\ 3x + 2y - z + 10 = 0 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} x - 2z = k - 5 \\ y = k \quad ; \quad k \in \mathbb{R} \\ 3x - z = -2k - 10 \end{cases}$$

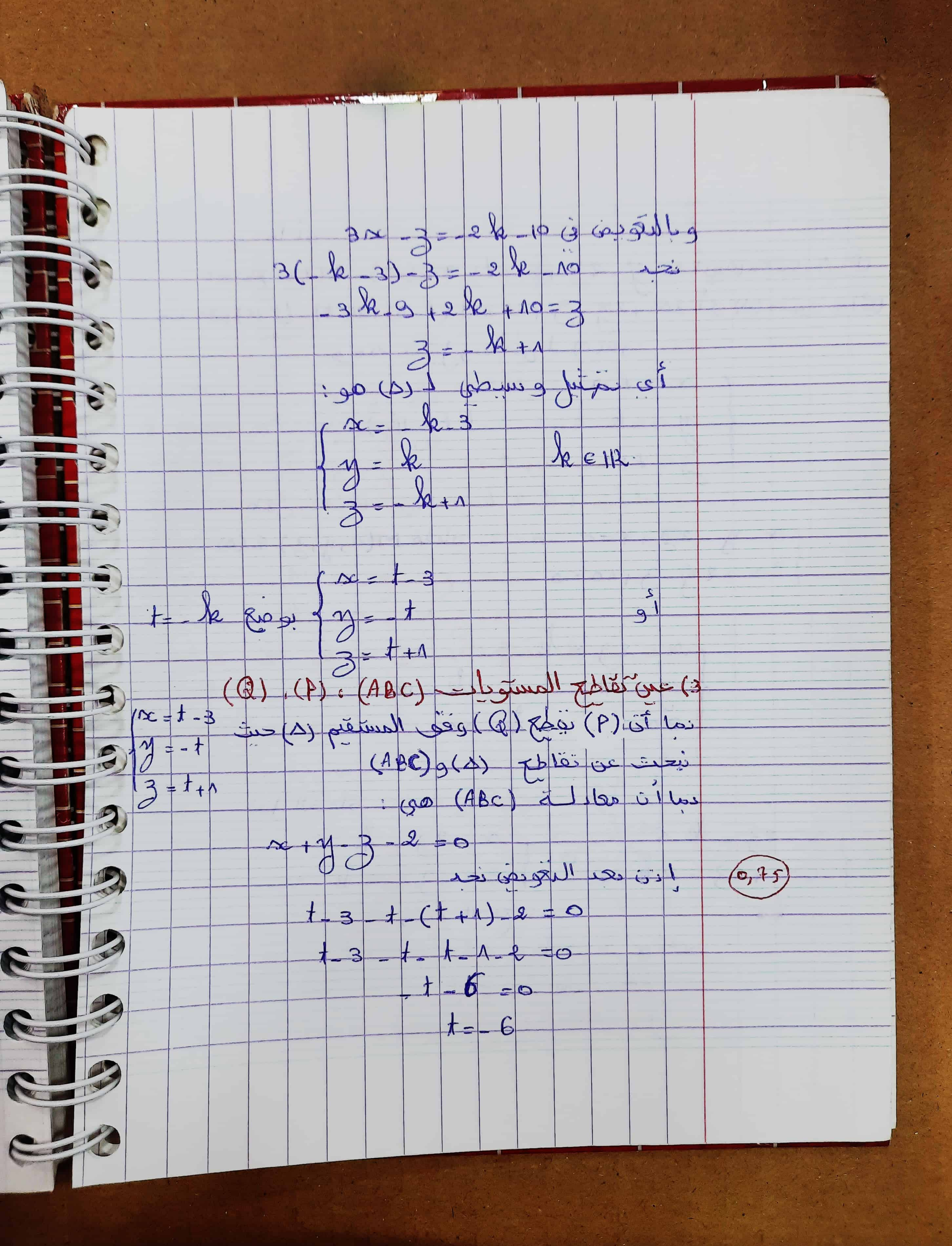
نحل الجملة

$$\begin{cases} x - 2z = k - 5 \\ 3x - z = -2k - 10 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} x - 2z = k - 5 \\ -6x + 2z = 4k + 20 \end{cases}$$

وبعد الجمع نجد

$-5x = 5k + 15$

$x = -k - 3$



وبالتعويض في $3x - z = -2k - 10$

نجد $3(-k-3) - z = -2k - 10$

$$-3k - 9 + 2k + 10 = z$$

$$z = -k + 1$$

أي تمثيل وسيطي لـ (Δ) هو:

$$\begin{cases} x = -k - 3 \\ y = k \\ z = -k + 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

أو

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}$$ بوضع $t = -k$

3) عين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) ، (Q)

نعلم أن (P) يقطع (Q) وفق المستقيم (Δ) حيث

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

نبحث عن تقاطع (Δ) و (ABC)

وبما أن معادلة (ABC) هي:

$$x + y - z - 2 = 0$$

إذن بعد التعويض نجد

$$t - 3 - t - (t + 1) - 2 = 0$$

$$t - 3 - t - t - 1 - 2 = 0$$

$$-t - 6 = 0$$

$$t = -6$$

0,75

إذن (Δ) يقطع (ABC) في النقطة $A(-9;6;-5)$

(لأن من أجل $t=-6$ لدينا $\begin{cases} x=-6-3=-9 \\ y=-(-6)=6 \\ z=-6+1=-5 \end{cases}$

ومنه $(P)\cap(Q)\cap(ABC)=\{A\}$

حيث $A(-9;6;-5)$

4) $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(\Gamma)$ معناه $\sqrt{6}\,d(M,(P))=\sqrt{14}\,d(M,(Q))$

نعين (Γ)

$M\in(\Gamma)$ معناه $\sqrt{6}\times\frac{|x-y-2z+5|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\sqrt{14}\times\frac{|3x+2y-z+10|}{\sqrt{(3)^2+(2)^2+(-1)^2}}$

أي: $|x-y-2z+5|=|3x+2y-z+10|$

أي $\begin{cases} x-y-2z+5=3x+2y-z+10 \\ \text{أو} \\ x-y-2z+5=-(3x+2y-z+10) \end{cases}$

$|X|=|Y|$ معناه $X=Y$ أو $X=-Y$

$\begin{cases} 2x+3y+z+5=0 \\ \text{أو} \\ 4x+y-3z+15=0 \end{cases}$

ومنه $(\Gamma)=(P_1)\cup(P_2)$ حيث

$\begin{cases} (P_1): 2x+3y+z+5=0 \\ (P_2): 4x+y-3z+15=0 \end{cases}$

التمرين (103)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;-1;-2)$

$B(1;-2;-3)$

$C(2;0;0)$

1. برهن أن A، B، C ليست في استقامية

2. عين معادلة ديكارتية لـ (ABC)

1) إثبات أن A, B, C ليست في استقامية.

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا

لأن $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1}$

ومنه A, B, C ليست في استقامية.

2) تعيين معادلة (ABC)

بما أن A, B, C ليست في استقامية.

إذن تعين مستويا وحيدا (ABC)

ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ حيث $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

شعاع ناظمي لـ (ABC)

إذن
$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{AC}=0\end{cases}$$

أي:
$$\begin{cases}a(0)+b(-1)+c(-1)=0\\ a(1)+b(1)+c(2)=0\end{cases}$$

أي: $\begin{cases} -b-c=0 \\ a+b+2c=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} b=-c \\ a-c+2c=0 \end{cases}$

$\begin{cases} b=-c \\ a=-c \end{cases}$

ومنه $\vec{n}\begin{pmatrix} -c \\ -c \\ c \end{pmatrix}$

من أجل $c=1$ (مثلا) لدينا $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ومنه معادلة (ABC) هي من الشكل

$-x-y+z+d=0$

وبما أن $A\in(ABC)$ إذن $-1-(-1)-2+d=0$

$d=2$

ومنه $(ABC): -x-y+z+2=0.$

التمرين (104)

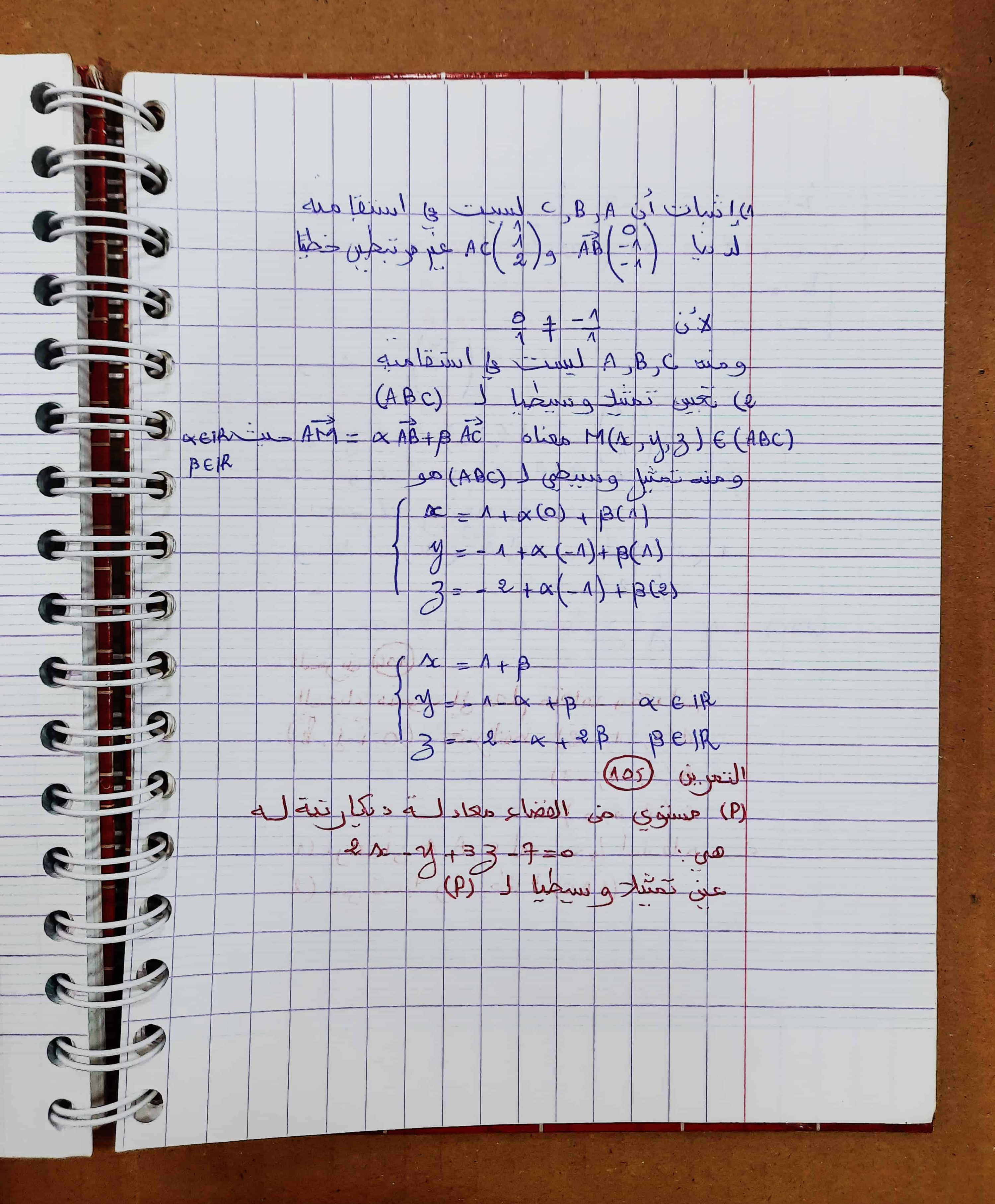
الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;-1;-2)$

$B(1;-2;-3)$

$C(2;0;0)$

1) برهن أن A, B, C ليست في استقامية

2) عين تمثيلا وسيطيا لـ (ABC)



1) إثبات أن A, B, C ليست في استقامية

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا

لأن $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1}$

ومنه A, B, C ليست في استقامية

2) تعيين تمثيل وسيطيا لـ (ABC)

$M(x, y, z) \in (ABC)$ معناه $\vec{AM} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $\beta \in \mathbb{R}$

ومنه تمثيل وسيطي لـ (ABC) هو

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha(0) + \beta(1) \\ y = -1 + \alpha(-1) + \beta(1) \\ z = -2 + \alpha(-1) + \beta(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -1 - \alpha + \beta & \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -2 - \alpha + 2\beta & \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

التمرين 105

(P) مستوي من الفضاء معادلة ديكارتية له

هي: $2x - y + 3z - 7 = 0$

عين تمثيلا وسيطيا لـ (P)

نوضع $z = t$ حيث $t \in \mathbb{R}$

$y = k$ $k \in \mathbb{R}$

نجد $2x - k + 3t - 7 = 0$

$2x = k - 3t + 7$

$x = \frac{1}{2}k - \frac{3}{2}t + \frac{7}{2}$

ومنه تمثيل وسيطي لـ (P) هو

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}k - \frac{3}{2}t + \frac{7}{2} \\ y = k \\ z = t \end{cases} \quad \text{مع } k \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

التمرين 106

(P) مستوي من الفضاء تمثيل وسيطي له:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha - 2\beta \\ y = 5 + 2\alpha + \beta \\ z = -3 - 3\alpha + 5\beta \end{cases} \quad \text{مع } \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}$$

1) عين شعاعي توجيه (P)

2) استنتاج معادلة ديكارتية لـ (P).

1) شعاعا توجيه (P) هما $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) معادلة ديكارتية لـ (P):

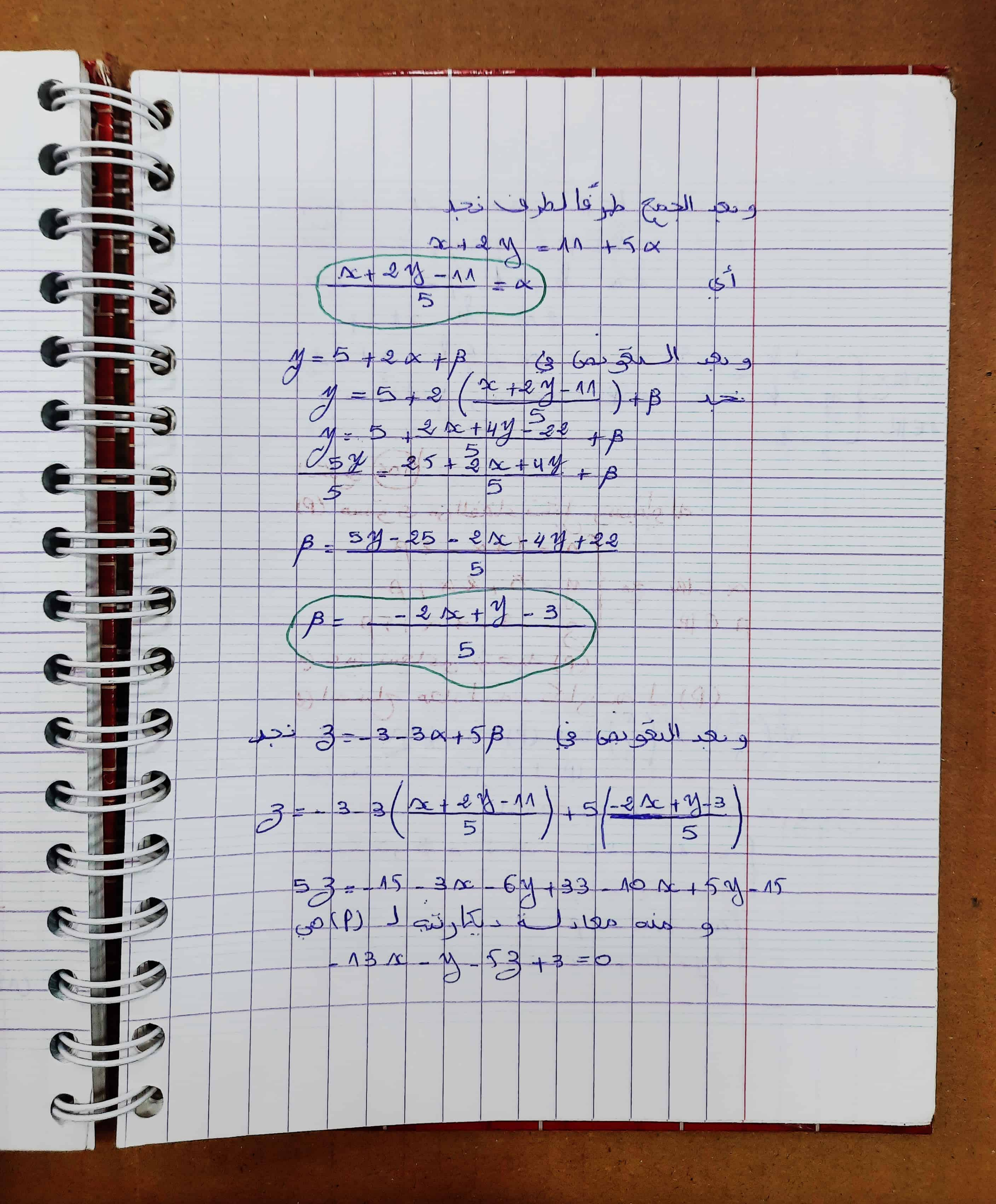
من الجملة السابقة نعين علاقة بين x و y و z.

نحسب α و β من الجملة

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha - 2\beta \\ y = 5 + 2\alpha + \beta \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha - 2\beta \\ 2y = 10 + 4\alpha + 2\beta \end{cases}$$



وبعد الجمع طرفا لطرف نجد

$$x + 2y = 11 + 5\alpha$$

أي

$$\frac{x + 2y - 11}{5} = \alpha$$

وبعد التعويض في $y = 5 + 2\alpha + \beta$

نجد $y = 5 + 2\left(\frac{x + 2y - 11}{5}\right) + \beta$

$$y = 5 + \frac{2x + 4y - 22}{5} + \beta$$

$$\frac{5y}{5} = \frac{25 + 2x + 4y}{5} + \beta$$

$$\beta = \frac{5y - 25 - 2x - 4y + 22}{5}$$

$$\beta = \frac{-2x + y - 3}{5}$$

وبعد التعويض في $z = -3 - 3\alpha + 5\beta$ نجد

$$z = -3 - 3\left(\frac{x + 2y - 11}{5}\right) + 5\left(\frac{-2x + y - 3}{5}\right)$$

$$5z = -15 - 3x - 6y + 33 - 10x + 5y - 15$$

ومنه معادلة ديكارتية لـ (P) هي

$$-13x - y - 5z + 3 = 0$$

التمرين 107 دورة جوان 2012 . التمرين ② الموضوع ② 4 نقاط
S.E

$A(-1;0;1)$

$B(2;1;0)$

$C(1;-1;0)$

1) تبيان أن A ، B ، C تعين مستويا :

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-1}$

إذن:

A ، B ، C ليست في استقامية أي تعين مستويا وحيدا (ABC)

2) تبيان أن $2x - y + 5z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية المستوي (ABC)

أ) لدينا $2x_A - y_A + 5z_A - 3 = 2(-1) - 0 + 5(1) - 3 = 0$ أي $A \in (ABC)$

$2x_B - y_B + 5z_B - 3 = 2(2) - 1 + 5(0) - 3 = 0$ أي $B \in (ABC)$

$2x_C - y_C + 5z_C - 3 = 2(1) - (-1) + 5(0) - 3 = 0$ أي $C \in (ABC)$

ومنه معادلة (ABC) هي $2x - y + 5z - 3 = 0$.

ط2)

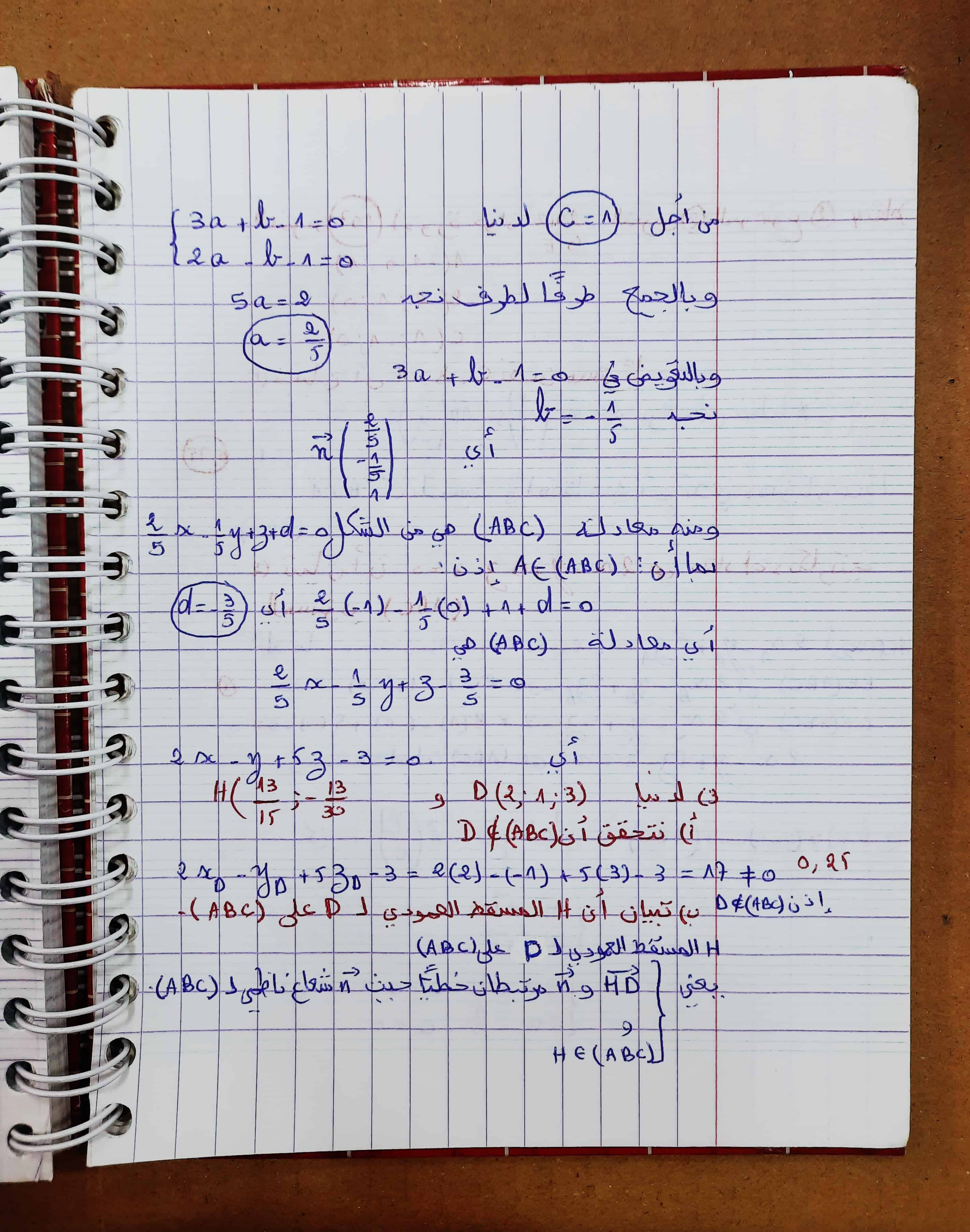
ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (ABC) حيث $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

إذن:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} 3a + b - c = 0 \\ 2a - b - c = 0 \end{cases}$$



من أجل $(c = 1)$ لدينا
$$\begin{cases} 3a + b - 1 = 0 \\ 2a - b - 1 = 0 \end{cases}$$

وبالجمع طرفا لطرف نجد $5a = 2$

$$a = \frac{2}{5}$$

وبالتعويض في $3a + b - 1 = 0$

نجد $b = -\frac{1}{5}$

أي $\vec{n}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

ومنه معادلة (ABC) هي من الشكل $\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + z + d = 0$

بما أن: $A \in (ABC)$ إذن:

$\frac{2}{5}(-1) - \frac{1}{5}(0) + 1 + d = 0$ أي $d = -\frac{3}{5}$

أي معادلة (ABC) هي

$$\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + z - \frac{3}{5} = 0$$

أي $2x - y + 5z - 3 = 0.$

3) لدينا $D(2 ; 1 ; 3)$ و $H\left(\frac{13}{15} ; -\frac{13}{30}\right.$

أ) نتحقق أن $D \notin (ABC)$

$2x_D - y_D + 5z_D - 3 = 2(2) - (-1) + 5(3) - 3 = 17 \neq 0$ 0,25

إذن $D \notin (ABC)$

ب) تبيان أن H المسقط العمودي لـ D على (ABC).

H المسقط العمودي لـ D على (ABC)

يعني $\vec{HD}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا حيث $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (ABC).
و
$H \in (ABC)$

لدينا : $2x_H - y_H + 5z_H - 3 = 2\left(\frac{13}{15}\right) - \left(-\frac{13}{30}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) - 3$

$= \frac{26}{15} + \frac{13}{30} + \frac{5}{6} - 3$

$= \frac{52 + 13 + 25 - 90}{30}$

$= 0$

إذن $H \in (ABC)$

ولدينا $\vec{HD}\begin{pmatrix} \frac{17}{15} \\ -\frac{17}{30} \\ \frac{17}{6} \end{pmatrix}$ و $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ مرتبطان خطياً

لأن $\frac{\frac{17}{15}}{2} = \frac{-\frac{17}{30}}{-1} = \frac{\frac{17}{6}}{5}$

ومنه H المسقط العمودي لـ D على (ABC)

ج) استنتاج أن $(ADH) \perp (ABC)$

بما أن H المسقط العمودي لـ D على (ABC) و $A \in (ABC)$

و $H \in (ABC)$ إذن $(ADH) \perp (ABC)$

ط2 لدينا $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ و $\vec{HA}\begin{pmatrix} -\frac{28}{15} \\ \frac{13}{30} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (ADH)

وبما أن $\vec{HA} \cdot \vec{n} = 2\left(-\frac{28}{15}\right) + (-1)\left(\frac{13}{30}\right) + 5\left(\frac{5}{6}\right) = 0$

إذن $(ADH) \perp (ABC)$

- تمثيل وسيطي للتقاطع

بما أن: $\begin{cases} A \in (ABC) \\ H \in (ABC) \end{cases}$ $(AH) \subset (ABC)$

و $\begin{cases} A \in (ADH) \\ H \in (ABC) \end{cases}$ أي $(AH) \subset (ADH)$

إذن (ADH) يقطع (ABC) في (AH)

أي تمثيل وسيطي لـ (AH) هو:

$$\begin{cases} x = \frac{22}{15}t - 1 \\ y = -\frac{13}{30}t \\ z = \frac{5}{6}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

التمرين (102)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط $A(3;-2;4)$

$B(1;-1;2)$

$C(4;6;-3)$

① عين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق $\vec{AM}\cdot\vec{BC} = 3$

② عين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث $AM = CM$ ثم عين معادلته.

1) تعيين مجموعة النقط $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = 3$

لدينا $\vec{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ z-4 \end{pmatrix}$ و $\vec{BC}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

إذن نكتب $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = 3$

$$3(x-3)+7(y+2)-5(z-4)=3$$

$$3x-9+7y+14-5z+20-3=0$$

$$3x+7y-5z-9+14+20-3=0$$

ومنه $3x+7y-5z+22=0$

ومنه مجموعة النقط M هي المستوي الذي معادلته

$$3x+7y-5z+22=0$$

2) تعيين مجموعة النقط M بحيث $AM=CM$

بما أن $AM=CM$ إذن مجموعة النقط M هي المستوي المحوري للقطعة $[AC]$

$AM=CM$ يكافئ $AM^2=CM^2$

أي: $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=(x-4)^2+(y-6)^2+(z+3)^2$

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4+z^2-8z+16=x^2-8x+16+y^2-12y+36+z^2+6z+9$$

أي: $2x+16y-14z-32=0$

ومنه معادلة المستوي المحوري لـ $[AC]$ هي:

$$x+8y-7z-16=0$$

ط) المستوي المحوري (P) لـ $[AC]$ هو المستوي العمودي على $[AC]$

في منتصفها I

إذن $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\8\\-7\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P)

ولدينا:

$$I\left(\frac{7}{2};2;\frac{1}{2}\right)$$

ومنه معادلة (P) من الشكل $x+8y-7z+d=0$

ولدينا $I\in(P)$ إذن:

$$\frac{7}{2}+8(2)-7\left(\frac{1}{2}\right)+d=0$$

$$d=-16$$

أي $(P): x+8y-7z-16=0.$

معادلة سطح كرة (S) مركزها $\Omega(x_0;y_0;z_0)$

ونصف قطرها R (حيث: $R>0$)

هي من الشكل

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

أي

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

التمرين 109

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;3;2)$

$B(-4;-1;2)$

$C(3;0;5)$

1) عين معادلة سطح الكرة (S_1) التي مركزها B ونصف قطرها 5 .

2) عين معادلة سطح الكرة (S_2) التي مركزها A وتشمل النقطة C

3) عين معادلة سطح الكرة (S_3) التي قطرها $[BC]$

1) بما أن B هو مركز (S_1) و 5 نصف قطرها إذن معادلة (S_1) هي :

$$(x-(-4))^2+(y-(-1))^2+(z-2)^2=5^2$$

$$(x+4)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=25$$

(أو : $x^2+y^2+z^2+8x+2y-4z-4=0$)

2) بما أن المركز هو A و (S_2) يشمل النقطة C

إذن نصف القطر هو AC

لدينا

$$AC^2=(3-1)^2+(0-3)^2+(5-2)^2$$

$$AC^2=22$$

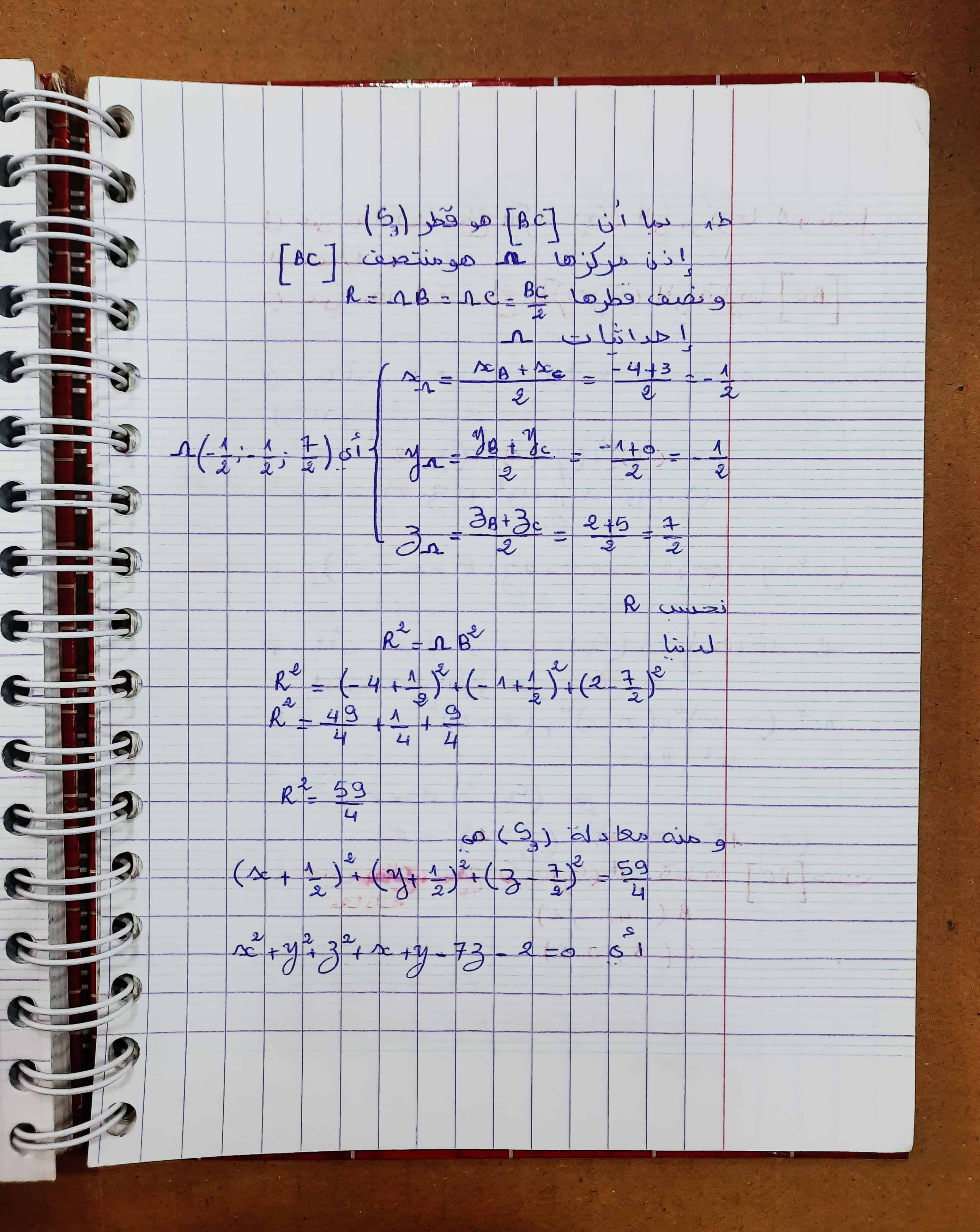
ومنه معادلة (S_2) هي

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=22$$

3) تعيين معادلة سطح الكرة (S_3) التي قطرها $[BC]$ حيث

$B(-4;-1;2)$

$C(3;0;5)$



ط) بما أن $[BC]$ هو قطر (S_3)

إذن مركزها Ω هو منتصف $[BC]$

ونصف قطرها $R = \Omega B = \Omega C = \frac{BC}{2}$

إحداثيات Ω

$$\begin{cases} x_\Omega = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_\Omega = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2} \\ z_\Omega = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

أي $\Omega\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$

نحسب R

لدينا $R^2 = \Omega B^2$

$$R^2 = \left(-4+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{7}{2}\right)^2$$

$$R^2 = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}$$

$$R^2 = \frac{59}{4}$$

ومنه معادلة (S_3) هي

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{59}{4}$$

أي $x^2+y^2+z^2+x+y-7z-2=0$

ط2

$M(x,y,z) \in (S_3)$ معناه $\vec{BM} \perp \vec{CM}$

أي $\vec{BM} \cdot \vec{CM} = 0$

أي $(x+4)(x-3)+(y+1)y+(z-2)(z-5)=0$

ومنه $x^2+y^2+z^2+x+y-7z-2=0$

لدينا $\vec{BM}\begin{pmatrix} x+4 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}$ و $\vec{CM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-0 \\ z-5 \end{pmatrix}$

التمرين (110)

(P) مستوي من الفضاء معرّف بتمثيله الوسيطي:

$$\begin{cases} x = 1+2\alpha+\beta \\ y = 1+\alpha \\ z = 5+\alpha+\beta \end{cases}$$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

ط1 نعين معادلة ديكارتية لـ (P):

نبحث عن علاقة بين x, y, z مستقلة عن α و β

لدينا

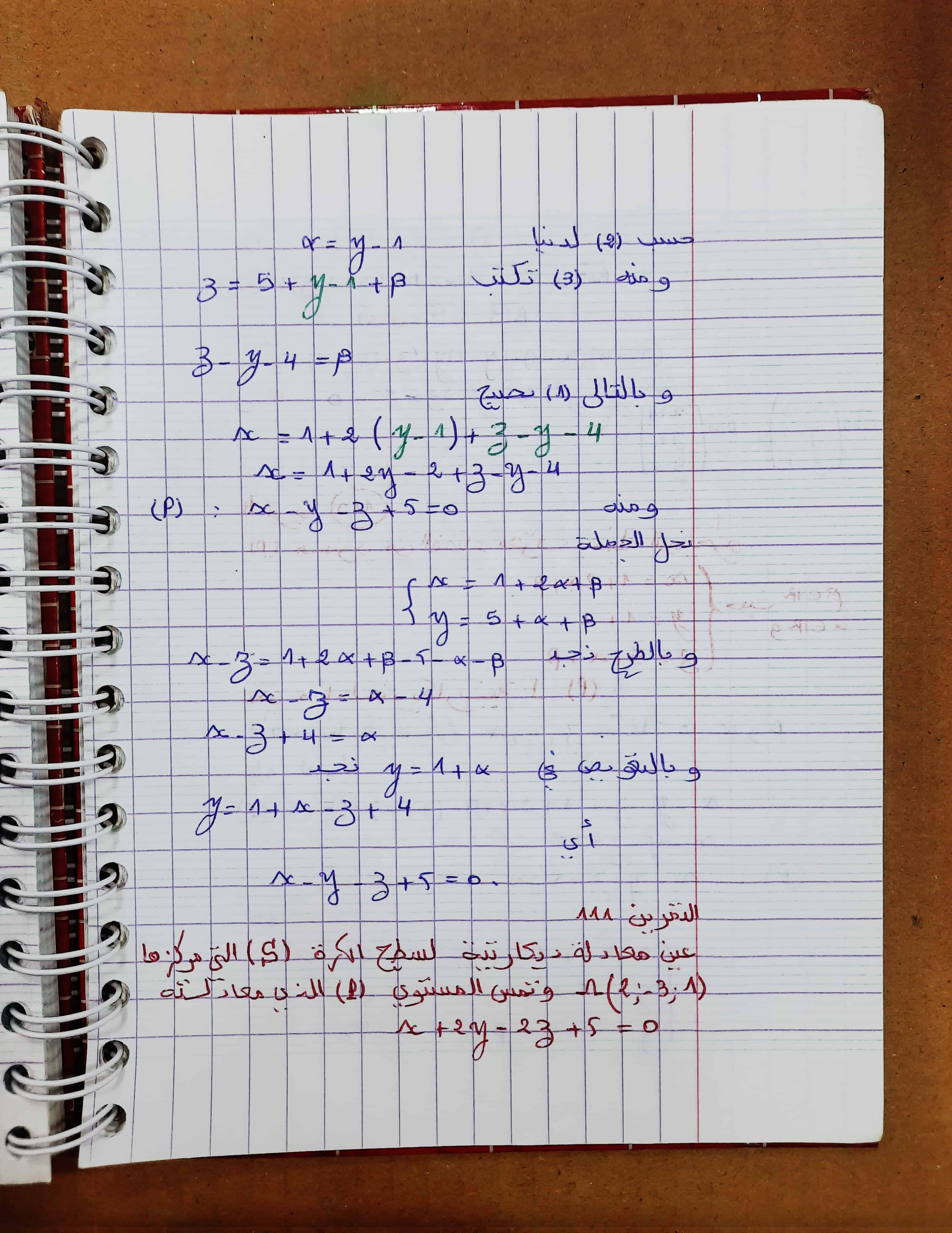
$x-y-z = 1+2\alpha+\beta-(1+\alpha)-(5+\alpha+\beta)$

$x-y-z=-5$

ومنه $(P): \quad x-y-z+5=0$

ط2

$$\begin{cases} x = 1+2\alpha+\beta \quad \text{.......}(1) \\ y = 1+\alpha \quad \text{..........}(2) \\ z = 5+\alpha+\beta \quad \text{.......}(3) \end{cases}$$



حسب (2) لدينا $\alpha = y - 1$

ومنه (3) تكتب $z = 5 + y - 1 + \beta$

$z - y - 4 = \beta$

وبالتالي (1) تصبح

$x = 1 + 2(y - 1) + z - y - 4$

$x = 1 + 2y - 2 + z - y - 4$

ومنه $(P) : x - y - z + 5 = 0$

نحل الجملة

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 5 + \alpha + \beta \end{cases}$$

وبالطرح نجد $x - z = 1 + 2\alpha + \beta - 5 - \alpha - \beta$

$x - z = \alpha - 4$

$x - z + 4 = \alpha$

وبالتعويض في نجد $y = 1 + \alpha$

$y = 1 + x - z + 4$

أي

$x - y - z + 5 = 0.$

التمرين 111

عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها $\Omega(2;-3;1)$ وتمس المستوي (P) الذي معادلته

$x + 2y - 2z + 5 = 0$

(P) مماس لـ (S) معناه $d[\Omega, (P)]$

لدينا

$$R = d[\Omega, (P)]$$

$$= \frac{|x_\Omega + 2y_\Omega - 2z_\Omega + 5|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{|2 + 2(-3) - 2(1) + 5|}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{|-1|}{3}$$

ومنه $R = \frac{1}{3}$

ومنه معادلة (S_1) هي

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

أي $\left(x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + \frac{125}{9} = 0\right)$

التمرين 112

تعرف عن مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق:

1) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 12 = 0$

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 2 = 0$

3) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 12x + 16y + 3 = 0$

4) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 = 0$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 + 2ab = (a+b)^2 - (b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$
$$a^2 - 2ab = (a-b)^2 - (b)^2$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

1) نكتب $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 18 = 0$

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + (z^2 + 2z) + 18 = 0$$
$$(x+2)^2 - (2)^2 + (y-3)^2 - (3)^2 + (z+1)^2 - (1)^2 + 18 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 - 4 - 9 - 1 + 18 = 0$$
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = -4$$

وبما أن $-4 < 0$ و $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 \geq 0$

إذن مجموعة النقط المطلوبة مجموعة خالية.

2) نكتب $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 2 = 0$

$$(x^2 - 2x) + y^2 + (z^2 + 4z) - 2 = 0$$
$$(x-1)^2 - (1)^2 + y^2 + (z+2)^2 - (2)^2 - 2 = 0$$
$$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 7$$

ومنه مجموعة النقط M هي سطح كرة (S)

مركزها $\Omega(1;0;-2)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{7}$

(3

$$4x^2+4y^2+4z^2-12x+16y+3=0.$$

بعد قسمة الطرفين على 4.

$$x^2+y^2+z^2-3x+4y+\frac{3}{4}=0.$$

أي

$$(x^2-3x)+(y^2+4y)+z^2+\frac{3}{4}=0.$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2-(2)^2+z^2+\frac{3}{4}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2+z^2-\frac{9}{4}-4+\frac{3}{4}=0.$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2+z^2=\frac{22}{4}$$

ومنه مجموعة النقط M هي سطح كرة (S)

مركزها $\Omega\left(\frac{3}{2};-2;0\right)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{\frac{22}{4}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$

(4

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+14=0$$

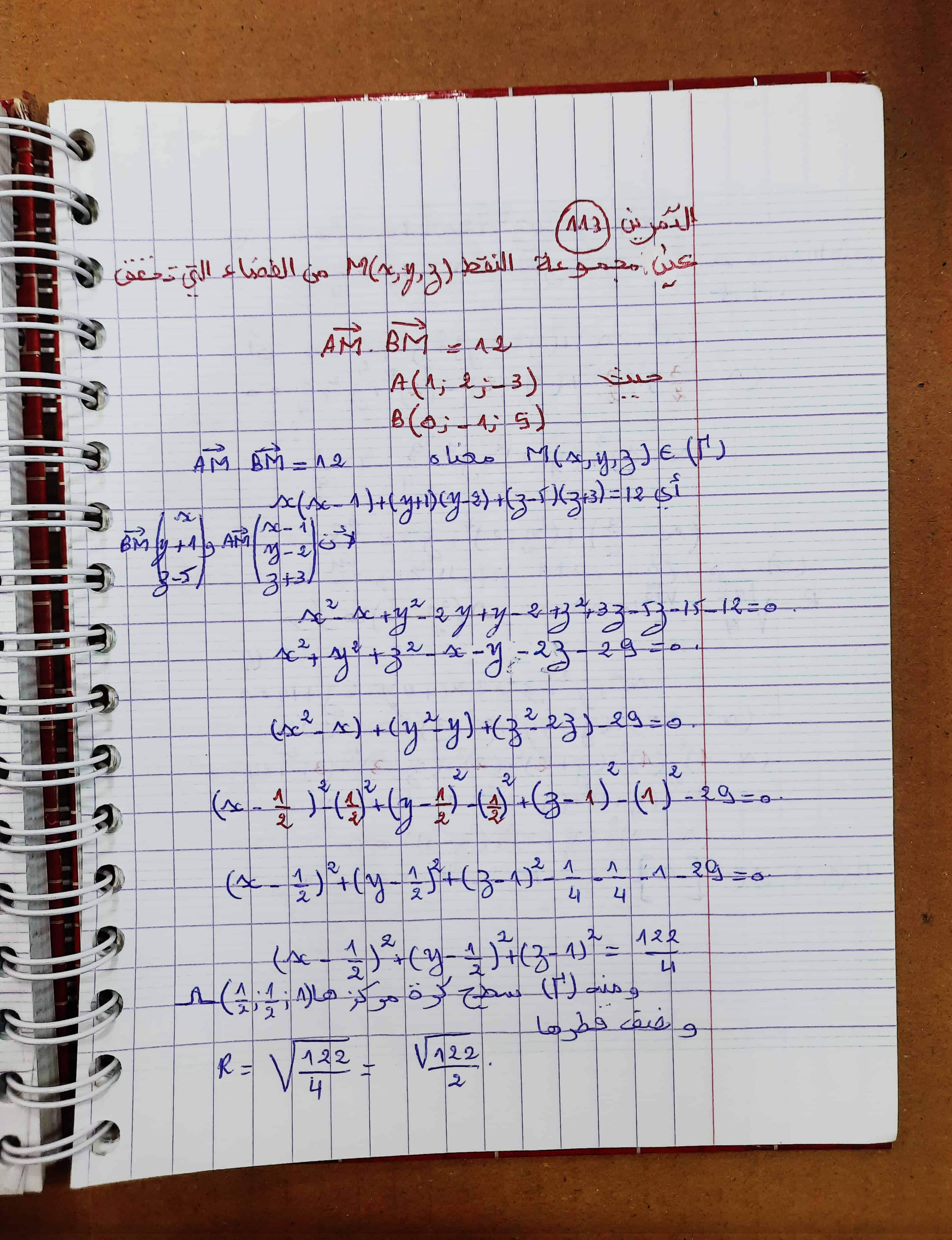
تكتب $(x^2-2x)+(y^2+4y)+(z^2-6z)+14=0$

$$(x-1)^2-(1)^2+(y+2)^2-(2)^2+(z-3)^2-(3)^2+14=0$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2-1-4-9+14=0.$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=0.$$

ومنه مجموعة النقط M هي $\{\Omega\}$ مع $\Omega(1;-2;3)$



التمرين (113)

عيّن مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق

$$\vec{AM}\cdot\vec{BM} = 12$$

حيث $A(1;2;-3)$

$B(0;-1;5)$

$M(x,y,z) \in (\Gamma)$ معناه $\vec{AM}\cdot\vec{BM} = 12$

أي $x(x-1)+(y+1)(y-2)+(z-5)(z+3)=12$

لأن $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z+3\end{pmatrix}$ و $\vec{BM}\begin{pmatrix}x\\y+1\\z-5\end{pmatrix}$

$$x^2-x+y^2-2y+y-2+z^2+3z-5z-15-12=0.$$

$$x^2+y^2+z^2-x-y-2z-29=0.$$

$$(x^2-x)+(y^2-y)+(z^2-2z)-29=0.$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+(z-1)^2-(1)^2-29=0.$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-1)^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1-29=0.$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{122}{4}$$

ومنه (Γ) سطح كرة مركزها $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$

ونصف قطرها

$$R=\sqrt{\frac{122}{4}}=\frac{\sqrt{122}}{2}.$$

التمرين (114) 2012 Bac. S. E الموضوع ① التمرين ③ 4 نقاط

لدينا: $(P): 14x + 16y + 13z - 47 = 0$

$A(1; -2; 5)$

$B(2; 2; -1)$

$C(-1; 3; 1)$

1) أ) تحقق أن A ، B ، C ليست في استقامية

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\-6\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\-4\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا.

لأن $-\frac{2}{1} \neq \frac{5}{4}$

إذن A ، B ، C ليست في استقامية.

ب) تبيان أن (ABC) هو (P)

بما أن A, B, C ليست في استقامية إذن تعين مستويا وحيدا (ABC)

ولدينا $14x_A + 16y_A + 13z_A - 47 = 14(1) + 16(-2) + 13(5) - 47 = 0$ أي $A \in (P)$

$14x_B + 16y_B + 13z_B - 47 = 14(2) + 16(2) + 13(-1) - 47 = 0$ أي $B \in (P)$

$14x_C + 16y_C + 13z_C - 47 = 14(-1) + 16(3) + 13(1) - 47 = 0$ أي $C \in (P)$

إذن $(P) = (ABC)$

② إيجاد تمثيل وسيطي (AB)

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\-6\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (AB).

$M(x, y, z) \in (AB)$ معناه $\vec{AM} = k\vec{AB}$ مع: $k \in \mathbb{R}$

أي تمثيل وسيطي لـ (AB) هو:

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 + 4k \\ z = 5 - 6k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

3) أ) كتابة معادلة (Q) المستوي المحوري لـ $[AB]$

ط1

$M(x, y, z) \in (Q)$ معناه $AM = BM$

أي $AM^2 = BM^2$

أي $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-5)^2 = (x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 10z + 25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1$

ومنه: $(Q): 2x + 8y - 12z + 21 = 0$

ط2

بما أن (Q) هو المستوي المحوري لـ $[AB]$

إذن $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\-6\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له

أي معادلة (Q) من الشكل:

$x + 4y - 6z + d = 0$

وبما أن (Q) يشمل $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$ منتصف $[AB]$

إذن

$\frac{3}{2} + 4(0) - 6(2) + d = 0$

أي $\frac{3}{2} - 12 + d = 0$ $\quad d = \frac{21}{2}$

ومنه:

$(Q): x + 4y - 6z + \frac{21}{2} = 0$

(أو $2x + 8y - 12z + 21 = 0$)

ومنه

$(Q): 2x + 8y - 12z + 21 = 0.$

ط3) بما أن (Q) هو المستوي المحوري [AB]

إذن $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\-6\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـه

ولدينا (Q) يشمل $I(\frac{3}{2};0;2)$ منتصف [AB]

$M(x,y,z) \in (Q)$ معناه $\vec{IM} \perp \vec{AB}$

أي: $\vec{IM}.\vec{AB} = 0$

أي $1(x-\frac{3}{2})+4y+(-6)(z-2)=0$ لأن $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\-6\end{pmatrix}$ و $\vec{IM}\begin{pmatrix}x-\frac{3}{2}\\y\\z-2\end{pmatrix}$

$x-\frac{3}{2}+4y-6z+12=0$

$2x-3+8y-12z+24=0$

ومنه $(Q): 2x+8y-12z+21=0$

ب) نتحقق أن $D(-1;-2;\frac{1}{4})$ تنتمي لـ (Q)

لدينا:

$2x_D+8y_D-12z_D+21=2(-1)+8(-2)-12(\frac{1}{4})+21=0$

إذن $D \in (Q)$

ج) حساب $d[D;(AB)]$

بما أن (Q) هو المستوي المحوري لـ [AB]

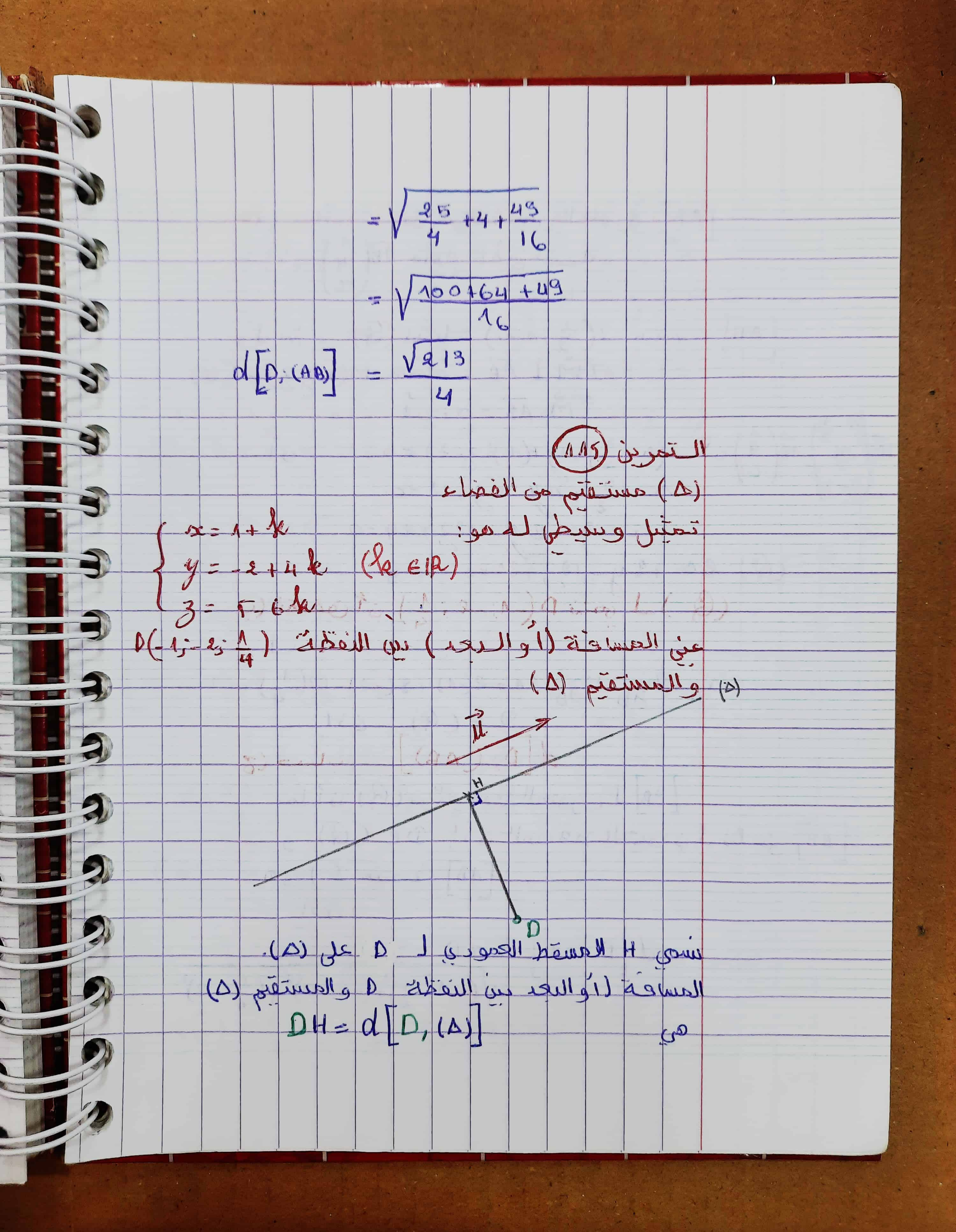
و $D \in (Q)$ إذن المسقط العمودي لـ (D) على [AB]

هو (I منتصف [AB]

إذن

$d[D,(AB)] = ID$

$=\sqrt{(-1-\frac{3}{2})^2+(-2-0)^2+(\frac{1}{4}-2)^2}$



$$= \sqrt{\frac{25}{4} + 4 + \frac{49}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{100+64+49}{16}}$$

$$d\left[D;(AB)\right] = \frac{\sqrt{213}}{4}$$

التمرين (115)

(Δ) مستقيم من الفضاء

تمثيل وسيطي له هو:

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 + 4k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = 5 - 6k \end{cases}$$

عين المسافة (أو البعد) بين النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ والمستقيم (Δ)

نسمي H المسقط العمودي لـ D على (Δ).

المسافة (أو البعد بين النقطة D والمستقيم (Δ) هي

$$DH = d\left[D,(\Delta)\right]$$

ط) تعيين احداثيات H

لدينا : $\begin{cases} H \in (\Delta) \\ \vec{DH} \perp \vec{u} \end{cases}$ حيث $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-6\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (Δ)

بما أن $H \in (\Delta)$ إذن $H(1+k ; -2+4k ; 5-6k)$

وبما أن $\vec{DH} \perp \vec{u}$ إذن $\vec{DH} \cdot \vec{u} = 0$

أي $1(k+2)+4(4k)+(-6)(\frac{19}{4}-6k)=0$ لأن $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-6\end{pmatrix}$

$k+2+16k-\frac{57}{2}+36k=0$ و $\vec{DH}\begin{pmatrix}1+k-(-1)\\-2+4k-(-2)\\5-6k-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

$53k-\frac{53}{2}=0$

أي $k=\frac{1}{2}$ أي : $\vec{DH}\begin{pmatrix}k+2\\4k\\\frac{19}{4}-6k\end{pmatrix}$

ومنه احداثيات H هي :

أي $\begin{cases} x = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y = -2+4(\frac{1}{2}) = 0 \\ z = 5-6(\frac{1}{2}) = 2 \end{cases}$ $H(\frac{3}{2} ; 0 ; 2)$

وبالتالي :

$$DH = \sqrt{(\frac{5}{2})^2+(2)^2+(\frac{7}{4})^2}$$

أي : $DH = \frac{\sqrt{213}}{4}$

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (Δ)

ومنه $DM = \sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2+(z-\frac{1}{4})^2}$

$DM = \sqrt{(1+k+1)^2+(-2+4k+2)^2+(5-6k-\frac{1}{4})^2}$

$DM = \sqrt{(k+2)^2+(4k)^2+(\frac{19}{4}-6k)^2}$

$DM = \sqrt{53k^2-53k+\frac{425}{16}}$

نلاحظ أن DM هو قيس طول $[DM]$

$DM^2 = 53k^2-53k+\frac{425}{16}$

نضع $DM^2 = f(k)$

مع $f(k) = 53k^2-53k+\frac{425}{16}$

$f'(k) = 106k-53$

k		$\frac{1}{2}$	
$f'(k)$	$-$	0	$+$
$f(k)$	↘	$f(\frac{1}{2})$	↗

ومنه

$DH^2 = f(\frac{1}{2})$

$DH = \frac{\sqrt{213}}{4}$

نضع $DM = g(k)$ حيث

$g(k) = \sqrt{53k^2-53k+\frac{425}{16}}$

$g'(k) = \frac{106k-53}{2\sqrt{53k^2-53k+\frac{425}{16}}}$

k		$\frac{1}{2}$	
$g'(k)$	$-$	0	$+$
$g(k)$	↘	$g(\frac{1}{2})$	↗

التمرين (116)

لدينا

$A(2; 1; 3)$

$B(-3; -1; 7)$

$C(3; 2; 4)$

1) تبيان أن A ، B ، C تعين مستويا.

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{-2}{1} \neq \frac{-5}{1}$

أي A ، B ، C ليست في استقامية

أي تعين مستويا وحيدا (ABC)

2) لدينا

$$(d)\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} ;(t \in \mathbb{R})$$

أ) تبيان أن $(d) \perp (ABC)$.

$(d) \perp (ABC)$ معناه $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{AB} \\ \vec{u} \perp \vec{AC} \end{cases}$ حيث $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (d)

$\vec{u}.\vec{AB} = 2(-5) + (-2)(-3) + (4)(1) = 0$

$\vec{u}.\vec{AC} = (2)(1) + (-3)(1) + (1)(1) = 0$.

إذن $(d) \perp (ABC)$

ب) معادلة (ABC)

بما أن $(d) \perp (ABC)$ إذن $\vec{u}$ شعاع توجيه (d) هو أيضا شعاع ناظمي لـ (ABC)

أي معادلة (ABC) من الشكل: $2x - 3y + z + d = 0$

بما أن $A \in (ABC)$ إذن

$$2(2) - 3(1) + 3 + d = 0$$

أي $d = -4$

ومنه

$$(ABC) : 2x - 3y + z - 4 = 0.$$

3- H نقطة تقاطع (d) و (ABC)

أ) تبيان أن H مرجح الجملة $\{(A, -2); (B, -1); (C, 2)\}$

بما أن:

$-2 + (-1) + 2 = -1 \neq 0$ إذن المرجح H الموجود ولدينا:

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{-2(2) + (-1)(-3) + 2(3)}{-2 + (-1) + 2} = \dfrac{5}{-1} = -5 \\ y_H = \dfrac{-2(1) + (-1)(-1) + 2(2)}{-2 + (-1) + 2} = \dfrac{3}{-1} = -3 \\ z_H = \dfrac{-2(3) + (-1)(7) + 2(4)}{-2 + (-1) + 2} = \dfrac{-5}{-1} = 5 \end{cases}$$

أي $H(-5; -3; 5)$

نبين أن $H \in (d)$ و $H \in (P)$

$H \in (P)$ لأن $2(-5) - 3(-3) + (5) - 4 = 0$

$H \in (d)$ لأن

$$\begin{cases} -5 = -7 + 2t \\ -3 = -3t \\ 5 = 4 + t \end{cases}$$

تقبل حل وحيد ($t = 1$)

وهو المطلوب

2) نعين H تقاطع (d) و (ABC)

إحداثيات H هي حلول الجملة

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \\ 2x - 3y + z - 4 = 0 \quad \dots (*) \end{cases}$$

و بعد التعويض في (*) نجد

$$2(-7+2t) - 3(-3t) + (4+t) - 4 = 0$$

$$-14 + 4t + 9t + 4 + t - 4 = 0$$

$$14t = 14$$

$t = 1$ ومنه $H(-5; -3; 5)$

و بما أن:

$$-2 + (-1) + 2 \neq 0$$

إذا مرجح الجملة $\{(A; -2); (B; -1); (C; 2)\}$ موجود ووحيد

و ليكن G

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{-2(1) + (-1)(-3) + 2(3)}{-2(1) + (-1) + 2} = -5 \\ y_G = \dfrac{-2(1) + (-1)(-1) + 2(2)}{-2 + (-1) + 2} = -3 \\ z_G = \dfrac{-2(3) + (-1)(7) + 2(4)}{-2 + (-1) + 2} = 5 \end{cases}$$

أي $G(-5; -3; 5)$ ومنه $(G = H)$

إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$

فإن:

الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$

ثابت (أي مستقل عن النقطة M)

مثال: $-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

$=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

4) تعيين (S_1) حيث $S_1=\left\{M;(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})\right\}$

لدينا:

•) $-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(-2-1+2)\overrightarrow{MH}$

$=-\overrightarrow{MH}$

•) $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}$

شعاع ثابت

إذن $(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$

تصبح $-\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CB}$

أي $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CB}=0$

أي $\overrightarrow{MH}\perp\overrightarrow{CB}$

ومنه (S_1) مستوي حيث $\overrightarrow{CB}$ شعاع ناظمي له

ويشمل النقطة H

تعيين معادلة (S_1)

لدينا $\vec{CB}\begin{pmatrix}-6\\-3\\3\end{pmatrix}$

إذن معادلة (S_1) من الشكل $-6x-3y+3z+d=0$

وبما أن $H\in(S_1)$ إذن $-6(-5)-3(-3)+3(5)+d=0$

$d=-54$

ومنه

$(S_1): -6x-3y+3z-54=0$

$2x+y-z+18=0$.

5) تعيين (S_2) حيث:

$S_2=\{M;\ \|-2\vec{MA}-\vec{MB}+2\vec{MC}\|=\sqrt{29}\}$

تكافئ $\|-2\vec{MA}-\vec{MB}+2\vec{MC}\|=\sqrt{29}$

$\|-\vec{MH}\|=\sqrt{29}$

$MH=\sqrt{29}$

ومنه (S_2) سطح كرة مركزها H ونصف قطرها $R=\sqrt{29}$

معادلة (S_2) هي

$(x+5)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=(\sqrt{29})^2$

6) تعيين $(S_2)\cap(S_1)$

لاحظ بما أن $H\in(S_1)$ و H مركز السطح (S_2)

إذن (S_1) يقطع (S_2) وفق دائرة مركزها H (الكبير دائرة)

ونصف قطرها $R=\sqrt{29}$.

$HS = \sqrt{29}$ معناه $S \in (S_1) \cap (S_2)$

$HS^2 = (8+5)^2 + (1+3)^2 + (3-5)$

$HS^2 = 29$

أي $HS = \sqrt{29}$

ومنه $S \in (S_1) \cap (S_2)$

التمرين (117)

(Δ) مستقيم من الفضاء تمثيله الوسيطي هو

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

(S) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء بحيث

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$$

1) بين أن (S) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزه Ω ونصف قطره R

2) ادرس تقاطع (Δ) و (S)

1) تبيان أن (S) سطح كرة

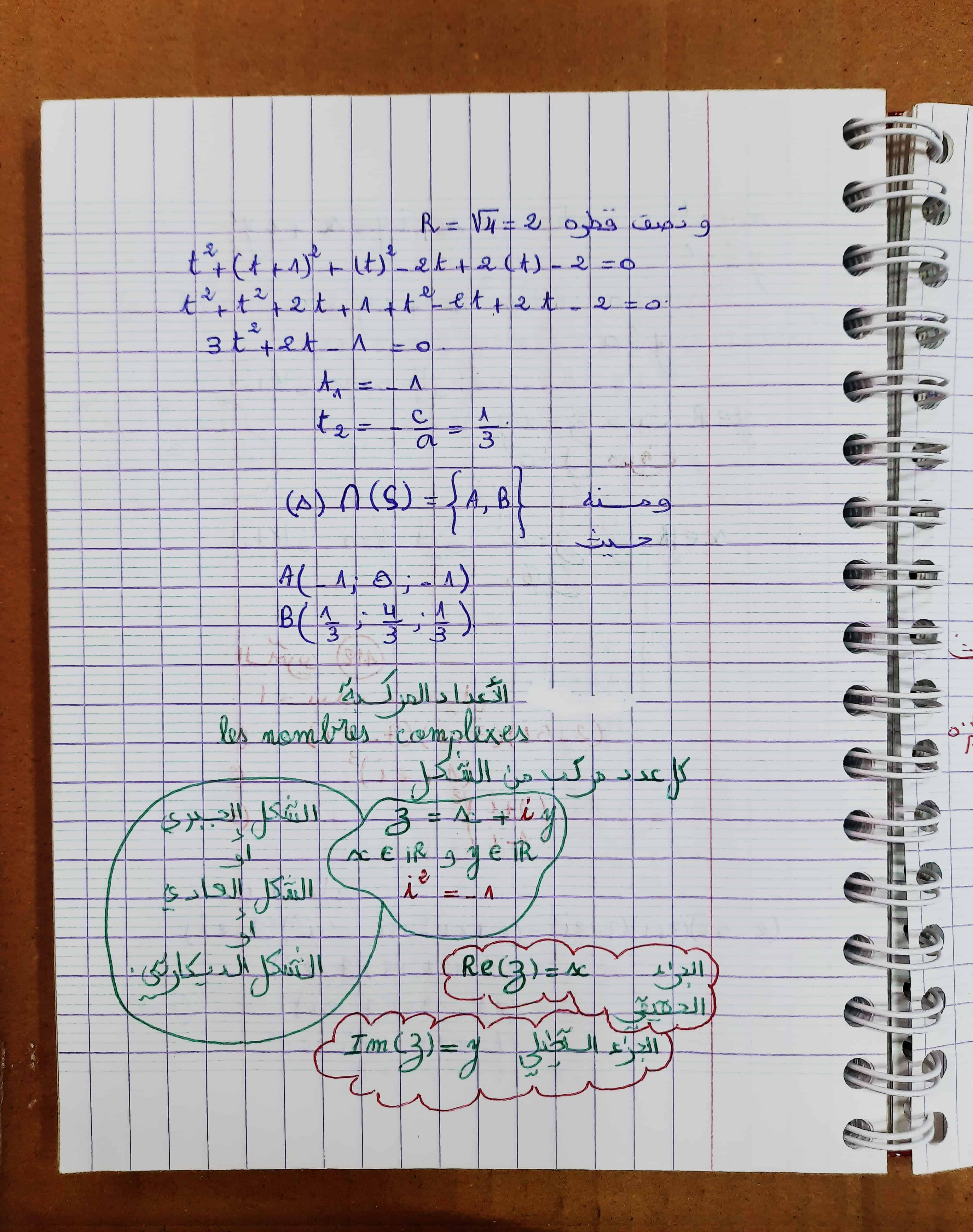
المعادلة تكتب:

$$(x^2 - 2x) + y^2 + (z^2 + 2z) - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 - (1)^2 + y^2 + (z+1)^2 - (1) - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$$

أي (S) سطح كرة مركزه $\Omega(1; 0; 1)$



ونصف قطره $R = \sqrt{4} = 2$

$$t^2 + (t+1)^2 + (t)^2 - 2t + 2(t) - 2 = 0$$

$$t^2 + t^2 + 2t + 1 + t^2 - 2t + 2t - 2 = 0$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t_1 = -1$$

$$t_2 = -\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

ومنه $(\Delta) \cap (S) = \{A, B\}$

حيث

$A(-1 ; 0 ; -1)$

$B\left(\frac{1}{3} ; \frac{4}{3} ; \frac{1}{3}\right)$

الأعداد المركبة

les nombres complexes

كل عدد مركب من الشكل

$$z = x + iy$$

$x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$

$i^2 = -1$

الشكل الجبري

أو

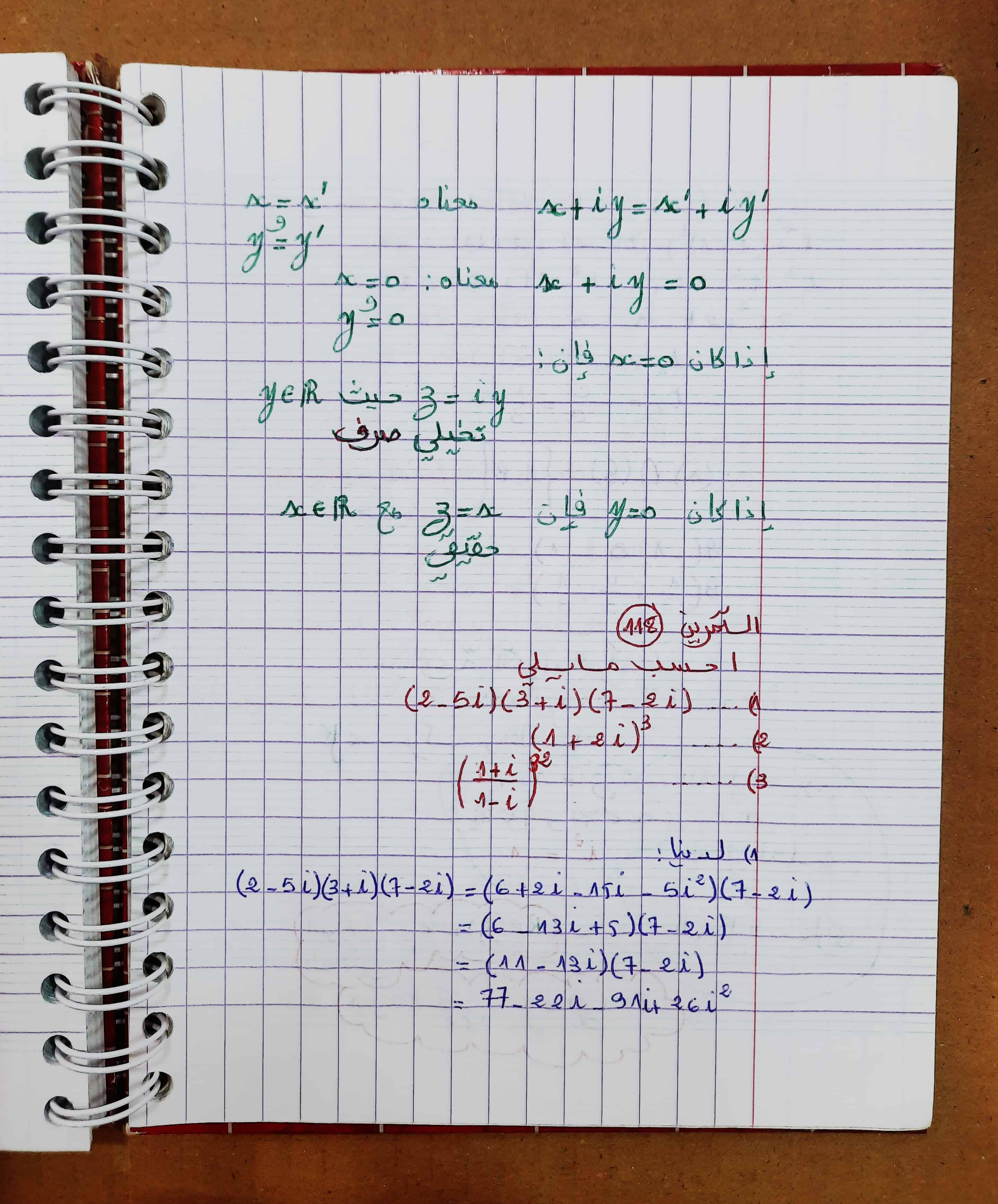
الشكل العادي

أو

الشكل الديكارتي

الجزء الحقيقي $Re(z) = x$

الجزء التخيلي $Im(z) = y$



$x+iy=x'+iy'$ معناه $x=x'$ و $y=y'$

$x+iy=0$ معناه: $x=0$ و $y=0$

إذا كان $x=0$ فإن: $z=iy$ حيث $y\in\mathbb{R}$ تخيلي صرف

إذا كان $y=0$ فإن $z=x$ مع $x\in\mathbb{R}$ حقيقي

التمرين (118)

احسب ما يلي

1) $(2-5i)(3+i)(7-2i)$

2) $(1+2i)^3$

3) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$

1) لدينا:

$$(2-5i)(3+i)(7-2i)=(6+2i-15i-5i^2)(7-2i)$$
$$=(6-13i+5)(7-2i)$$
$$=(11-13i)(7-2i)$$
$$=77-22i-91i+26i^2$$

$= 77 - 113i - 26$

$= 51 - 113i$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2) لدينا

$(1+2i)^3 = (1)^3 + 3(1)^2(2i) + 3(1)(2i)^2 + (2i)^3$

$= 1 + 6i - 12 - 8i$

$= -11 - 2i$

$(1+i)^2 = 2i$

$(1-i)^2 = -2i$

3) لدينا

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{32} = \left[\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right]^{16}$

$= \left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}\right]^{16}$

$= \left[\frac{2i}{-2i}\right]^{16}$

$= (-1)^{16}$

$= 1$

التمرين (119)

حل، في $\mathbb{C}$، المعادلة $z^2 + 2i = 0$

لدينا: نكتب: $z^2 + 2i = 0$

$z^2 = -2i$

أي: $z^2 = (1-i)^2$

لأن $(1-i)^2 = -2i$

$z = 1 - i$ أو

$z = -(1-i) = -1 + i$

أي : $S = \{1-i \,;\, -1+i\}$

التمرين (120)

عين العدد الحقيقي α بحيث

$$40 + 42i = (7 + \alpha i)^2$$

لدينا : $40 + 42i = (7 + \alpha i)^2$ ، $40 + 42i = 49 + 14\alpha i + (\alpha i)^2$

أي : $40 + 42i = 49 + 14\alpha i - \alpha^2$

أي $40 + 42i = (49 - \alpha^2) + 14\alpha i$

وبالمطابقة نجد

$$\begin{cases} 49 - \alpha^2 = 40 \quad \ldots\ldots (1) \\ 14\alpha = 42 \quad \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد $\alpha = \frac{42}{14} = 3$

نلاحظ أن (1) محققة من أجل $\alpha = 3$

(لأن : $49 - (3)^2 = 40$)

ومنه $\alpha = 3$

$$40 + 42i = (7 + 3i)^2$$

التمرين (121)

بين أن المعادلة الآتية :

$$z^3 - 4(1-i)z^2 + 16(1-i)z + 64i = 0$$

تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه

حل تخيلي صرف للمعادلة المعطاة iy (مع $y \in \mathbb{R}$)

$$(iy)^3 - 4(1-i)(iy)^2 + 16(1-i)iy + 64i = 0$$

$$-iy^3 - 4(1-i)(-y^2) + 16iy + 16y + 64i = 0$$

$$-iy^3 + 4y^2 - 4iy^2 + 16iy + 16y + 64i = 0$$

$$(4y^2 + 16y) + i(-y^3 - 4y^2 + 16y + 64) = 0$$

وبالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 4y^2 + 16y = 0 \quad \dots (1) \\ \text{و} \\ -y^3 - 4y^2 + 16y + 64 = 0 \quad \dots (2) \end{cases}$$

(1) تكافئ $4y(y+4) = 0$

$$\begin{cases} 4y = 0 \\ \text{أو} \\ y + 4 = 0 \end{cases}$$

ومنه

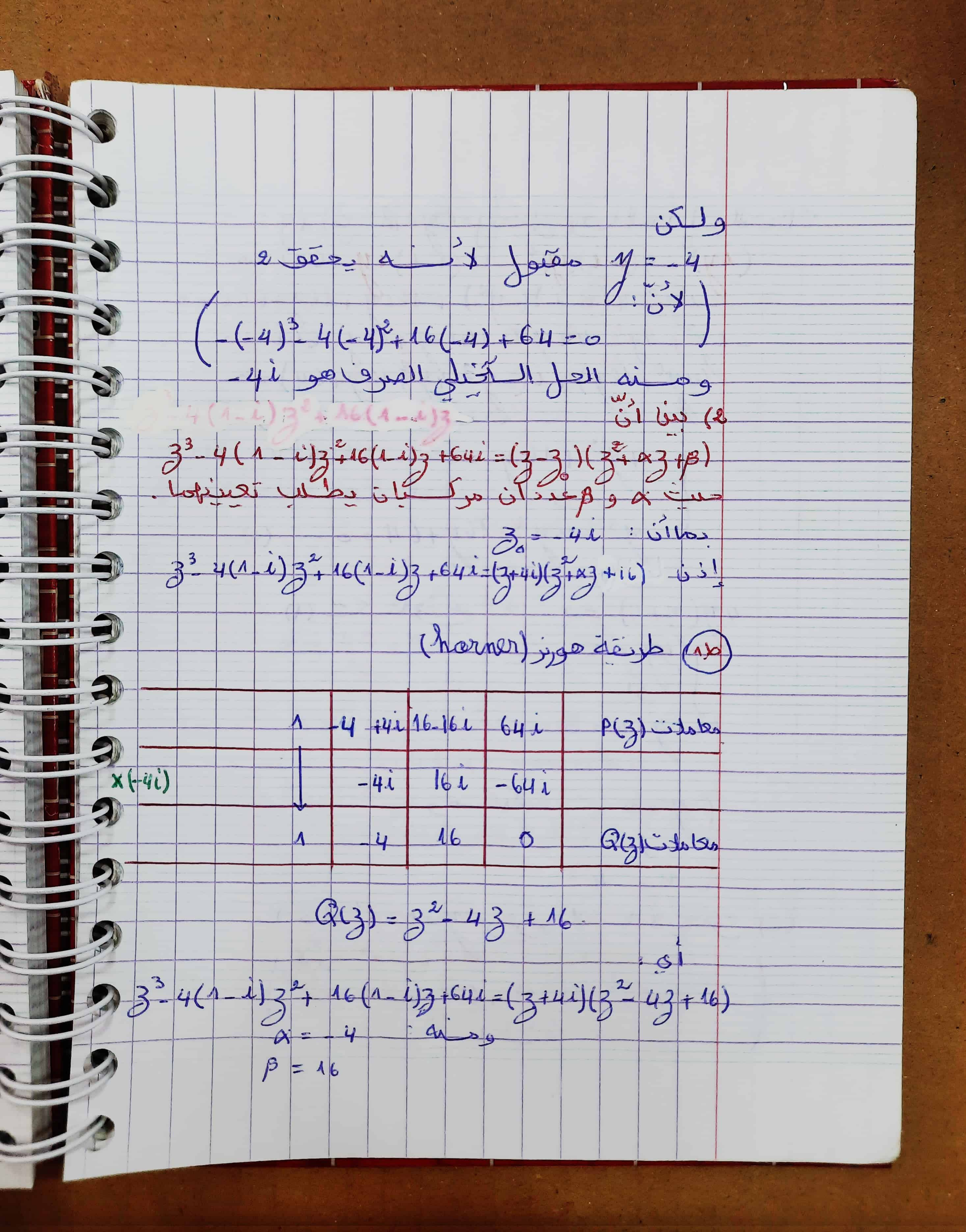
$$\begin{cases} y = 0 \\ \text{أو} \\ y = -4 \end{cases}$$

نلاحظ أن $y = 0$ مرفوض لأنه لا يحقق (2)

لأن

$$\left(-0 - 4(0)^2 + 16(0) + 64 = 0 \right.$$

خاطئة. $\left. \right)$



ولكن

$y=-4$ مقبول لأنه يحقق e

لأن: $\left(-(-4)^3-4(-4)^2+16(-4)+64=0\right)$

ومنه الحل التخيلي الصرف هو $-4i$.

2) بين أن

$z^3-4(1-i)z^2+16(1-i)z+64i=(z-z_0)(z^2+\alpha z+\beta)$

حيث α و β عددان مركبان يطلب تعيينهما.

بما أن: $z_0=-4i$

إذن $z^3-4(1-i)z^2+16(1-i)z+64i=(z+4i)(z^2+\alpha z+16)$

ط1) طريقة هورنر (horner)

	1	$-4+4i$	$16-16i$	$64i$	معاملات $P(z)$
$\times(-4i)$	↓	$-4i$	$16i$	$-64i$	
	1	-4	16	0	معاملات $Q(z)$

$Q(z)=z^2-4z+16$

أي:

$z^3-4(1-i)z^2+16(1-i)z+64i=(z+4i)(z^2-4z+16)$

ومنه: $\alpha=-4$

$\beta=16$

2b) من أجل كل $z \in \mathbb{C}$ لدينا:

$$z^3 - 4(1-i)z^2 + 16(1-i)z + 64i = (z+4i)(z^2+\alpha z+\beta)$$
$$= z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 4iz^2 + 4i\alpha z + 4\beta i$$
$$= z^3 + (\alpha+4i)z^2 + (\beta+4i\alpha)z + 4\beta i$$

وبالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ \alpha + 4i = -4(1-i) \quad \dots (1) \\ \beta + 4i\alpha = 16(1-i) \quad \dots (2) \\ 4\beta i = 64i \quad \dots (3) \end{cases}$$

من (1) نجد $\alpha = -4 + 4i - 4i$

أي $\alpha = -4$

من (3) نجد: $\beta = \dfrac{64i}{4i}$ أي: $\beta = 16$

نتحقق من صحة (2)

لدينا

$$\beta + 4i\alpha = 16 + 4i(-4)$$
$$= 16 - 16i$$
$$= 16(1-i)$$ أي (2) محققة

ومنه $\alpha = -4$

$\beta = 16$

وبالتالي: $z^3 - 4(1-i)z^2 + 16(1-i)z + 64i = (z+4i)(z^2 - 4z + 16)$

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة المعطاة:

المعادلة تكتب: $(z+4i)(z^2-4z+16) = 0$

أي: ($z=-4i$ أو)

$$\begin{cases} z+4i=0 \\ \text{أو} \\ z^2-4z+16=0 \end{cases}$$

نحل المعادلة $z^2-4z+16=0$ لدينا:

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$=(-4)^2-4(1)(16)$$
$$=16-64$$
$$=-48$$
$$=48(-1)$$
$$=48i^2$$

ومنه

$$z_1=\frac{4+4i\sqrt{3}}{2}=2+2i\sqrt{3}$$

$$z_2=\frac{4-4i\sqrt{3}}{2}=2-2i\sqrt{3}$$

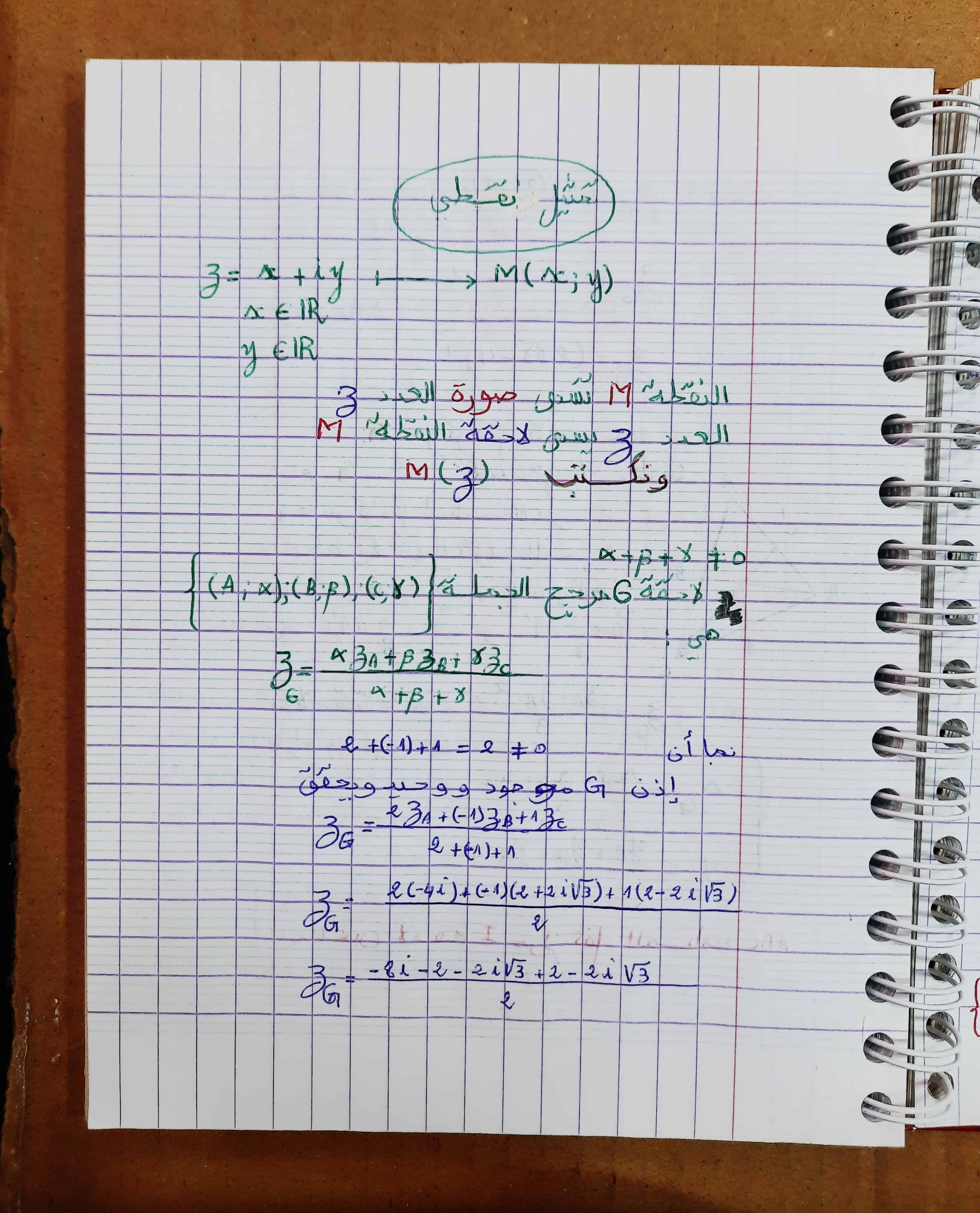
ومنه في مجموعة حلول المعادلة المعطاة

$$S=\{-4i;\ 2+2i\sqrt{3};\ 2-2i\sqrt{3}\}$$

4) نضع

$$z_A=-4i$$
$$z_B=2+2i\sqrt{3}$$
$$z_C=2-2i\sqrt{3}.$$

أ) عين لاحقة G مرجح الجملة $\{(A;2);(B;-1);(C;1)\}$



تمثيل نقطي

$$z = x + iy \longmapsto M(x\,;y)$$

$x \in \mathbb{R}$

$y \in \mathbb{R}$

النقطة M تسمى صورة العدد z

العدد z يسمى لاحقة النقطة M

ونكتب $M(z)$

$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

لاحقة G مرجح الجملة $\{(A\,;\alpha);(B\,;\beta);(C\,;\gamma)\}$ هي:

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

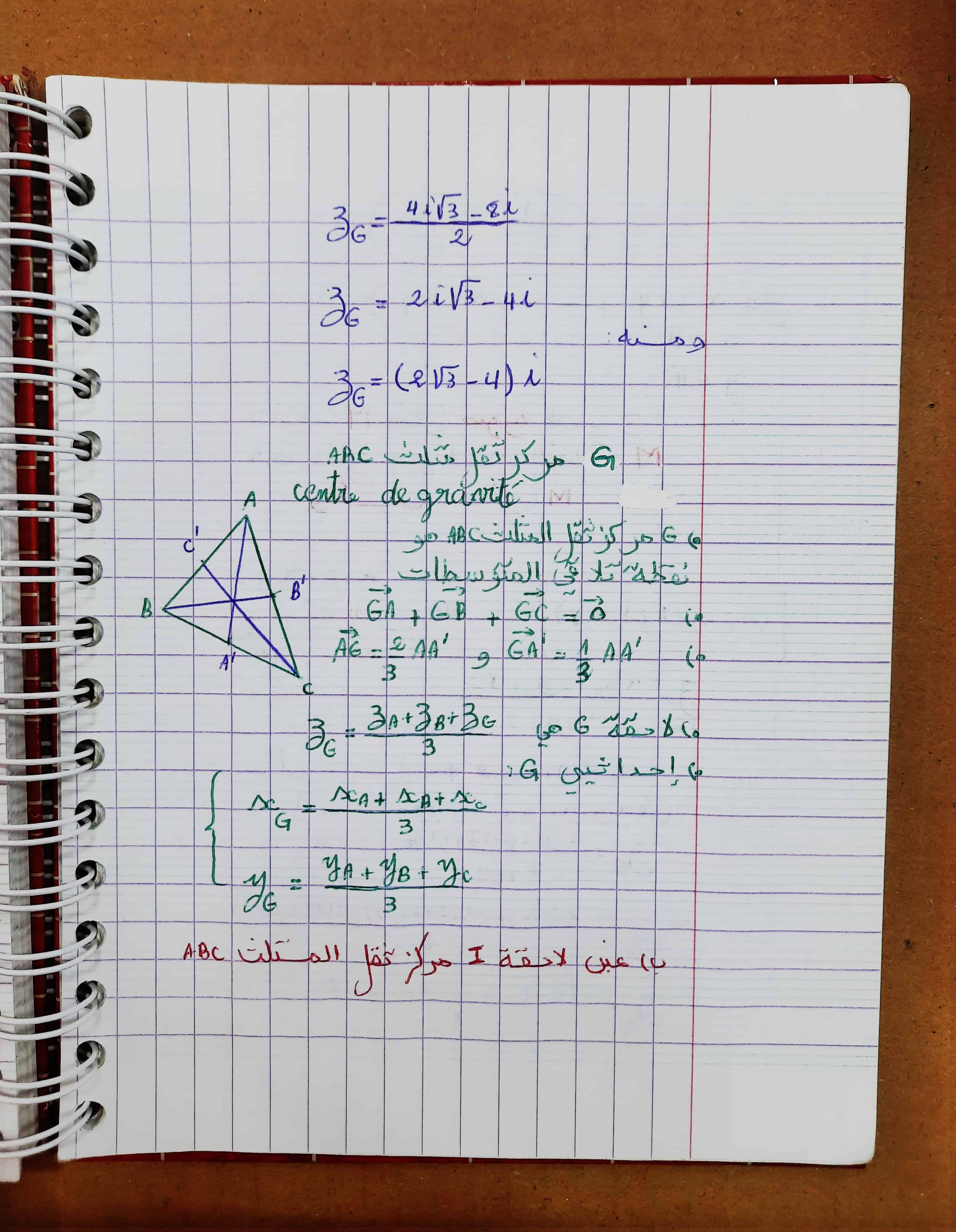
بما أن $2 + (-1) + 1 = 2 \neq 0$

إذن G موجود ووحيد ويحقق

$$z_G = \frac{2 z_A + (-1) z_B + 1 z_C}{2 + (-1) + 1}$$

$$z_G = \frac{2(-4i) + (-1)(2 + 2i\sqrt{3}) + 1(2 - 2i\sqrt{3})}{2}$$

$$z_G = \frac{-8i - 2 - 2i\sqrt{3} + 2 - 2i\sqrt{3}}{2}$$



$$z_G = \frac{4i\sqrt{3} - 8i}{2}$$

$$z_G = 2i\sqrt{3} - 4i$$

ومنه:

$$z_G = (2\sqrt{3} - 4)\,i$$

G مركز ثقل مثلث ABC

centre de gravité

A, B, C, A', B', C'

• G مركز ثقل المثلث ABC هو نقطة تلاقي المتوسطات

• $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

• $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$ و $\vec{GA'} = \frac{1}{3}\vec{AA'}$

• لاحقة G هي $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

• إحداثيي G:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_c}{3} \\[2ex] y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_c}{3} \end{cases}$$

ب) عين لاحقة I مركز ثقل المثلث ABC

بما أن I هو مركز ثقل المثلث ABC إذن:

$$z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

$$z_I = \frac{-4i + 2 - 2i\sqrt{3} + 2 + 2i\sqrt{3}}{3}$$

$$z_I = \frac{4 - 4i}{3}$$

ومنه:

$$z_I = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}i$$

التمرين 122

$P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

$$P(z) = z^4 + (2-i)z^3 + z^2 + (12-i)z + 20 - 10i$$

بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه.

$z_0 = x$ حيث $x \in \mathbb{R}$ حل حقيقي للمعادلة $P(z)=0$

معناه: $x^4 + (2-i)x^3 + x^2 + (12-i)x + 20 - 10i = 0$

$x^4 + 2x^3 - ix^3 + x^2 + 12x - ix + 20 - 10i = 0.$

أي $(x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + 20) + i(-x^3 - x - 10) = 0.$

وبالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + 20 = 0 \ \ldots\ldots (1) \\ -x^3 - x - 10 = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

إذا كانت المعادلة (2) تقبل حلا صحيحا فإن هذا الحل يكون قاسما لـ 10.

مجموعة قواسم 10 في $\mathbb{Z}$ هي $D_{10} = \{\pm1; \pm2; \pm5; \pm10\}$

نلاحظ أن 2- حل للمعادلة (2) لأن

لأن: $-(-2)^3 - (-2) - 10 = 10 - 10 = 0$

نتحقق من صحة (1) من أجل $x = -2$

لدينا $(-2)^4 + 2(-2)^3 + (-2)^2 + 12(-2) + 20$

$= 16 - 16 + 4 - 24 + 20$

$= 0$

أي محققة

ومنه $x = -2$ هو الحل الحقيقي للمعادلة $P(z) = 0$ (2).

التمرين 123

في المستوي المزود بالمعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A، B، C و D صور الأعداد المركبة

$1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1-2i$ ، $1+\sqrt{3}-i$ على الترتيب

أ) ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

ب) أكتب معادلة للدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC

ج) إثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (Γ)

د) أنشئ (Γ) و النقط A، B، C و D في المعلم المعطى.

لدينا $z_A = 1 + 2i$ أي $A(1; 2)$

$z_B = 1 + \sqrt{3} + i$ أي $B(1+\sqrt{3}, 1)$

$C(1;-2)$ أي $z_C = 1-2i$

$D(1+\sqrt{3};-1)$ أي $z_D = 1+\sqrt{3}-i$

أ) طبيعة المثلث ABC

لدينا:

- $AB^2 = (1+\sqrt{3}-1)^2+(1-2)^2$

$AB^2 = 3+1$

$AB^2 = 4$

- $AC^2 = (1-1)^2+(-2-2)^2$

$AC^2 = 16$

- $BC^2 = (1-1-\sqrt{3})^2+(-2-1)^2$

$BC^2 = 12$.

بما أن $BC^2 + AB^2 = AC^2$

إذن ABC مثلث قائم في B.

أ) طبيعة المثلث ABC

بما أن ABC مثلث قائم في B إذن الدائرة المحيطة بالمثلث ABC مركزها I منتصف $[AC]$ ونصف قطرها $R = \frac{AC}{2}$

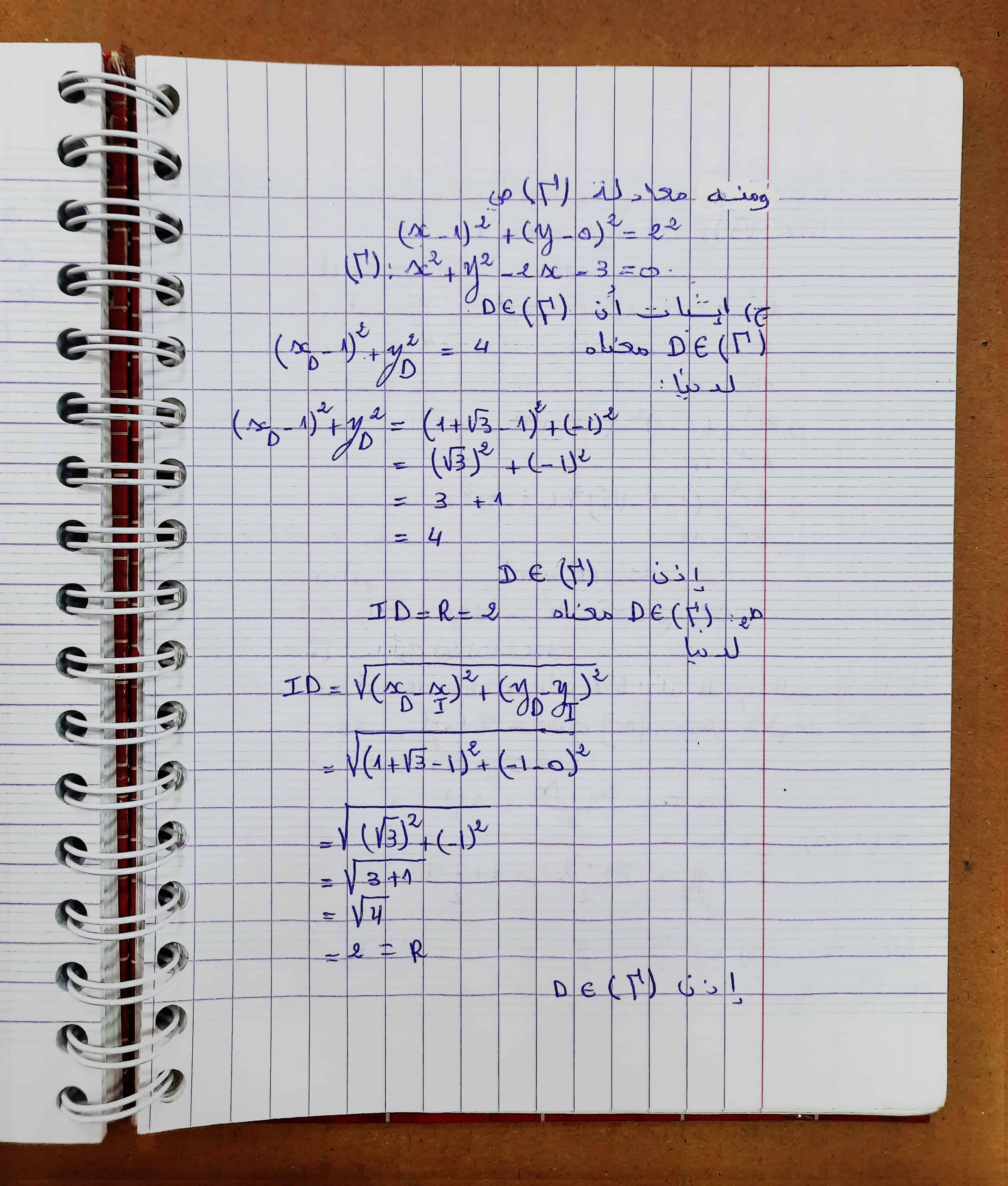
إحداثيي I:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = 0 \end{cases}$$

أي $I(1;0)$

ولدينا $R = \frac{AC}{2} = \frac{4}{2} = 2$ لأن $AC^2 = 16$

أي $AC = \sqrt{16} = 4$



ومنه معادلة (Γ') هي

$$(x-1)^2+(y-0)^2=2^2$$

$$(\Gamma'): x^2+y^2-2x-3=0.$$

ج) إثبات أن $D \in (\Gamma')$

$D \in (\Gamma')$ معناه $(x_D-1)^2+y_D^2=4$

لدينا:

$$(x_D-1)^2+y_D^2=(1+\sqrt{3}-1)^2+(-1)^2$$
$$=(\sqrt{3})^2+(-1)^2$$
$$=3+1$$
$$=4$$

إذن $D \in (\Gamma')$

ط2: $D \in (\Gamma')$ معناه $ID=R=2$

لدينا

$$ID=\sqrt{(x_D-x_I)^2+(y_D-y_I)^2}$$
$$=\sqrt{(1+\sqrt{3}-1)^2+(-1-0)^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}$$
$$=\sqrt{3+1}$$
$$=\sqrt{4}$$
$$=2=R$$

إذن $D \in (\Gamma')$

ن) انشاء (Γ) والنقط A ، B ، C ، D

التمرين 124

ليكن العدد المركب Z

حيث: $Z = (x^2 + y^2 - 4x + 6y) + i(2xy + 4y)$

مع: $x \in \mathbb{R}$

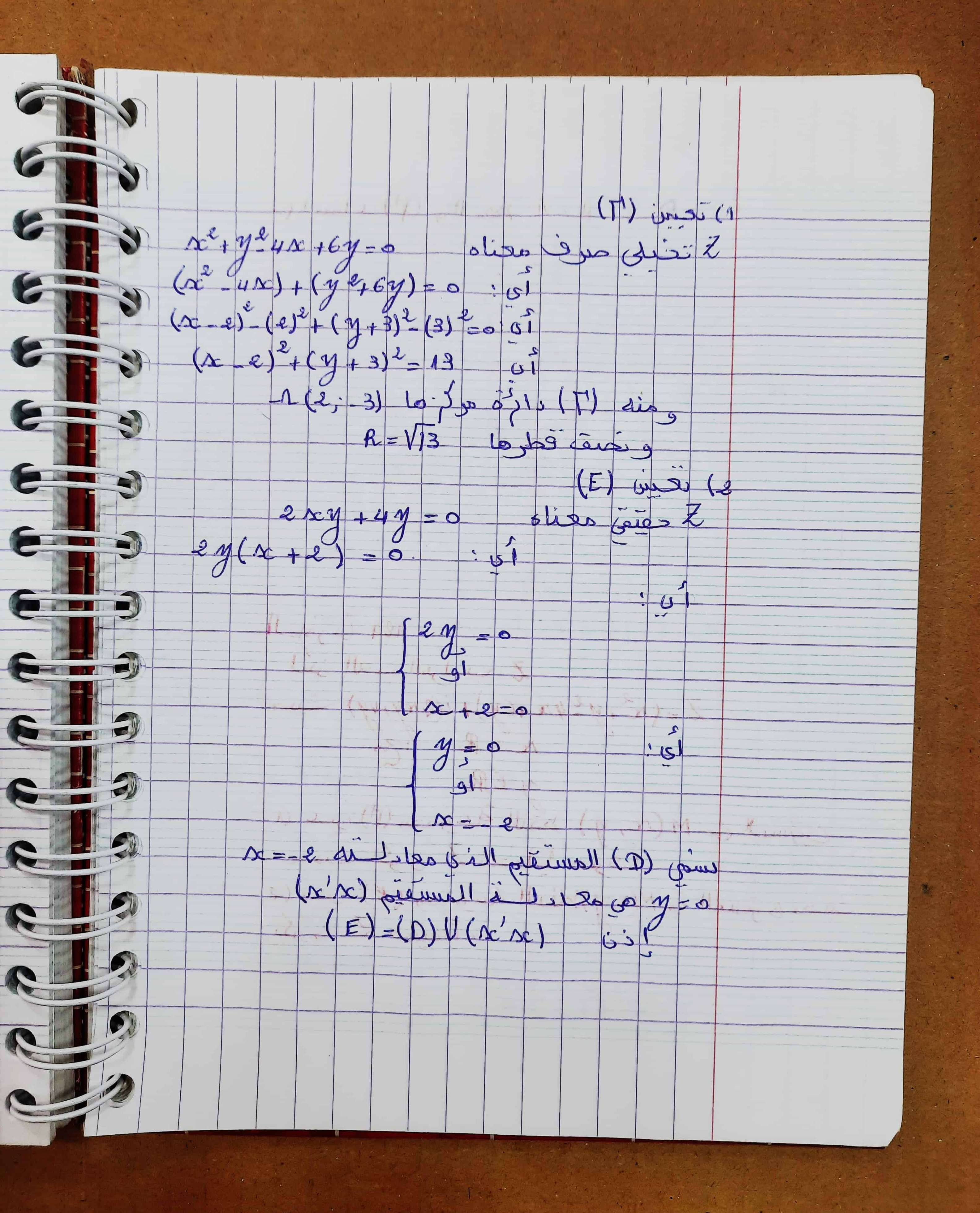
$y \in \mathbb{R}$

1) عين (Γ) مجموعة النقط $M(x ; y)$ من المستوي

بحيث يكون Z تخيليًا صرفًا

2) عين (E) مجموعة النقط $M(x ; y)$ من المستوي بحيث

يكون Z حقيقيًا.



1) تعيين (Γ)

z تخيلي صرف معناه $x^2+y^2-4x+6y=0$

أي: $(x^2-4x)+(y^2+6y)=0$

أي: $(x-2)^2-(2)^2+(y+3)^2-(3)^2=0$

أي: $(x-2)^2+(y+3)^2=13$

ومنه (Γ) دائرة مركزها $\Omega(2;-3)$

ونصف قطرها $R=\sqrt{13}$

2) تعيين (E)

z حقيقي معناه $2xy+4y=0$

أي: $2y(x+2)=0$

أي:

$$\begin{cases} 2y=0 \\ \text{أو} \\ x+2=0 \end{cases}$$

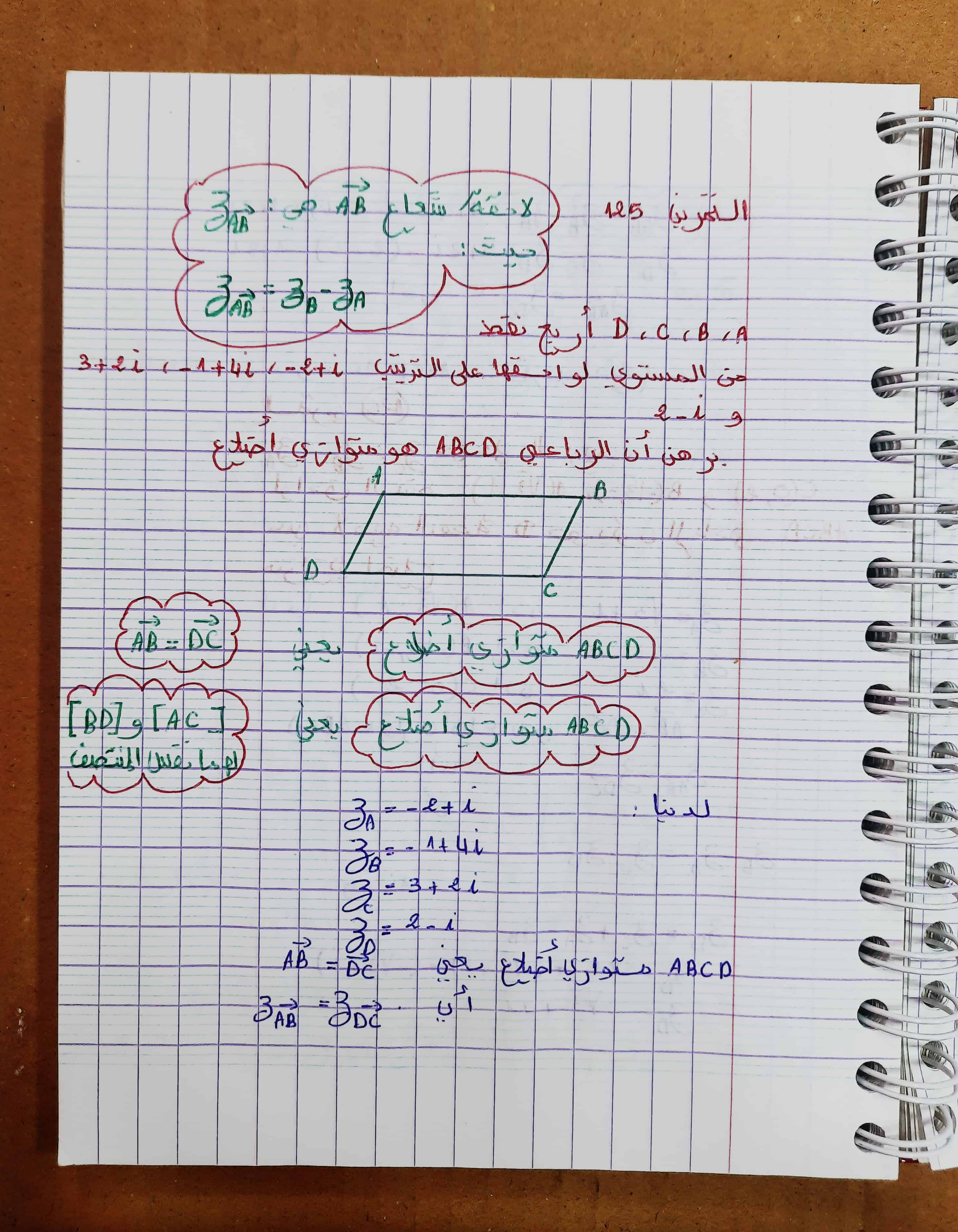
أي:

$$\begin{cases} y=0 \\ \text{أو} \\ x=-2 \end{cases}$$

نسمي (D) المستقيم الذي معادلته $x=-2$

$y=0$ هي معادلة المستقيم $(x'x)$

إذن $(E)=(D)\cup(x'x)$



التمرين 125

لاحقة شعاع $\vec{AB}$ هي : $z_{\vec{AB}}$ حيث :

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$$

A ، B ، C ، D أربع نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $-2+i$ ، $-1+4i$ ، $3+2i$ و $2-i$

برهن أن الرباعي ABCD هو متوازي أضلاع.

ABCD متوازي أضلاع يعني $\vec{AB} = \vec{DC}$

ABCD متوازي أضلاع يعني $[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف

لدينا :

$z_A = -2+i$

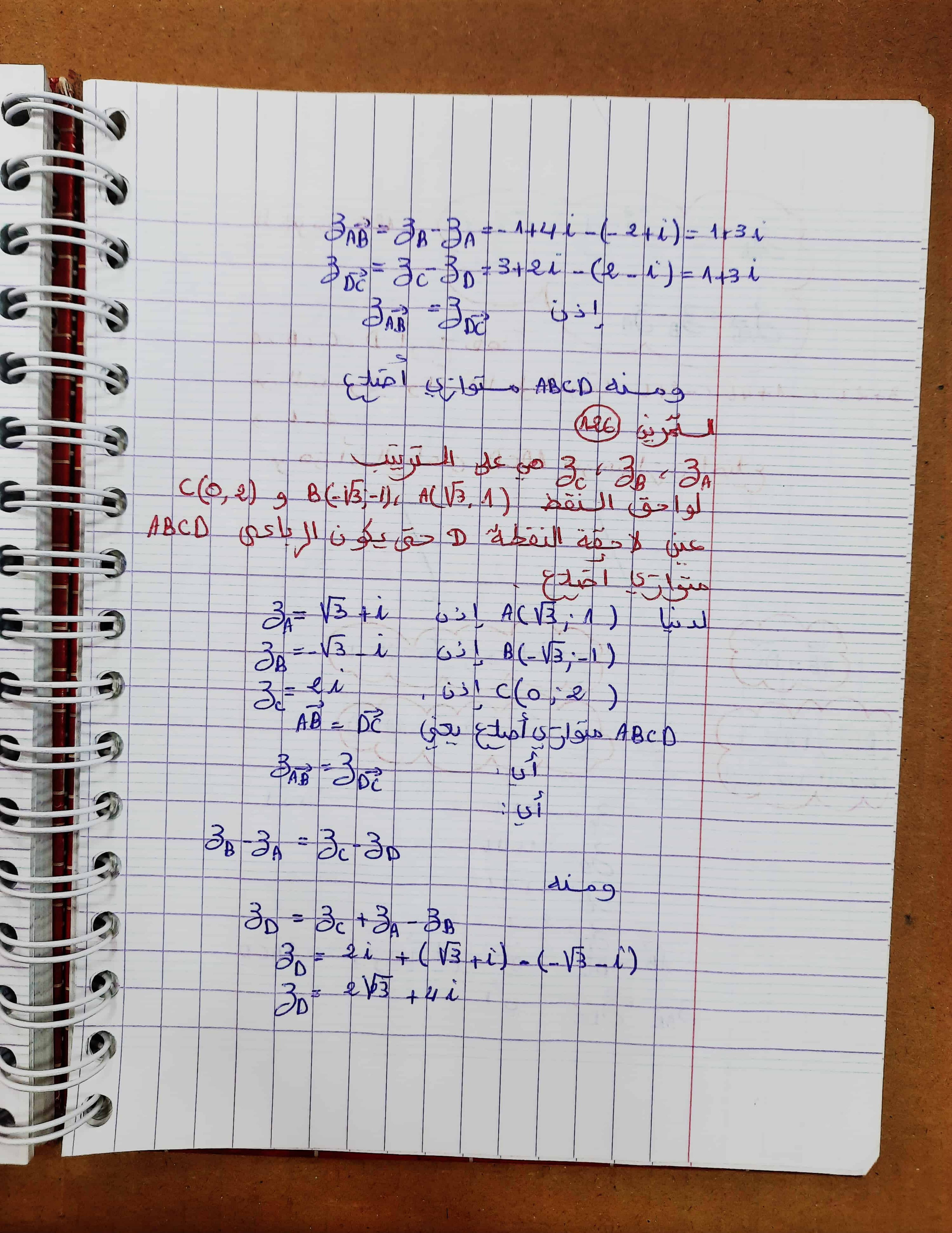
$z_B = -1+4i$

$z_C = 3+2i$

$z_D = 2-i$

ABCD متوازي أضلاع يعني $\vec{AB} = \vec{DC}$

أي $z_{\vec{AB}} = z_{\vec{DC}}$.



$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = -1+4i-(-2+i) = 1+3i$$
$$z_{\vec{DC}} = z_C - z_D = 3+2i-(2-i) = 1+3i$$

إذن $z_{\vec{AB}} = z_{\vec{DC}}$

ومنه ABCD متوازي أضلاع

التمرين 126

z_A ، z_B ، z_C هي على الترتيب لواحق النقط $A(\sqrt{3}, 1)$ ، $B(-\sqrt{3}, -1)$ و $C(0, 2)$

عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع

لدينا $A(\sqrt{3}; 1)$ إذن $z_A = \sqrt{3} + i$

$B(-\sqrt{3}; -1)$ إذن $z_B = -\sqrt{3} - i$

$C(0; 2)$ إذن $z_C = 2i$

ABCD متوازي أضلاع يعني $\vec{AB} = \vec{DC}$

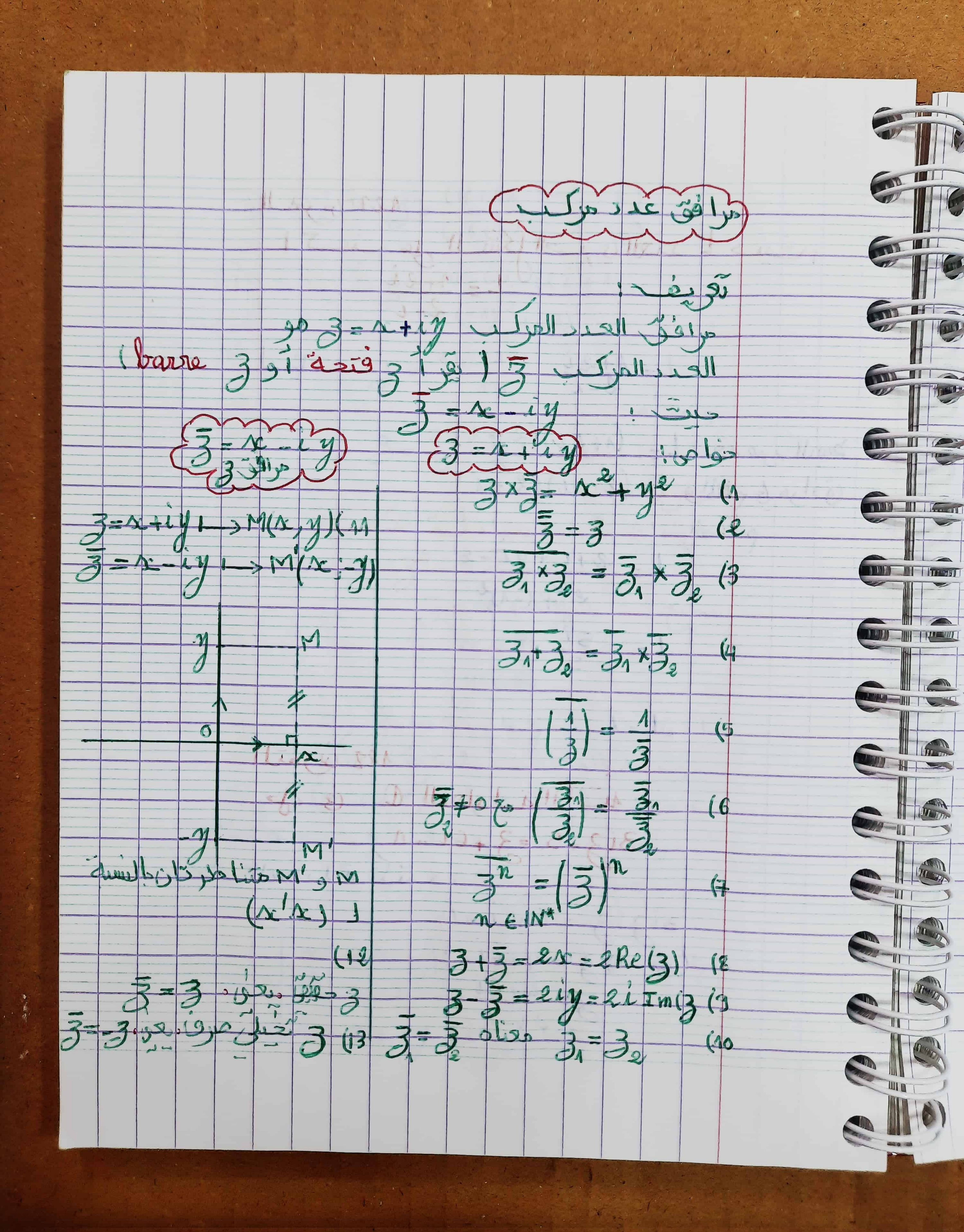
أي $z_{\vec{AB}} = z_{\vec{DC}}$

أي:

$$z_B - z_A = z_C - z_D$$

ومنه

$$z_D = z_C + z_A - z_B$$
$$z_D = 2i + (\sqrt{3}+i) - (-\sqrt{3}-i)$$
$$z_D = 2\sqrt{3} + 4i$$



مرافق عدد مركب

تعريف:

مرافق العدد المركب $z = x+iy$ هو العدد المركب $\bar{z}$ (نقرأ z barre أو z فتحة)

حيث: $\bar{z} = x - iy$

خواص: $z = x+iy$ ، $\bar{z} = x - iy$ مرافق z

1) $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$

2) $\bar{\bar{z}} = z$

3) $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$

4) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$

5) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

6) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ مع $z_2 \neq 0$

7) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ ، $n \in \mathbb{N}^*$

8) $z + \bar{z} = 2x = 2Re(z)$

9) $z - \bar{z} = 2iy = 2i\,Im(z)$

10) $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$ معناه $z_1 = z_2$

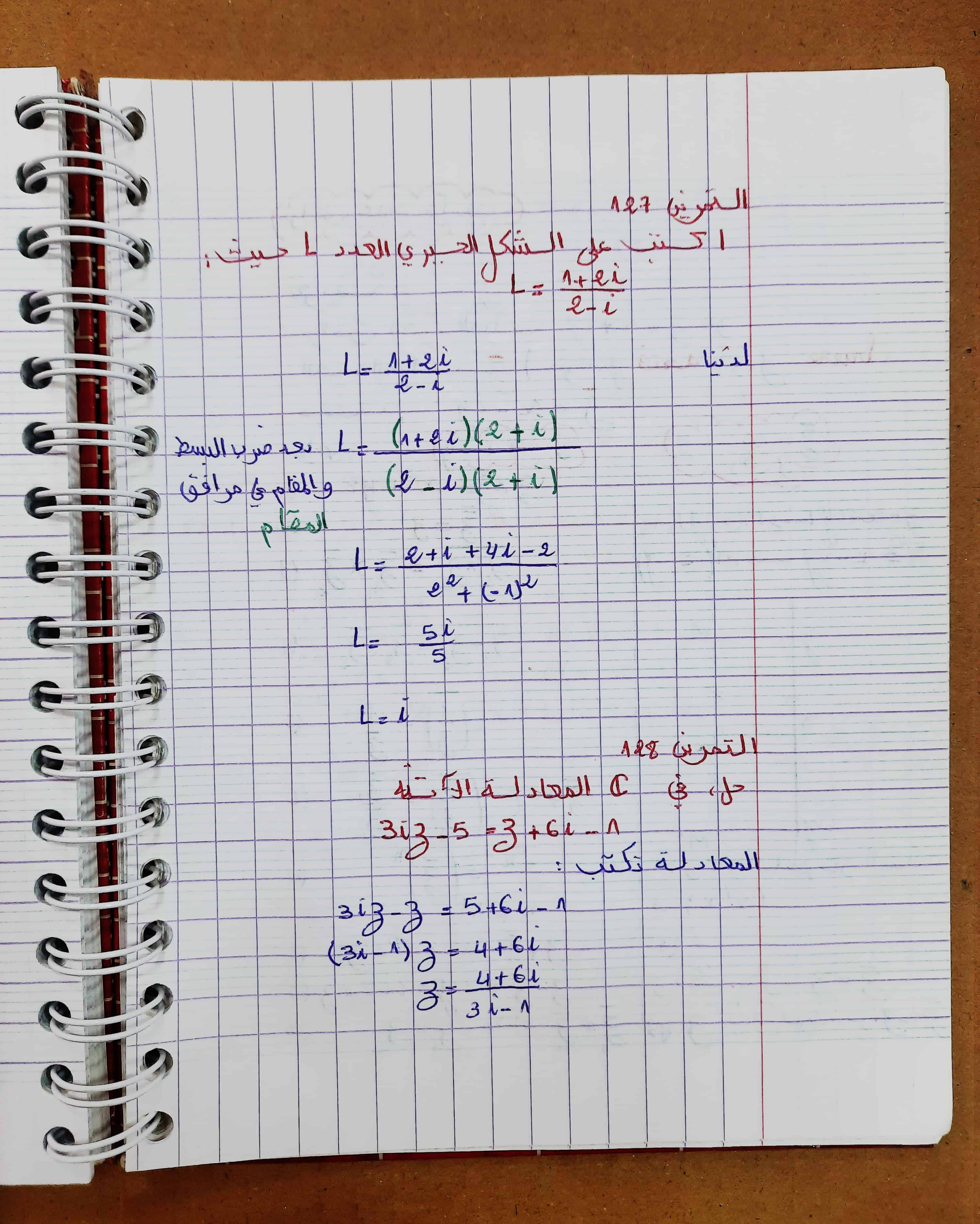
11) $z = x+iy \longmapsto M(x,y)$

$\bar{z} = x-iy \longmapsto M'(x;-y)$

M و M' متناظرتان بالنسبة لـ $(x'x)$

12) z حقيقي معناه $z = \bar{z}$

13) z تخيلي صرف معناه $\bar{z} = -z$



التمرين 127

اكتب على الشكل الجبري العدد L حيث:

$$L = \frac{1+2i}{2-i}$$

لدينا

$$L = \frac{1+2i}{2-i}$$

$$L = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

بعد ضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$L = \frac{2+i+4i-2}{2^2+(-1)^2}$$

$$L = \frac{5i}{5}$$

$$L = i$$

التمرين 128

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة الآتية

$$3iz - 5 = z + 6i - 1$$

المعادلة تكتب:

$$3iz - z = 5 + 6i - 1$$

$$(3i-1)z = 4+6i$$

$$z = \frac{4+6i}{3i-1}$$

$$z=\frac{(4+6i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}$$

$$z=\frac{-4-6i-12i+18}{(-1)^2+(3)^2}$$

$$z=\frac{14-18i}{10}$$

ومنه:

$$z=\frac{7}{5}-\frac{9}{5}i$$

التمرين 129

حل، في $\mathbb{C}$، المعادلة الآتية

$$z^2-3\bar{z}+2=0.$$

نضع $z=x+iy$

$x\in\mathbb{R}$

$y\in\mathbb{R}$

إذن $\bar{z}=x-iy$

ومنه المعادلة المعطاة تكتب

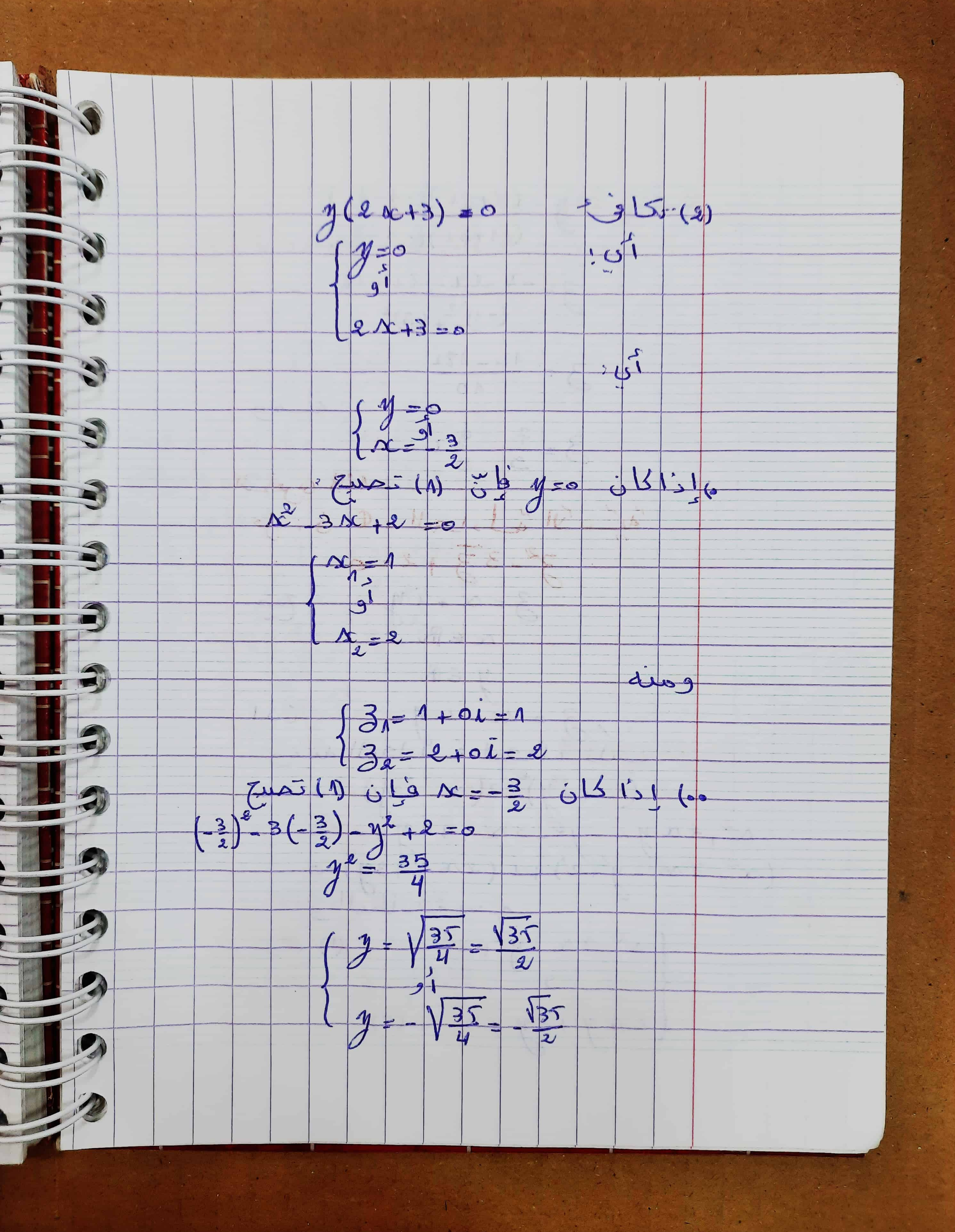
$$(x+iy)^2-3(x-iy)+2=0.$$

$$x^2+2xyi-y^2-3x+3iy+2=0.$$

$$(x^2-3x-y^2+2)+i(2xy+3y)=0$$

وبالمطابقة نجد

$$\begin{cases} x^2-3x-y^2+2=0 \quad \dots (1) \\ \text{و} \\ 2xy+3y=0 \quad \dots (2) \end{cases}$$



(2) تكافئ: $y(2x+3)=0$

أي:
$$\begin{cases} y=0 \\ \text{أو} \\ 2x+3=0 \end{cases}$$

أي:
$$\begin{cases} y=0 \\ \text{أو} \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

• إذا كان $y=0$ فإن (1) تصبح:
$$x^2-3x+2=0$$
$$\begin{cases} x_1=1 \\ \text{أو} \\ x_2=2 \end{cases}$$

ومنه
$$\begin{cases} z_1=1+0i=1 \\ z_2=2+0i=2 \end{cases}$$

•• إذا كان $x=-\frac{3}{2}$ فإن (1) تصبح:
$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2-3\left(-\frac{3}{2}\right)-y^2+2=0$$
$$y^2=\frac{35}{4}$$
$$\begin{cases} y=\sqrt{\frac{35}{4}}=\frac{\sqrt{35}}{2} \\ \text{أو} \\ y=-\sqrt{\frac{35}{4}}=-\frac{\sqrt{35}}{2} \end{cases}$$

ومنه
$$\begin{cases} z_3 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{35}}{2} \\ z_4 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{35}}{2} \end{cases}$$

ومنه (S) مجموعة حلول المعادلة المعطاة:

$$S = \left\{1; 2; -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{35}}{2}; -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{35}}{2}\right\}$$

التمرين 130

في المستوي المركب، لاحقة نقطة M هي العدد المركب $z = x + iy$ حيث $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$

نرفق بكل عدد مركب z العدد المركب L حيث:

$$L = 2z \times \bar{z} + iz - (2+i)\bar{z} - 7 + 2i$$

1) اكتب L على الشكل الجبري.

2) عين وارسم المجموعة (E_1) للنقط M من المستوي حتى يكون L عددا حقيقيا

3) عين وارسم المجموعة (E_2) النقط M من المستوي حتى يكون L عددا تخيليا صرفا

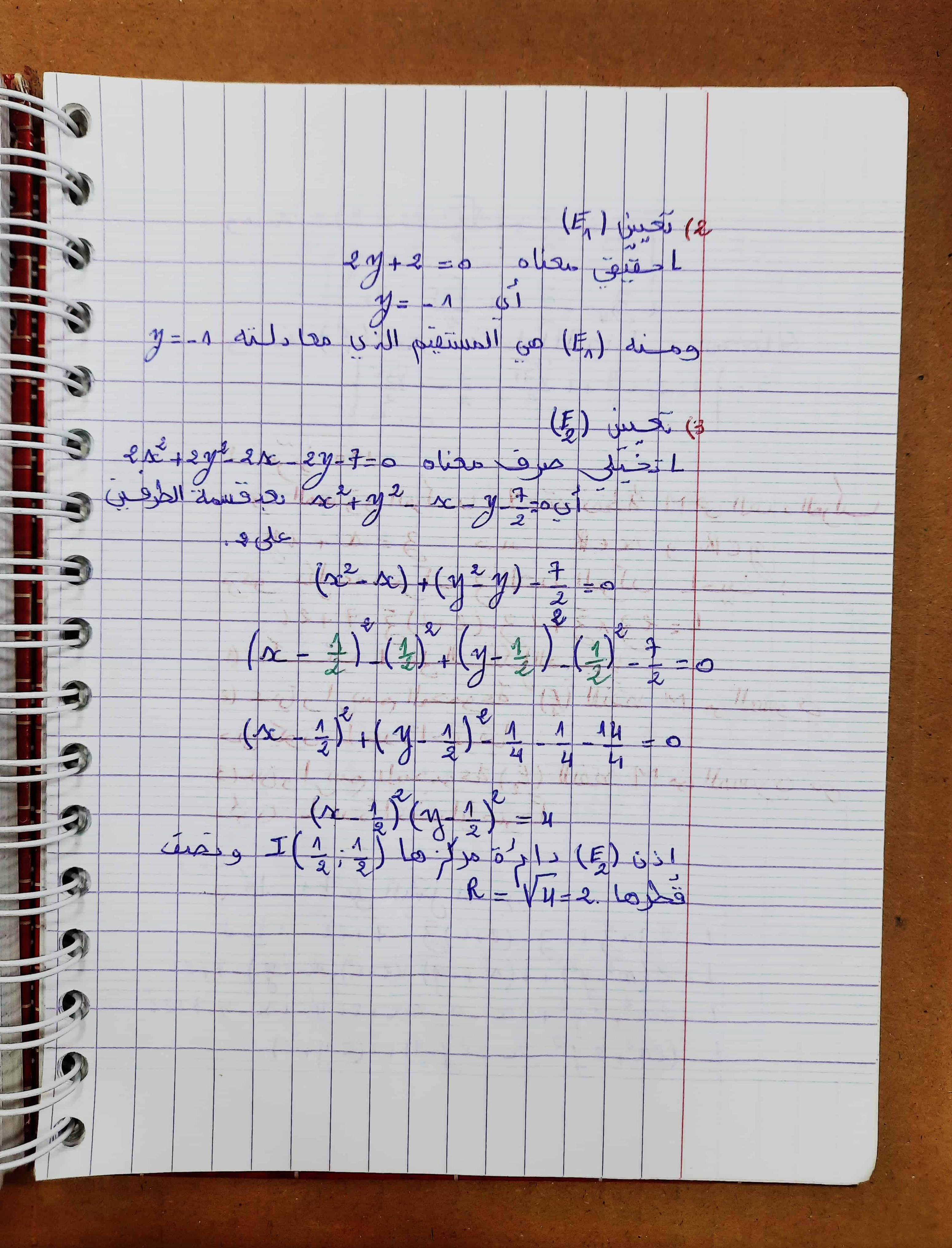
1) كتابة L على الشكل الجبري

لدينا: $L = 2z \times \bar{z} + iz - (2+i)\bar{z} - 7 + 2i$

$L = 2(x^2 + y^2) + i(x + iy) - (2+i)(x - iy) - 7 + 2i$

$L = 2x^2 + 2y^2 + ix - y - 2x + 2iy - ix - y - 7 + 2i$

$L = (2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 7) + i(2y + 2)$



2) تعيين (E_1)

L حقيقي معناه $2y+2=0$

أي $y=-1$

ومنه (E_1) هي المستقيم الذي معادلته $y=-1$

3) تعيين (E_2)

L تخيلي صرف معناه $2x^2+2y^2-2x-2y-7=0$

أي $x^2+y^2-x-y-\frac{7}{2}=0$ بعد قسمة الطرفين على 2.

$$(x^2-x)+(y^2-y)-\frac{7}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{14}{4}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4$$

اذن (E_2) دائرة مركزها $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{4}=2.$

الإنشاء

التمرين 131

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

M نقطة لاحقتها العدد المركب z

حيث $z = x + iy$ و $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$

من أجل كل عدد مركب z يختلف عن 1

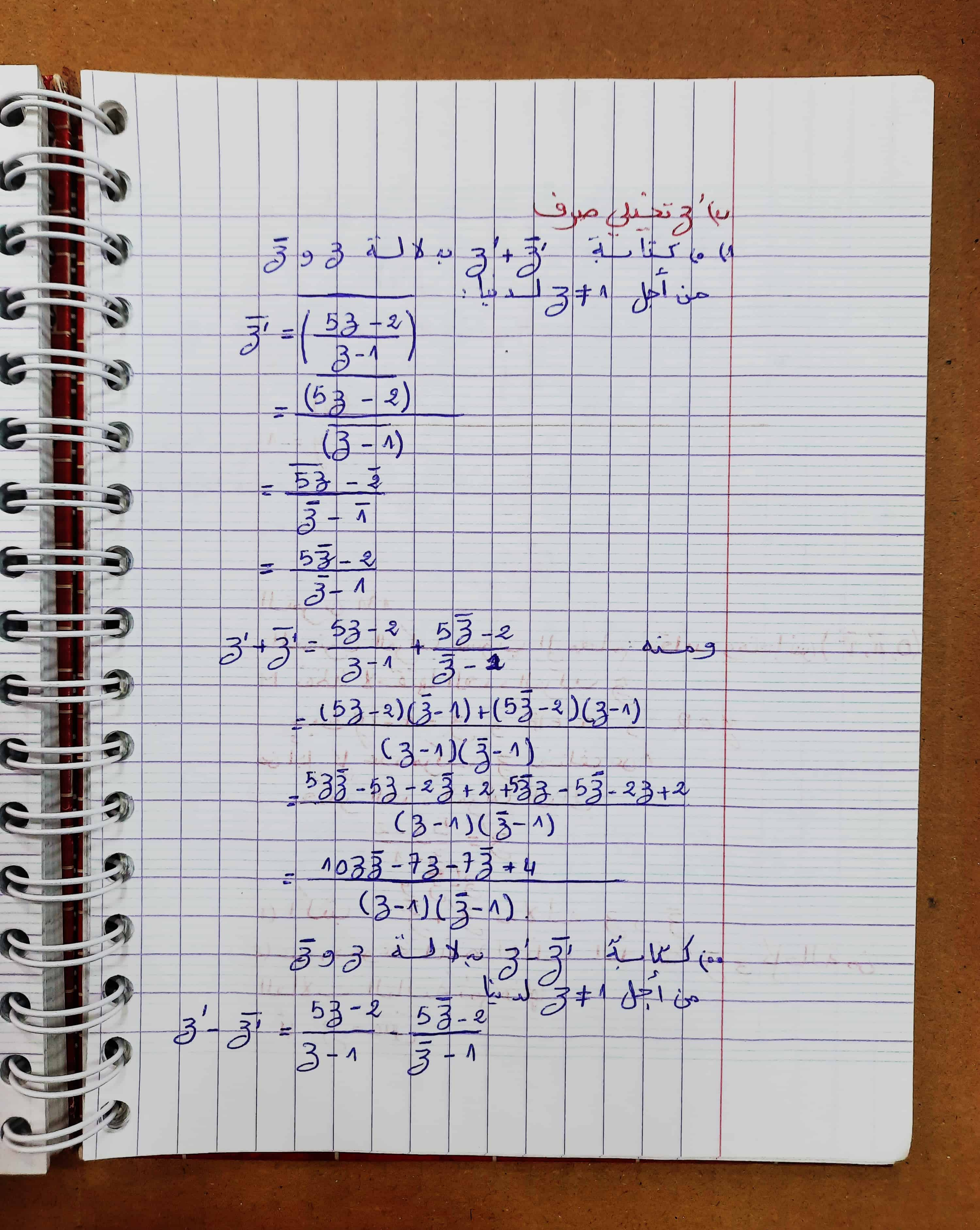
نعتبر العدد المركب التالي

$$z' = \frac{5z - 2}{z - 1}$$

1) اكتب $z' + \bar{z'}$ و $z' - \bar{z'}$ بدلالة z و $\bar{z}$

2) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات التالية ثم مثلها:

أ) z' حقيقي



٢) z' تخيلي صرف

١) أ) كتابة $z'+\overline{z'}$ بدلالة z و $\bar{z}$

من أجل $z \neq 1$ لدينا:

$$\overline{z'} = \overline{\left(\frac{5z-2}{z-1}\right)}$$

$$= \frac{\overline{(5z-2)}}{\overline{(z-1)}}$$

$$= \frac{5\bar{z}-\bar{2}}{\bar{z}-\bar{1}}$$

$$= \frac{5\bar{z}-2}{\bar{z}-1}$$

ومنه:

$$z'+\overline{z'} = \frac{5z-2}{z-1}+\frac{5\bar{z}-2}{\bar{z}-1}$$

$$= \frac{(5z-2)(\bar{z}-1)+(5\bar{z}-2)(z-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)}$$

$$= \frac{5z\bar{z}-5z-2\bar{z}+2+5\bar{z}z-5\bar{z}-2z+2}{(z-1)(\bar{z}-1)}$$

$$= \frac{10z\bar{z}-7z-7\bar{z}+4}{(z-1)(\bar{z}-1)}$$

ب) كتابة $z'-\overline{z'}$ بدلالة z و $\bar{z}$

من أجل $z \neq 1$ لدينا

$$z'-\overline{z'} = \frac{5z-2}{z-1}-\frac{5\bar{z}-2}{\bar{z}-1}$$

$$= \frac{5z\bar{z} - 5z - 2\bar{z} + 2 - 5\bar{z}z + 5\bar{z} + 2z - 2}{(z-1)(\bar{z}-1)}$$

$$= \frac{-3z + 3\bar{z}}{(z-1)(\bar{z}-1)}$$

2) أ) من أجل $z \neq 1$

لدينا z' حقيقي معناه $\bar{z}' = z'$

أي $z' - \bar{z}' = 0$

$$\frac{-3z + 3\bar{z}}{(z-1)(\bar{z}-1)} = 0$$

$$-3z + 3\bar{z} = 0$$

أي $\bar{z} = z$

أي: $x - iy = x + iy$

أي $2iy = 0$

ومنه $y = 0$.

ومنه مجموعة النقط المطلوبة

هي: $(x'x) - \{A\}$

حيث $A(1;0)$

ب) من أجل $z \neq 1$

لدينا: z' تخيلي صرف معناه $\bar{z}' = -z'$

أي: $\bar{z}' + z' = 0$

أي: $\frac{10z\bar{z} - 7z - 7\bar{z} + 4}{(z-1)(\bar{z}-1)} = 0$

أي

$$10 z\bar{z} - 7z - 7\bar{z} + 4 = 0$$

$$10(x^2 + y^2) - 7(2x) + 4 = 0$$

$$10x^2 + 10y^2 - 14x + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0.$$

$$\left(x^2 - \frac{7}{5}x\right) + y^2 + \frac{2}{5} = 0$$

$$\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^2 + y^2 + \frac{2}{5} = 0.$$

$$\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 - \frac{49}{100} + \frac{40}{100} = 0.$$

$$\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{100}$$

معادلة دائرة (C) مركزها $\omega\left(\frac{7}{10};0\right)$ ونصف قطرها

$$R = \sqrt{\frac{9}{100}}$$

$$R = \frac{3}{10}.$$

هل النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى (C)

لدينا

$$\left(1 - \frac{7}{10}\right)^2 + 0^2 = \left(\frac{10-7}{10}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{10}\right)^2$$

$$= \frac{9}{100}$$

إذن $A \in (C)$ ومنه مجموعة النقط المطلوبة

$A(1;0)$ مع $(C) - \{A\}$

التمرين 132.

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعطي النقطة $\omega(1;2;2)$ والمستوى (P) ذو المعادلة

$$x - 2y + z - 3 = 0$$

1) أكتب معادلة الكرة (S) التي مركزها ω وتمس المستوي (P)

(P) مماس لـ (S) معناه $d[\omega;(P)] = R$

لدينا

$$R = d[\omega;(P)] = \frac{|x_\omega - 2y_\omega + z_\omega - 3|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2}}$$

$$= \frac{|1-2(2)+2-3|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{|-4|}{\sqrt{6}}$$

$$R = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

ومنه معادلة (S) هي:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\left(\frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z+1+4+4-\frac{16}{6}=0$$

$$(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z+\frac{19}{3}=0$$

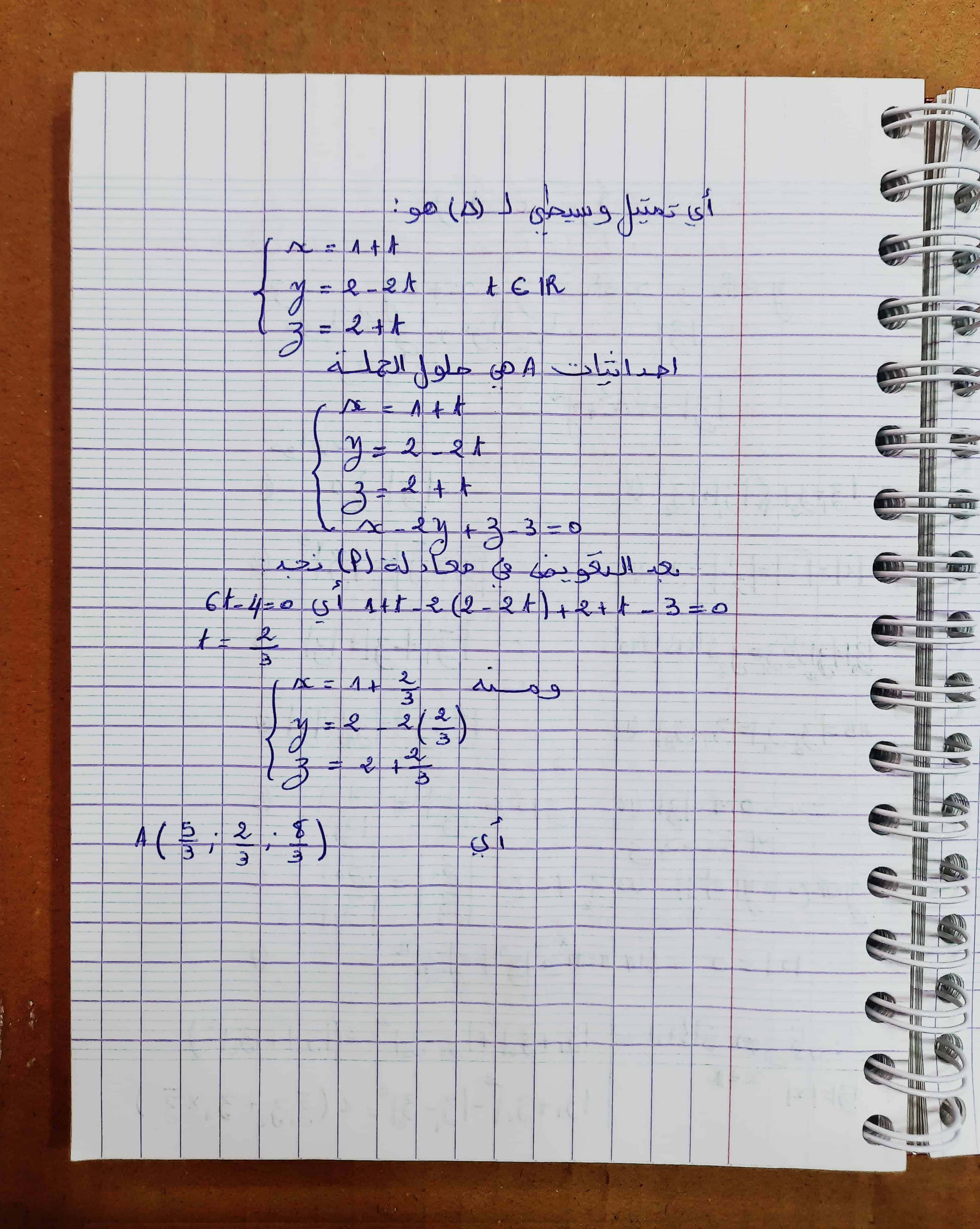
2) عين إحداثيات النقطة A نقطة تماس الكرة (S) والمستوي (P)

ليكن (Δ) المستقيم العمودي على (P) ويشمل ω

A نقطة تماس (S) و (P) هي نقطة تقاطع (Δ) و (P)

بما أن (Δ) ⊥ (P) إذن $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

شعاع ناظمي لـ (P) هو شعاع توجيه (Δ)



أي تمثيل وسيطي لـ (Δ) هو:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

احداثيات A هي حلول الجملة

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + t \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

بعد التعويض في معادلة (P) نجد:

$1 + t - 2(2 - 2t) + 2 + t - 3 = 0$ أي $6t - 4 = 0$

$t = \frac{2}{3}$

ومنه

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3} \\ y = 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right) \\ z = 2 + \frac{2}{3} \end{cases}$$

أي $A\left(\frac{5}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{8}{3}\right)$

طويلة عدد مركب

تعريف: $z = x + iy$ ، $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$

طويلة z يرمز إليها بـ $|z|$

ولدينا:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

خواص

1) $|z| \geq 0$

2) $|z \times \bar{z}| = |z|^2$

3) $|\bar{z}| = |-z| = |z|$

4) $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

5) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ مع $z \neq 0$

6) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ مع $z_2 \neq 0$

7) $|z^n| = |z|^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

8) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

9) $|i| = |\bar{i}| = \left|\frac{1}{i}\right| = 1$

10) إذا كان $z_1 = z_2$ فإن $|z_1| = |z_2|$

11) $AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$

12) $OM = |z|$ حيث: M صورة z

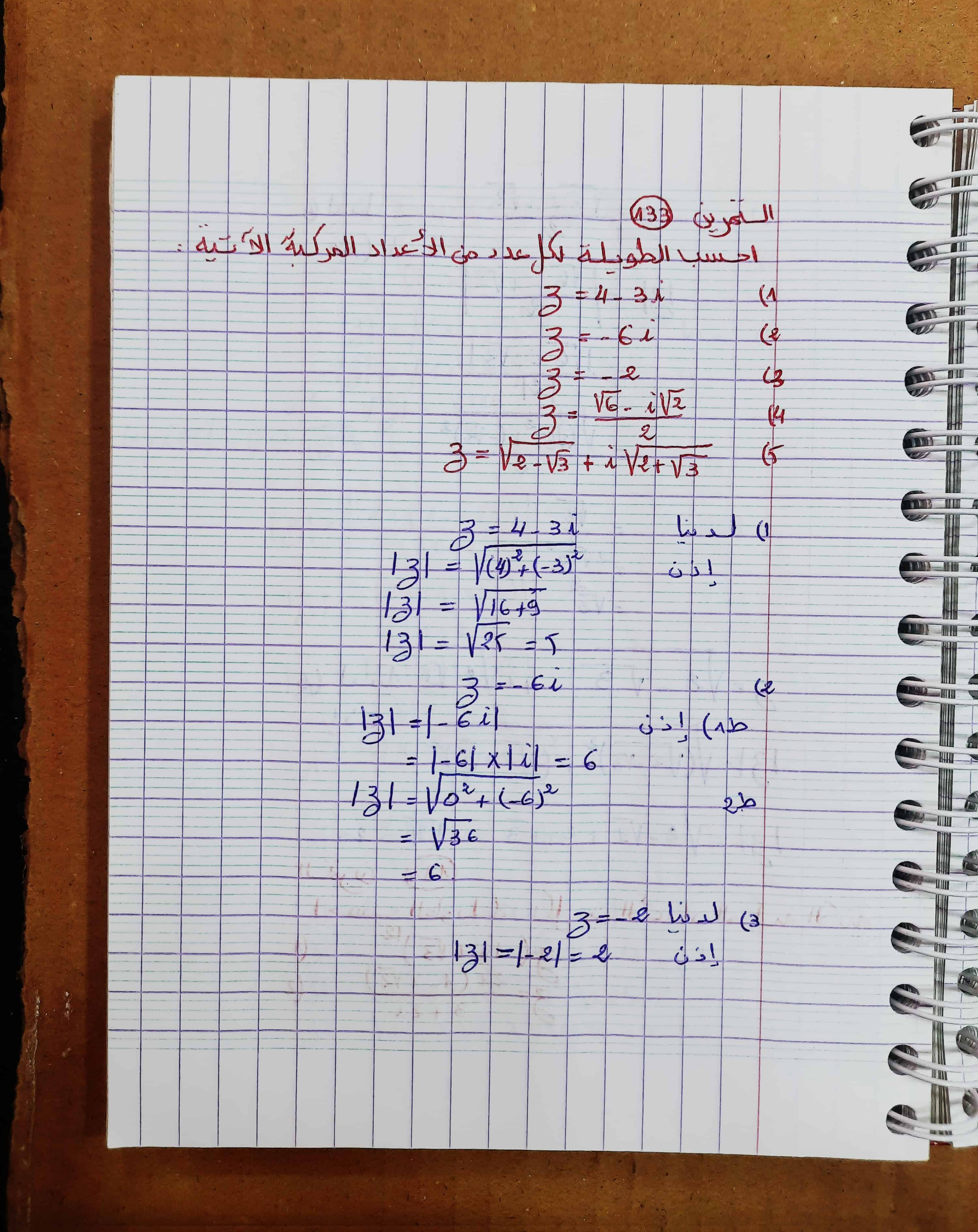
13) $|iy| = |y|$ مع $y \in \mathbb{R}$

14) $|0| = 0$

15) إذا كان $z = x$ فإن: $|z| = |x|$ ، $x \in \mathbb{R}$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$$|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = 2(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \times \bar{z}_2)$$



التمرين (133)

احسب الطويلة لكل عدد من الأعداد المركبة الآتية :

1) $z = 4 - 3i$

2) $z = -6i$

3) $z = -2$

4) $z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

5) $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

1) لدينا $z = 4 - 3i$

إذن $|z| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}$

$|z| = \sqrt{16 + 9}$

$|z| = \sqrt{25} = 5$

2) $z = -6i$

ط1) إذن $|z| = |-6i|$

$= |-6| \times |i| = 6$

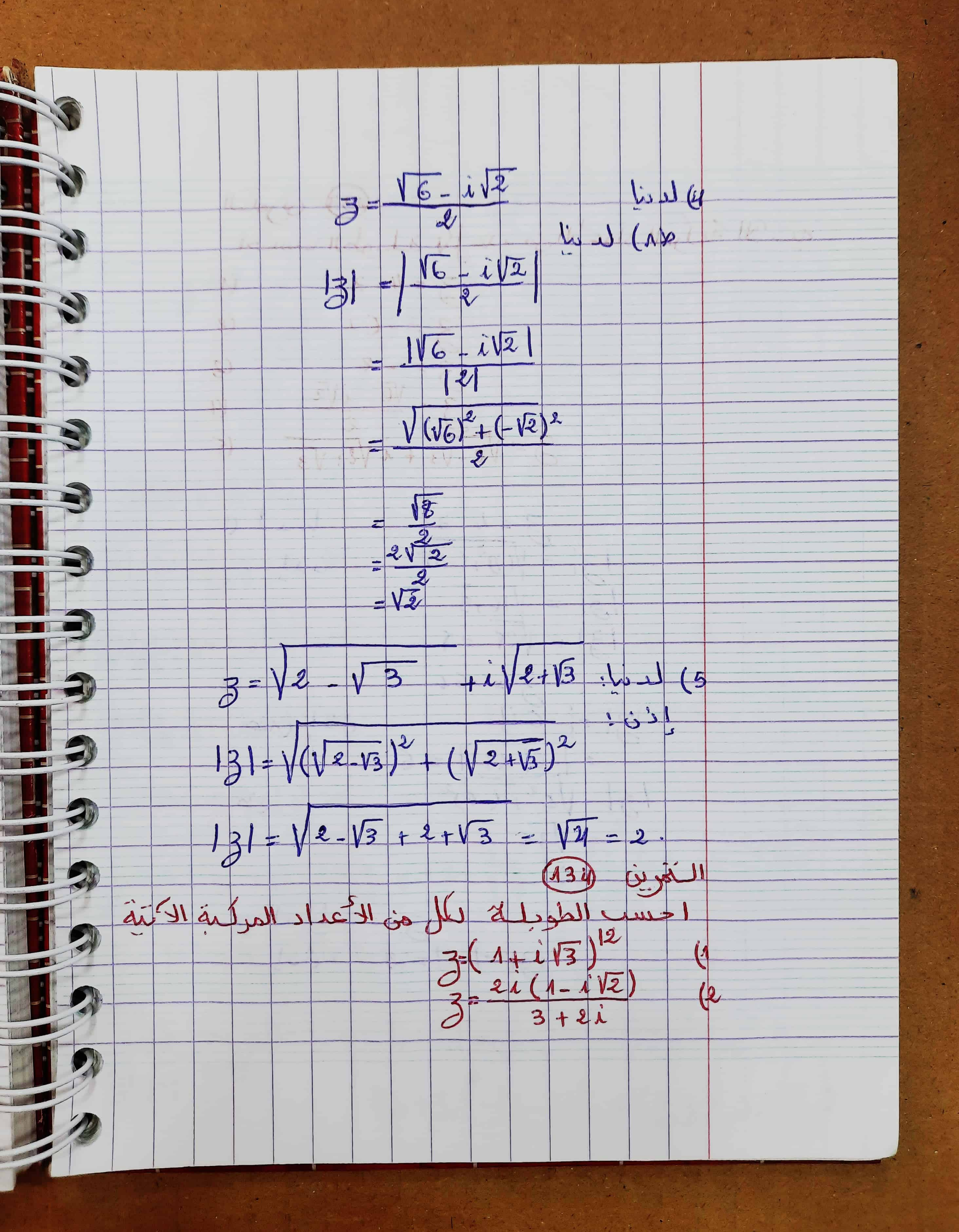
ط2) $|z| = \sqrt{0^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{36}$

$= 6$

3) لدينا $z = -2$

إذن $|z| = |-2| = 2$



4) لدينا

$$z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$$

$$|z| = \left|\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}\right|$$

$$= \frac{|\sqrt{6} - i\sqrt{2}|}{|2|}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2}$$

5) لدينا:

$$z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

إذن:

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 + (\sqrt{2 + \sqrt{5}})^2}$$

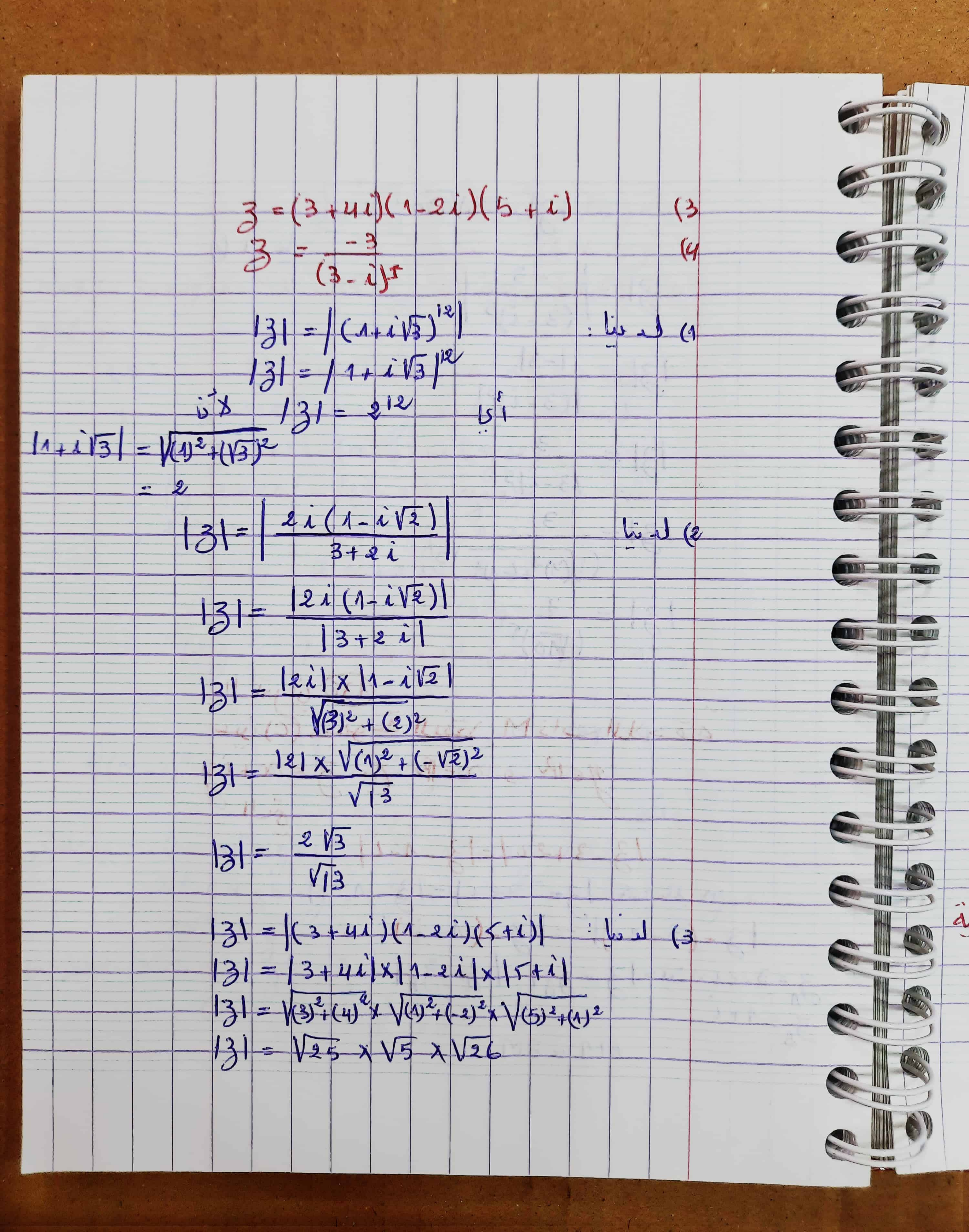
$$|z| = \sqrt{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2.$$

التمرين (134)

احسب الطويلة لكل من الأعداد المركبة الآتية

1) $z = (1 + i\sqrt{3})^{12}$

2) $z = \dfrac{2i(1 - i\sqrt{2})}{3 + 2i}$



3) $z = (3+4i)(1-2i)(5+i)$

4) $z = \dfrac{-3}{(3-i)^5}$

1) لدينا: $|z| = |(1+i\sqrt{3})^{12}|$

$|z| = |1+i\sqrt{3}|^{12}$

أي $|z| = 2^{12}$

لأن $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}$

$= 2$

2) لدينا $|z| = \left|\dfrac{2i(1-i\sqrt{2})}{3+2i}\right|$

$|z| = \dfrac{|2i(1-i\sqrt{2})|}{|3+2i|}$

$|z| = \dfrac{|2i| \times |1-i\sqrt{2}|}{\sqrt{(3)^2+(2)^2}}$

$|z| = \dfrac{|2| \times \sqrt{(1)^2+(-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{13}}$

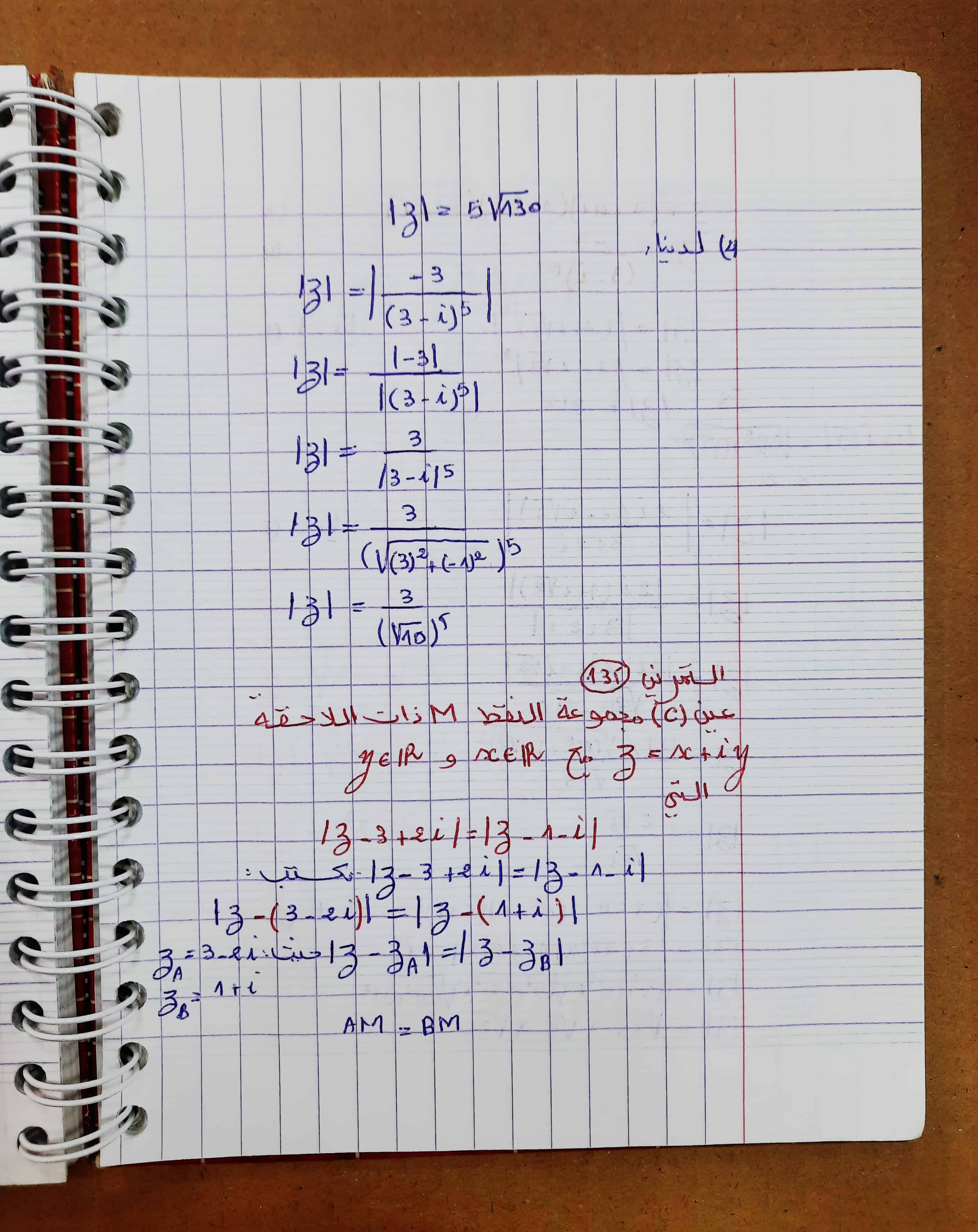
$|z| = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

3) لدينا: $|z| = |(3+4i)(1-2i)(5+i)|$

$|z| = |3+4i| \times |1-2i| \times |5+i|$

$|z| = \sqrt{(3)^2+(4)^2} \times \sqrt{(1)^2+(-2)^2} \times \sqrt{(5)^2+(1)^2}$

$|z| = \sqrt{25} \times \sqrt{5} \times \sqrt{26}$



$$|z| = 5\sqrt{130}$$

4) لدينا:

$$|z| = \left|\frac{-3}{(3-i)^5}\right|$$

$$|z| = \frac{|-3|}{|(3-i)^5|}$$

$$|z| = \frac{3}{|3-i|^5}$$

$$|z| = \frac{3}{\left(\sqrt{(3)^2+(-1)^2}\right)^5}$$

$$|z| = \frac{3}{(\sqrt{10})^5}$$

التمرين 131

عين (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z = x+iy$ حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$ التي

$$|z-3+2i| = |z-1-i|$$

نكتب: $|z-3+2i| = |z-1-i|$

$$|z-(3-2i)| = |z-(1+i)|$$

$|z-z_A| = |z-z_B|$ حيث: $z_A = 3-2i$

$z_B = 1+i$

$$AM = BM$$

ومنه (C) محور القطعة $[AB]$

التمرين 136

عين (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z = x + iy$ مع $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$

التي $|z - 3 + 2i| = |2z - 1 - i| \quad \ldots\ldots (*)$

لدينا: -) $z - 3 + 2i = x + iy - 3 + 2i$

$z - 3 + 2i = (x - 3) + i(y + 2)$

ومنه: $|z - 3 + 2i| = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2}$

-) $2z - 1 - i = 2(x + iy) - 1 - i$

$= 2x + 2iy - 1 - i$

$= (2x - 1) + i(2y - 1)$

ومنه $|2z - 1 - i| = \sqrt{(2x-1)^2 + (2y-1)^2}$

ومنه (*) تكافئ

$\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(2x-1)^2 + (2y-1)^2}$

أي:

بعد تربيع الطرفين $(x-3)^2 + (y+2)^2 = (2x-1)^2 + (2y-1)^2$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1$

أي: $3x^2 + 3y^2 + 2x - 8y - 11 = 0$

بعد قسمة الطرفين $x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}y - \frac{11}{3} = 0$

$\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) + \left(y^2 - \frac{8}{3}y\right) - \frac{11}{3} = 0$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{11}{3}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{16}{9}-\frac{33}{9}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$$

ومنه (C) دائرة مركزها $W\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ ونصف

قطرها $R=\sqrt{\frac{50}{9}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$.

التمرين (137)

حل، في $\mathbb{C}$ المعادلة الآتية:

$$(E): |z|^2+\bar{z}^2-8+4i=0.$$

نضع $z=x+iy$ مع $x\in\mathbb{R}$، $y\in\mathbb{R}$

إذن $\bar{z}=x-iy$

$|z|^2=x^2+y^2$

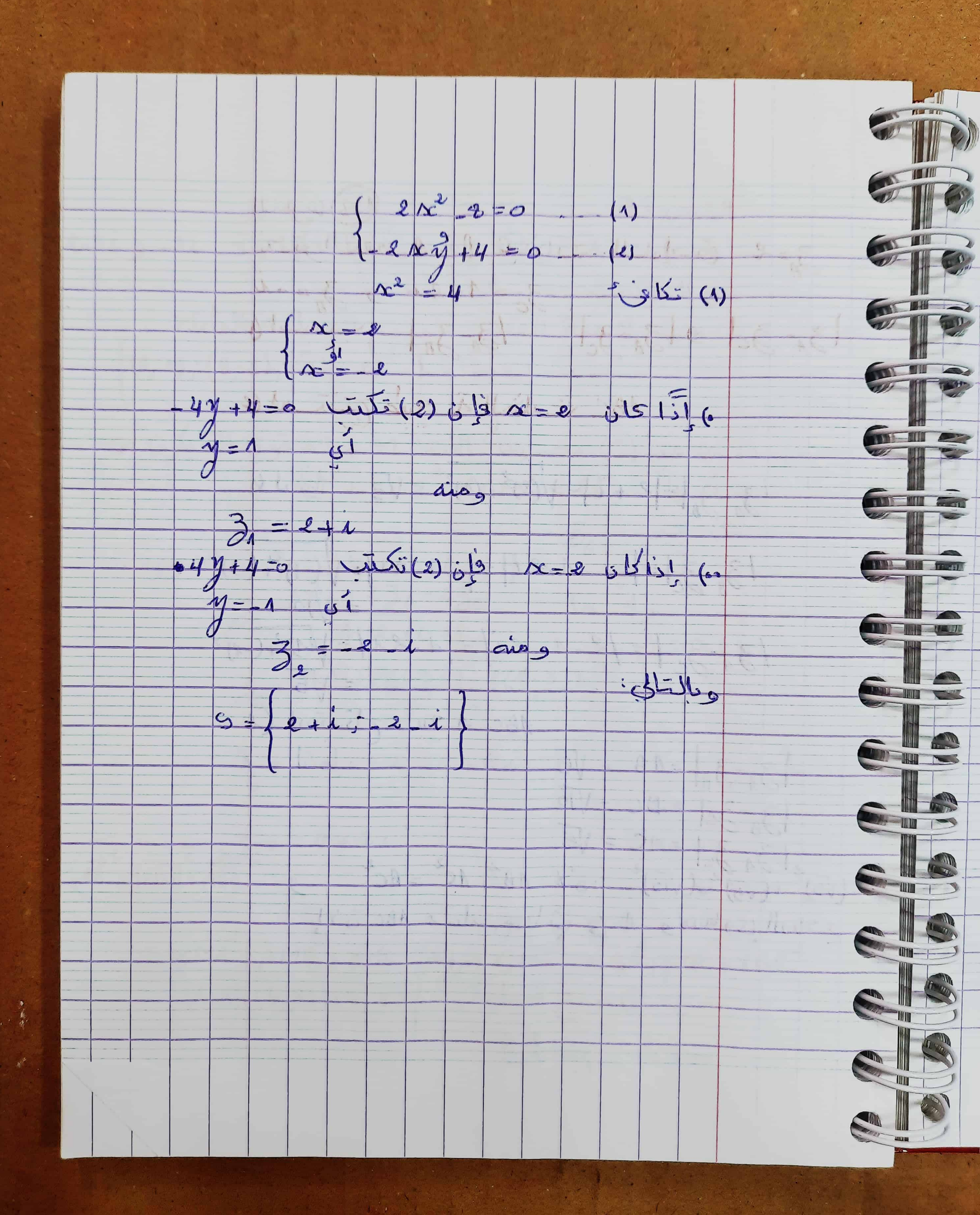
ومنه (E) تكتب:

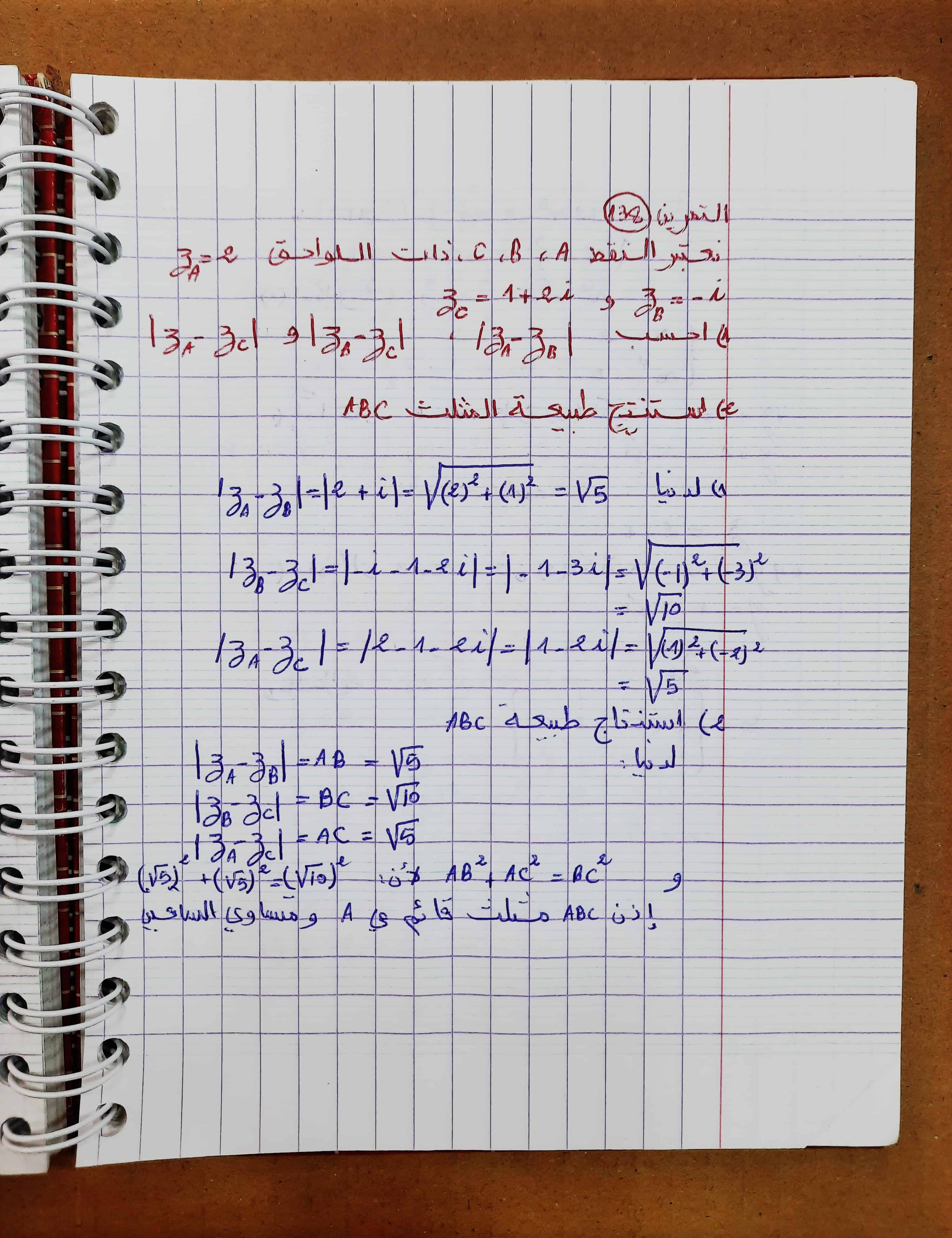
$$x^2+y^2+(x-iy)^2-8+4i=0.$$

$$x^2+y^2+x^2-2xyi-y^2-8+4i=0$$

$$(2x^2-8)+i(-2xy+4)=0$$

وبالمطابقة نجد:


2x² - 8 = 0 ... (1)
-2xy + 4 = 0 ... (2)
(1) تكافئ x² = 4
x = 2
أو
x = -2
• إذا كان x = 2 فإن (2) تكتب -4y + 4 = 0
أي y = 1
ومنه
z₁ = 2 + i
•• إذا كان x = -2 فإن (2) تكتب 4y + 4 = 0
أي y = -1
ومنه z₂ = -2 - i
وبالتالي:
S = {2 + i ; -2 - i}



التمرين (138)

نعتبر النقط A، B، C ذات اللواحق $z_A = 2$

$z_B = -i$ و $z_C = 1+2i$

1) احسب $|z_A - z_B|$ ، $|z_B - z_C|$ و $|z_A - z_C|$

2) استنتج طبيعة المثلث ABC

1) لدينا $|z_A - z_B| = |2+i| = \sqrt{(2)^2+(1)^2} = \sqrt{5}$

$|z_B - z_C| = |-i-1-2i| = |-1-3i| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2}$
$= \sqrt{10}$

$|z_A - z_C| = |2-1-2i| = |1-2i| = \sqrt{(1)^2+(-2)^2}$
$= \sqrt{5}$

2) استنتاج طبيعة ABC

لدينا:

$|z_A - z_B| = AB = \sqrt{5}$

$|z_B - z_C| = BC = \sqrt{10}$

$|z_A - z_C| = AC = \sqrt{5}$

و $AB^2 + AC^2 = BC^2$ لأن: $(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{10})^2$

إذن ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين

التمرين 139

A ، B ، C نقط من المستوي المركب لواحقها : $3i$ ، $-3i$ و $2-3i$ على الترتيب

1) عين لاحقة النقط G مرجح الجملة المثقلة
$\{(A,1);(B;2);(C;-2)\}$

2) عين (C) مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها
$AM^2+2BM^2-2CM^2=25$

1) تعيين z_G

بما أن $1+2+(-2)\neq 0$ إذن G موجود ووحيد

ولدينا
$$z_G=\frac{1z_A+2z_B-2z_C}{1+2+(-2)}$$

$$z_G=\frac{1(3i)+2(-3i)-2(2-3i)}{1}$$

$$z_G=3i-6i-4+6i$$

ومنه
$$z_G=-4+3i$$

$\vec{AB}^2=\|\vec{AB}\|^2=AB^2$

$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$$

حيث G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B;\beta);(C,\gamma)\}$

علاقة leibnitz

ج) تعيين (C)

(ط1) لدينا $AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$

نكتب: $(1+2-2)MG^2 + AG^2 + 2BG^2 - 2CG^2 = 25$

(حسب علاقة leibnitz)

$MG^2 + 16 + 2(52) - 2(72) = 25$

$MG^2 = 49$: أي

$MG = 7$: أي

ومنه (C) دائرة مركزها $G(-4;3)$ ونصف قطرها $R = 7$.

*) $AG^2 = |z_G - z_A|^2$

$= |-4+3i-3i|^2$

$= (-4)^2$

$= 16$

*) $BG^2 = |z_G - z_B|^2$

$= |-4+3i+3i|^2$

$= |-4+6i|^2$

$= (-4)^2 + (6)^2$

$= 52$

*) $CG^2 = |z_G - z_C|^2$

$= |-4+3i-2+3i|^2$

$= |-6+6i|^2$

$= (-6)^2 + (6)^2$

$= 72$.

2) تعيين (C)

حل: لدينا $AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$

تكتب $|z - z_A|^2 + 2|z - z_B|^2 - 2|z - z_C|^2 = 25$ حيث z لاحقة M

اذن:

$x^2 + (y-3)^2 + 2[x^2 + (y+3)^2] - 2[(x-2)^2 + (y+3)^2] = 25$

$x^2 + y^2 - 6y + 9 + 2x^2 - 2x^2 + 8x - 8 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 + 8x - 6y - 24 = 0$

$(x^2 + 8x) + (y^2 - 6y) - 24 = 0$

$(x+4)^2 - (4)^2 + (y-3)^2 - (3)^2 - 24 = 0$

$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 49$

ومنه (C) دائرة مركزها $G(-4;3)$

ونصف قطرها $R = \sqrt{49} = 7$

- $z - z_A = x + iy - 3i$

$z - z_A = x + i(y-3)$

$|z - z_A|^2 = (\sqrt{x^2 + (y-3)^2})^2$

- $z - z_B = x + iy + 3i$

$z - z_B = x + i(y+3)$

$|z - z_B| = (\sqrt{x^2 + (y+3)^2})^2$

- $z - z_C = x + iy - 2 + 3i$

$z - z_C = (x-2) + i(y+3)$

$|z - z_C|^2 = (\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2})^2$

3 ط

$AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$

$A(0;3)$, $B(0;-3)$, $C(2;-3)$ اذن:

$AM^2 = (x-0)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 - 6y + 9$

$BM^2 = (x-0)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 + 6y + 9$

$CM^2 = (x-2) + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$

ومنه: نكتب: $AM^2+2BM^2-2CM^2=25$

$x^2+y^2-6y+9+2(x^2+y^2+6y+9)-2(x^2+y^2-4x+6y+13)=25$

أي:

$x^2+y^2+8x-6y-24=0$

عمدة عدد مركب غير معدوم

تعريف

$z=x+iy$ عدد مركب غير معدوم صورته M

$x\in\mathbb{R}$

$y\in\mathbb{R}$

نسمي عمدة z ونرمز $Arg(z)$ كل قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{OI},\vec{OM})$

y, M, $r=|z|$, θ, x', x, O, I, y'

ملاحظات :

- كل عدد مركب غير معدوم له عدد غير منته من العمد
إذا كان θ عمدة لـ z فإن $\theta + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ لـ z
- A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = Arg(z_B) - Arg(z_A)$$

- $$Arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB})$$

الشكل المثلثي لـ z

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r = |z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = Arg(z)$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

التمرين (140)

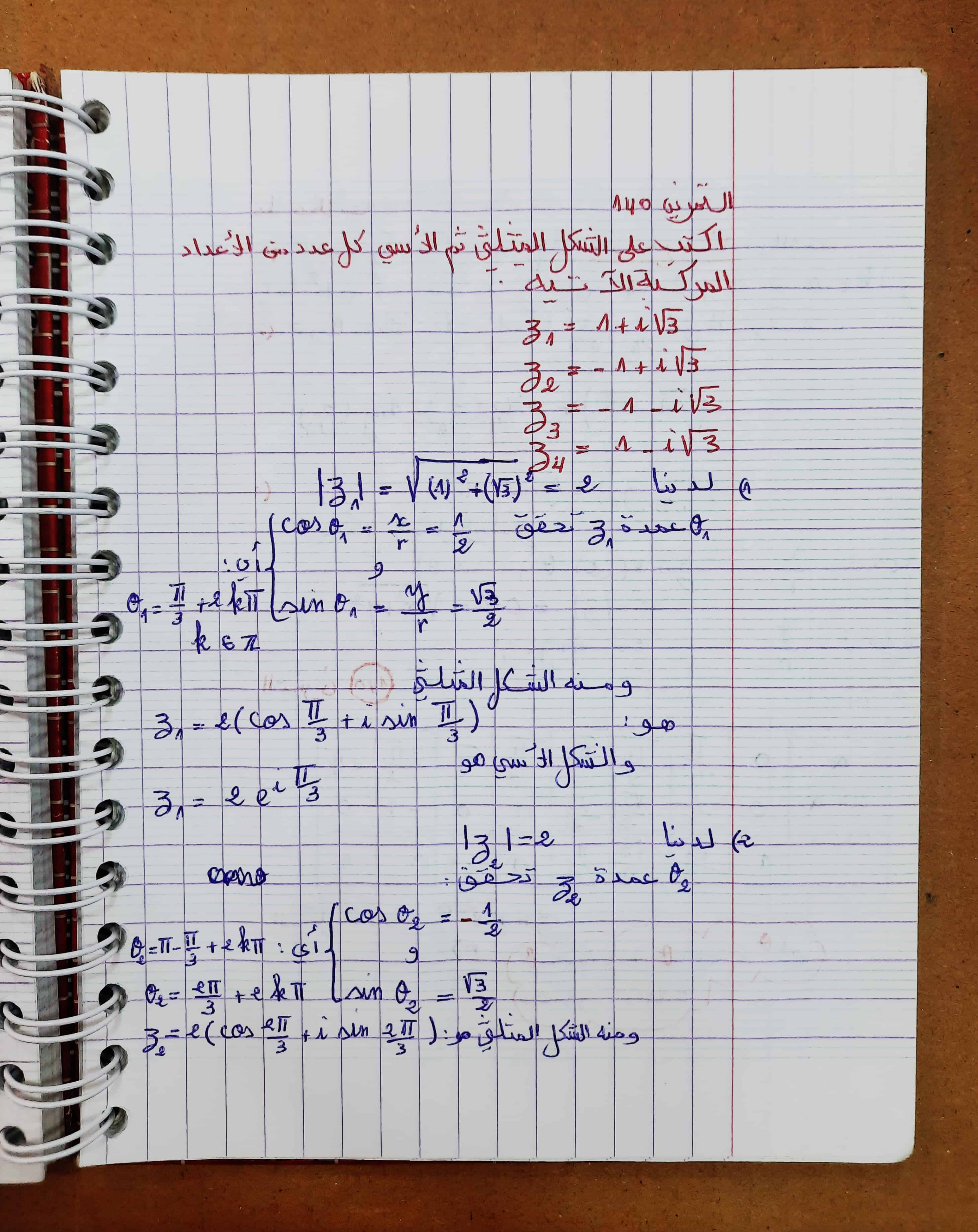
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

الشكل الأسي $z = re^{i\theta}$

$r > 0$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

دستور Euler



التمرين 140

اكتب على الشكل المثلثي ثم الأسي كل عدد من الأعداد المركبة الآتية:

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

$z_3 = -1 - i\sqrt{3}$

$z_4 = 1 - i\sqrt{3}$

1) لدينا $|z_1| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

θ_1 عمدة z_1 تحقق:

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \text{و} \\ \sin\theta_1 = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

أي: $\theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$، $k \in \mathbb{Z}$

ومنه الشكل المثلثي هو:

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

والشكل الأسي هو

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) لدينا $|z_2| = 2$

θ_2 عمدة z_2 تحقق:

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = -\frac{1}{2} \\ \text{و} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

أي: $\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\theta_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه الشكل المثلثي هو: $z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

والشكل الأسي هو $z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3) لدينا $|z_3| = 2$

θ_3 عمدة z_3 تحقق

$$\begin{cases} \cos\theta_3 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

أي

$$\theta_3 = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\theta_3 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

ومنه الشكل المثلثي هو:

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

والشكل الأسي هو:

$$z_3 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

4) لدينا $|z_4| = 2$

θ_4 عمدة z_4 تحقق

$$\begin{cases} \cos\theta_4 = \frac{1}{2} \\ \text{و} \\ \sin\theta_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

أي

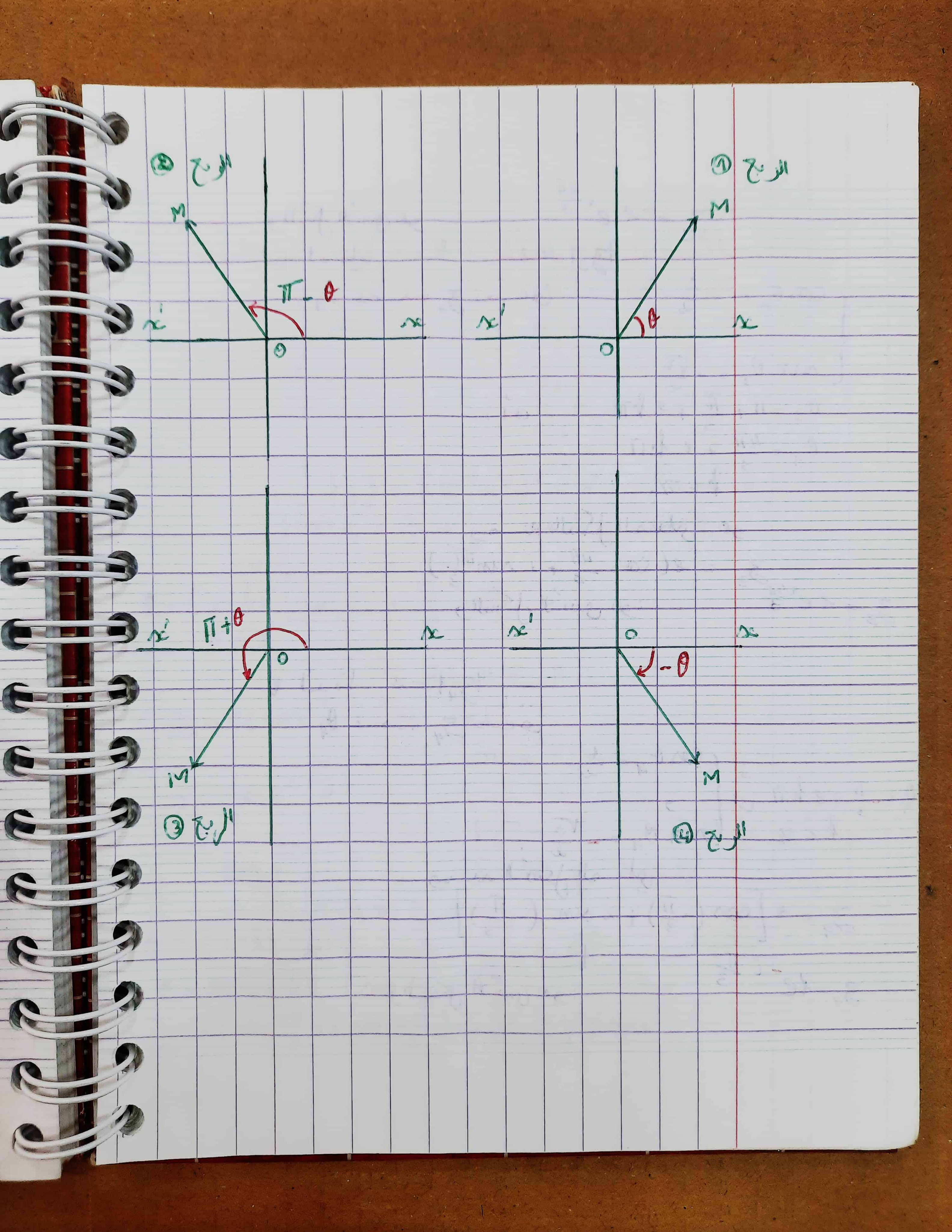
$$\theta_4 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

ومنه الشكل المثلثي

$$z_4 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

والشكل الأسي هو:

$$z_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$



الربع ②
M
$\pi - \theta$
x'
x
O
الربع ①
M
θ
x'
x
O
x'
$\pi + \theta$
x
O
M
الربع ③
x'
O
x
$-\theta$
M
الربع ④

التمرين 141

اكتب على الشكل المثلثي والشكل الأسي الأعداد من الأعداد المركبة الآتية:

$z_1 = 3$ ، $z_2 = -2$ ، و $z_3 = 2i$ ، $z_4 = -5i$

① لدينا:

$$|z_1| = |3| = 3$$

$$\theta_1 = (\vec{Oi}, \vec{OM_1}) = 0 + 2k\pi$$

أي الشكل المثلثي هو $z_1 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$

أي الشكل الأسي هو $z_1 = 3e^{i0}$

② لدينا $|z_2| = |-2| = 2$

و $\theta_2 = (\vec{i}; \vec{OM_2}) = \pi + 2k\pi$

ومنه الشكل المثلثي هو

$$z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$$

والشكل الأسي هو

$$z_2 = 2e^{i\pi}$$

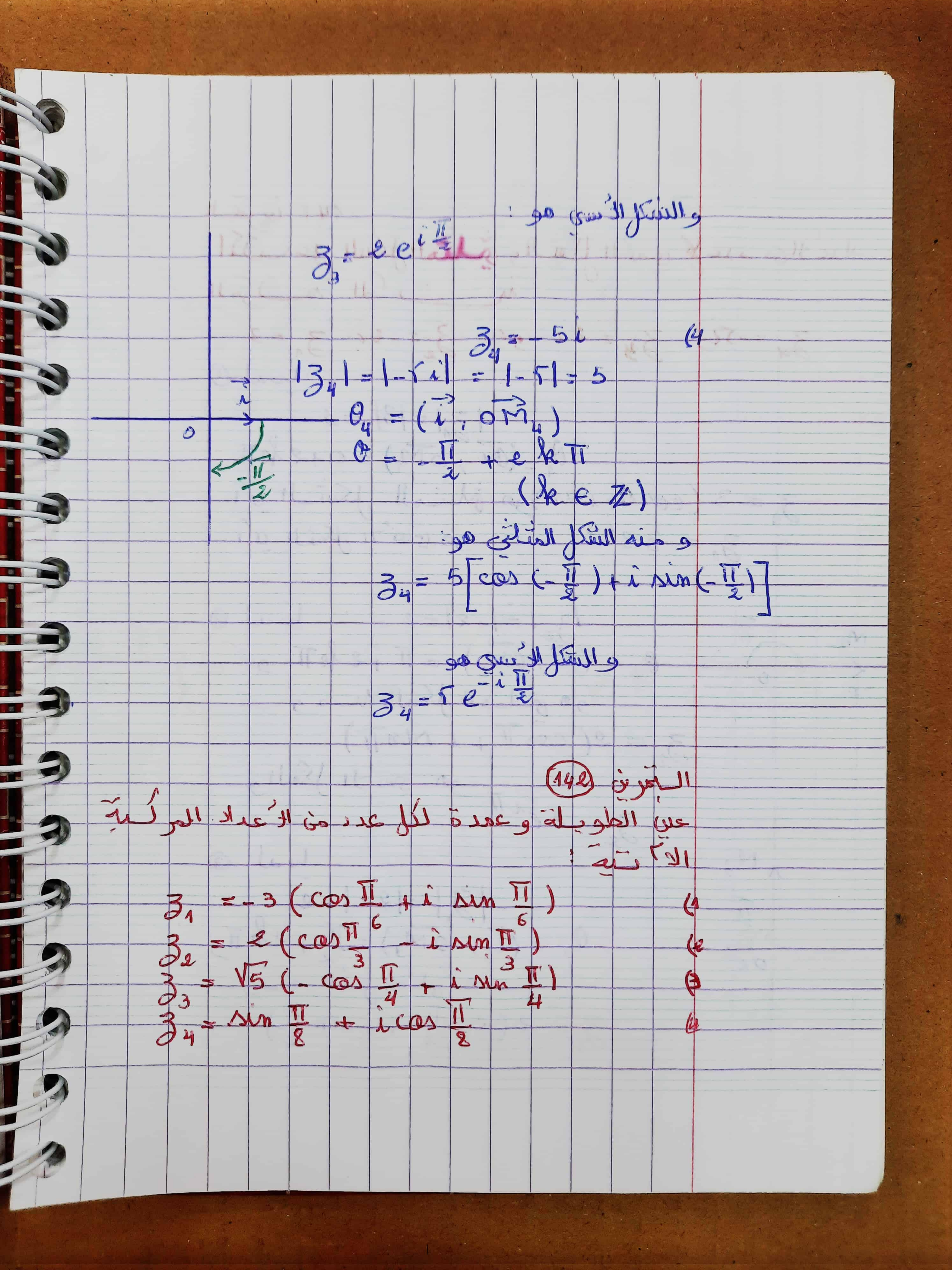
③ لدينا

$$|z_3| = |2i| = 2$$

و $\theta_3 = (\vec{i}, \vec{OM_3}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه الشكل المثلثي هو:

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$



والشكل الأسي هو:

$$z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

4) $z_4 = -5i$

$$|z_4| = |-5i| = |-5| = 5$$

$$\theta_4 = (\vec{i}, \overrightarrow{OM_4})$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ومنه الشكل المثلثي هو:

$$z_4 = 5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

والشكل الأسي هو

$$z_4 = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

التمرين 142

عين الطويلة وعمدة لكل عدد من الأعداد المركبة الآتية:

1) $z_1 = -3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

2) $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

3) $z_3 = \sqrt{5}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

4) $z_4 = \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}$

1) لدينا:

$$z_1 = -3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

تكتب

$$z_1 = 3\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$ تكتب

$$z_1 = 3\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

ومنه

$$|z_1| = 3$$

$$Arg(z_1) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

2)

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

ومنه

$$|z_2| = 2$$

$$Arg(z_2) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$$

3) لدينا:

$$z_3 = \sqrt{5}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$ تكتب:

$$z_3 = \sqrt{5}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_3 = \sqrt{5}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

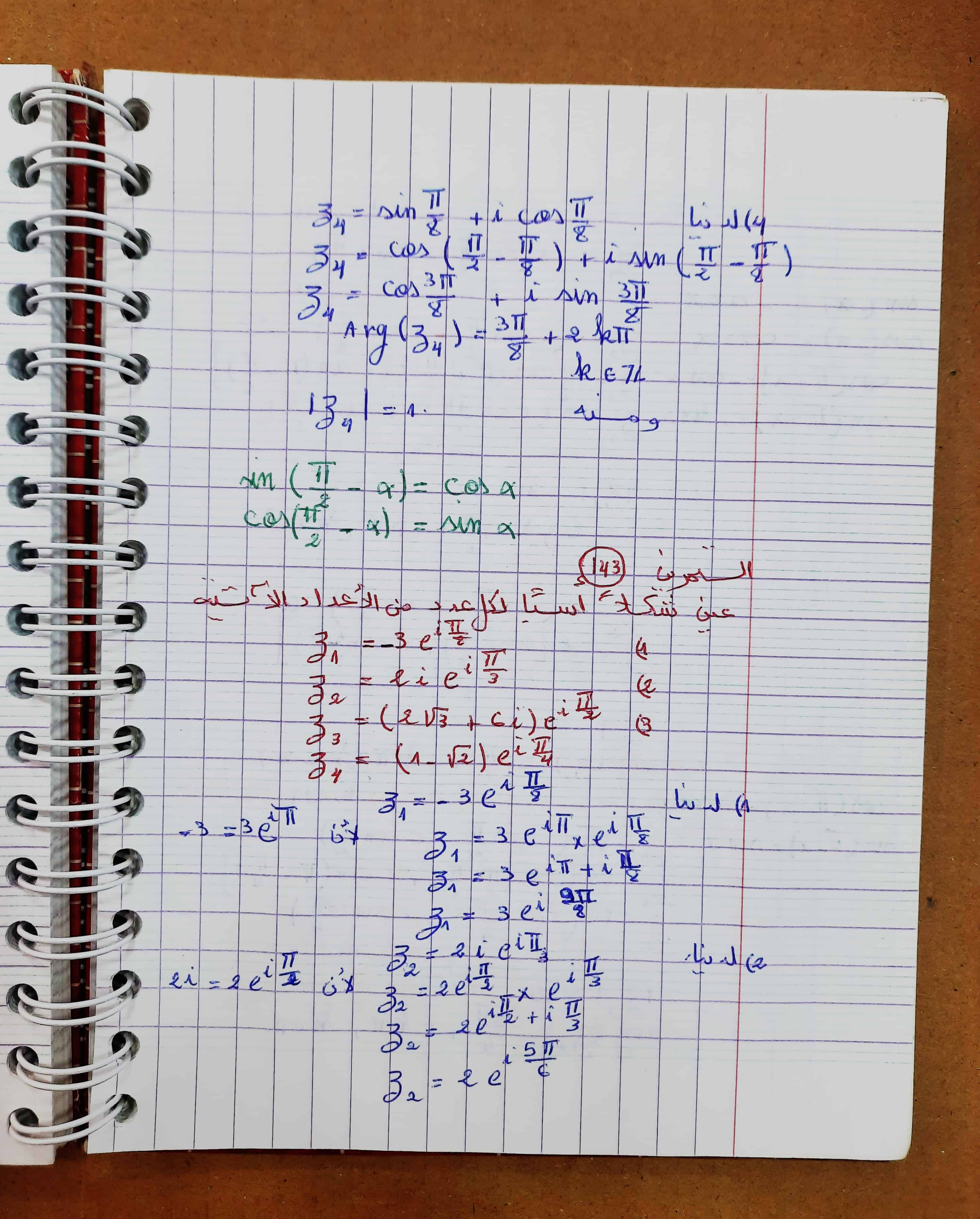
ومنه

$$|z_3| = \sqrt{5}$$

$$Arg(z_3) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{R}$$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$



4) لدينا

$$z_4 = \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}$$

$$z_4 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$z_4 = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}$$

ومنه

$$Arg(z_4) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$|z_4| = 1.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

التمرين (143)

عين شكلا اسيا لكل عدد من الأعداد الآتية

1) $z_1 = -3e^{i\frac{\pi}{8}}$

2) $z_2 = 2i\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

3) $z_3 = (2\sqrt{3} + 6i)e^{i\frac{\pi}{2}}$

4) $z_4 = (1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$

1) لدينا

$$z_1 = -3e^{i\frac{\pi}{8}}$$

لأن $-3 = 3e^{i\pi}$

$$z_1 = 3e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$z_1 = 3e^{i\pi + i\frac{\pi}{8}}$$

$$z_1 = 3e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

2) لدينا

$$z_2 = 2i\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

لأن $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

3) نكتب $2\sqrt{3}+6i$ على الشكل الأسي

$|2\sqrt{3}+6i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2}$
$= \sqrt{16\times 3}$
$= 4\sqrt{3}$.

لدينا: $2\sqrt{3}+6i = 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$= 4\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه

$z_3 = 4\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_3 = 4\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{2}}$

وبالتالي

$z_3 = 4\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$

4) لدينا $z_4 = (1-\sqrt{2})\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا: $1-\sqrt{2} = |1-\sqrt{2}|\, e^{i\pi}$ لأن $1-\sqrt{2}<0$
$= (-1+\sqrt{2})\, e^{i\pi}$

$z_4 = (-1+\sqrt{2})\, e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_4 = (-1+\sqrt{2})\, e^{i\pi + i\frac{\pi}{4}}$

$z_4 = (-1+\sqrt{2})\, e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

التمرين 144

أكتب على الشكل الجبري كل عدد من الأعداد المركبة الآتية

1) $z_1 = 6\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2) $z_2 = \sqrt{5}\, e^{i\frac{3\pi}{2}}$

3) $z_3 = \frac{1}{2}\, e^{i\pi}$

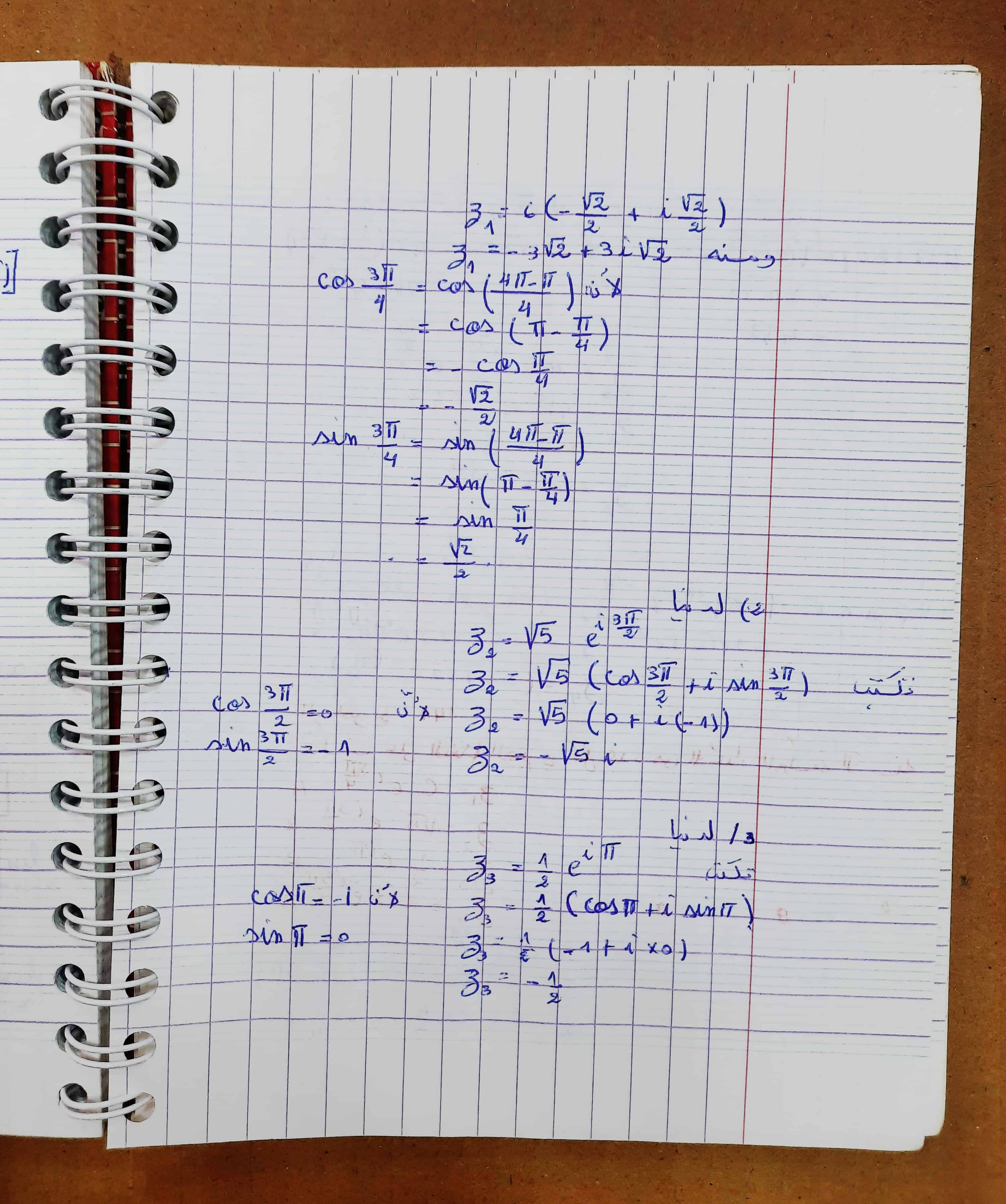
4) $z_4 = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

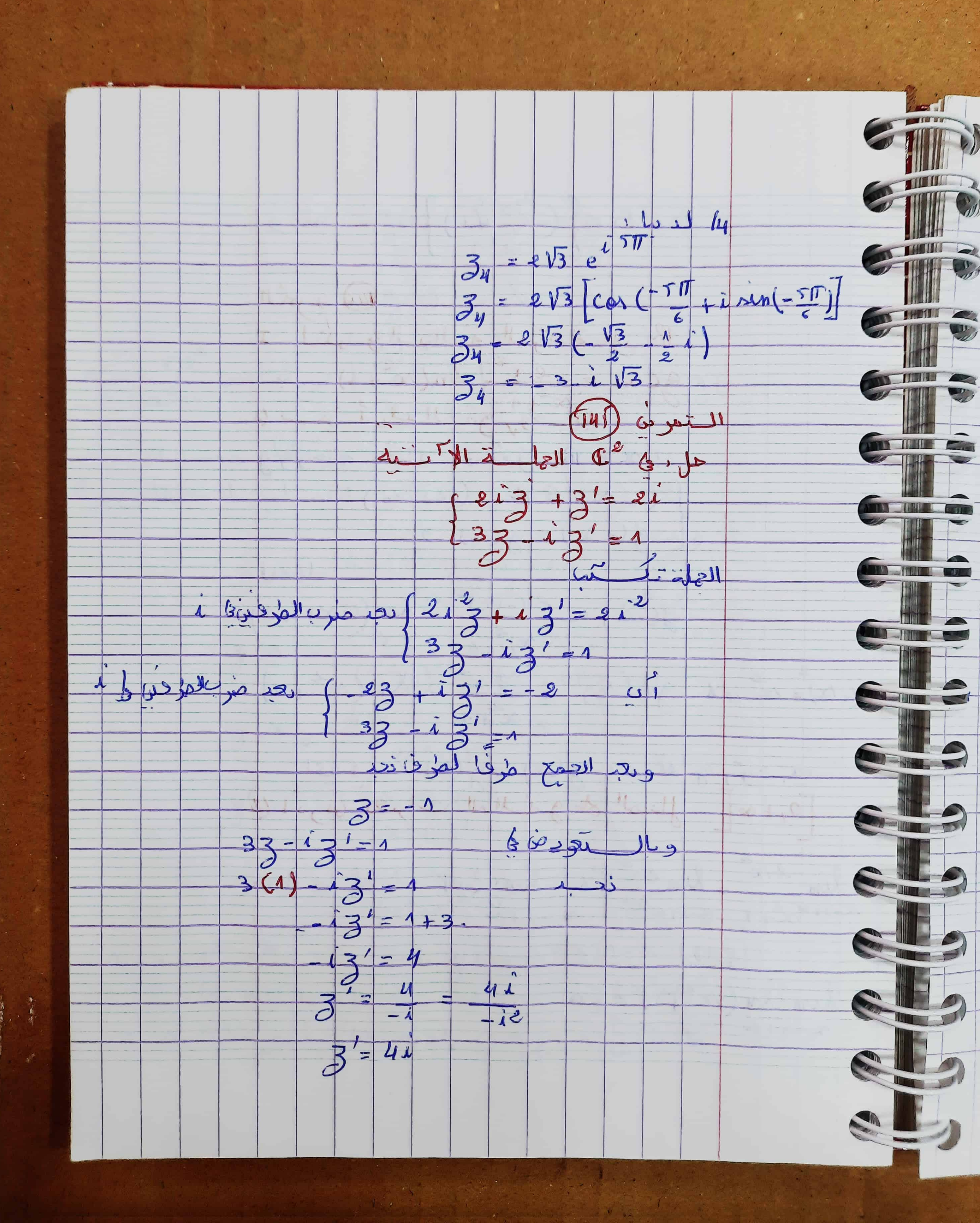
1) لدينا $z_1 = 6\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

نكتب $z_1 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$z_1 = 6\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$



z1 = 6 (- √2/2 + i √2/2)
z1 = - 3√2 + 3i√2 ومنه
cos 3π/4 = cos ((4π - π)/4)
= cos (π - π/4)
= - cos π/4
= - √2/2
sin 3π/4 = sin ((4π - π)/4)
= sin (π - π/4)
= sin π/4
= √2/2
2) لدينا
z2 = √5 e^(i 3π/2)
نكتب
z2 = √5 (cos 3π/2 + i sin 3π/2)
cos 3π/2 = 0
sin 3π/2 = -1
z2 = √5 (0 + i (-1))
z2 = - √5 i
3/ لدينا
z3 = 1/2 e^(iπ)
نكتب
z3 = 1/2 (cos π + i sin π)
cos π = -1
sin π = 0
z3 = 1/2 (-1 + i x 0)
z3 = - 1/2



لدينا 4

$$z_4 = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{-5\pi}{6}}$$

$$z_4 = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_4 = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$z_4 = -3 - i\sqrt{3}$$

التمرين (141)

حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة الآتية

$$\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$$

الجملة تكتب

$$\begin{cases} 2i^2 z + iz' = 2i^2 \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$$ بعد ضرب الطرفين في i

أي

$$\begin{cases} -2z + iz' = -2 \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$$ بعد ضرب الطرفين في i

وبعد الجمع طرفا لطرف نجد

$$z = -1$$

وبالتعويض في $3z - iz' = 1$ نجد

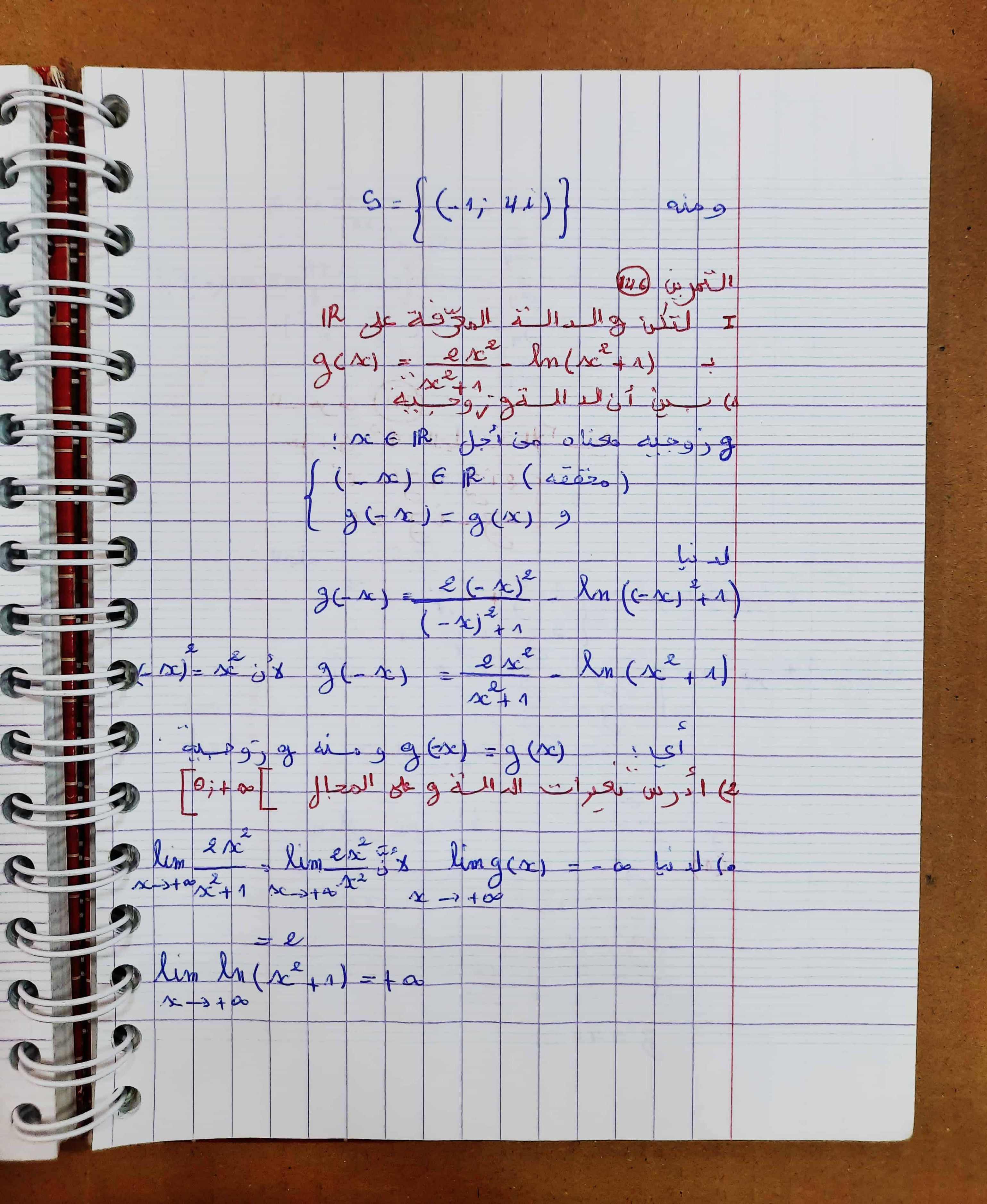
$$3(1) - iz' = 1$$

$$-iz' = 1 + 3$$

$$-iz' = 4$$

$$z' = \frac{4}{-i} = \frac{4i}{-i^2}$$

$$z' = 4i$$



ومنه $S = \{(-1; 4i)\}$

التمرين (146)

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$

ب: $g(x) = \frac{e x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

1) بين أن الدالة g زوجية

g زوجية معناه من أجل $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (-x) \in \mathbb{R} & (\text{محققة}) \\ g(-x) = g(x) & \text{و} \end{cases}$$

لدينا

$$g(-x) = \frac{e(-x)^2}{(-x)^2+1} - \ln\left((-x)^2+1\right)$$

$$g(-x) = \frac{e x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$$ لأن $(-x)^2 = x^2$

أي: $g(-x) = g(x)$ ومنه g زوجية

2) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$

أ) لدينا $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{e x^2}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e x^2}{x^2} = e$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$$

$$g(0) = \frac{2(0)^2}{0^2+1} - \ln(0^2+1)$$

$$g(0) = -\ln 1$$

أي: $g(0) = 0.$

g تقبل الإشتقاق على $[0;+\infty[$ (مجموع الدالتين $x \mapsto \frac{2x^2}{x^2+1}$

و $x \longmapsto -\ln(x^2+1)$

القابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا

$$g'(x) = \frac{4x(x^2+1) - 2x \times 2x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$g'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+1)}$$

$$g'(x) = \frac{4x - 2x^3 - 2x}{(x^2+1)}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2}$$

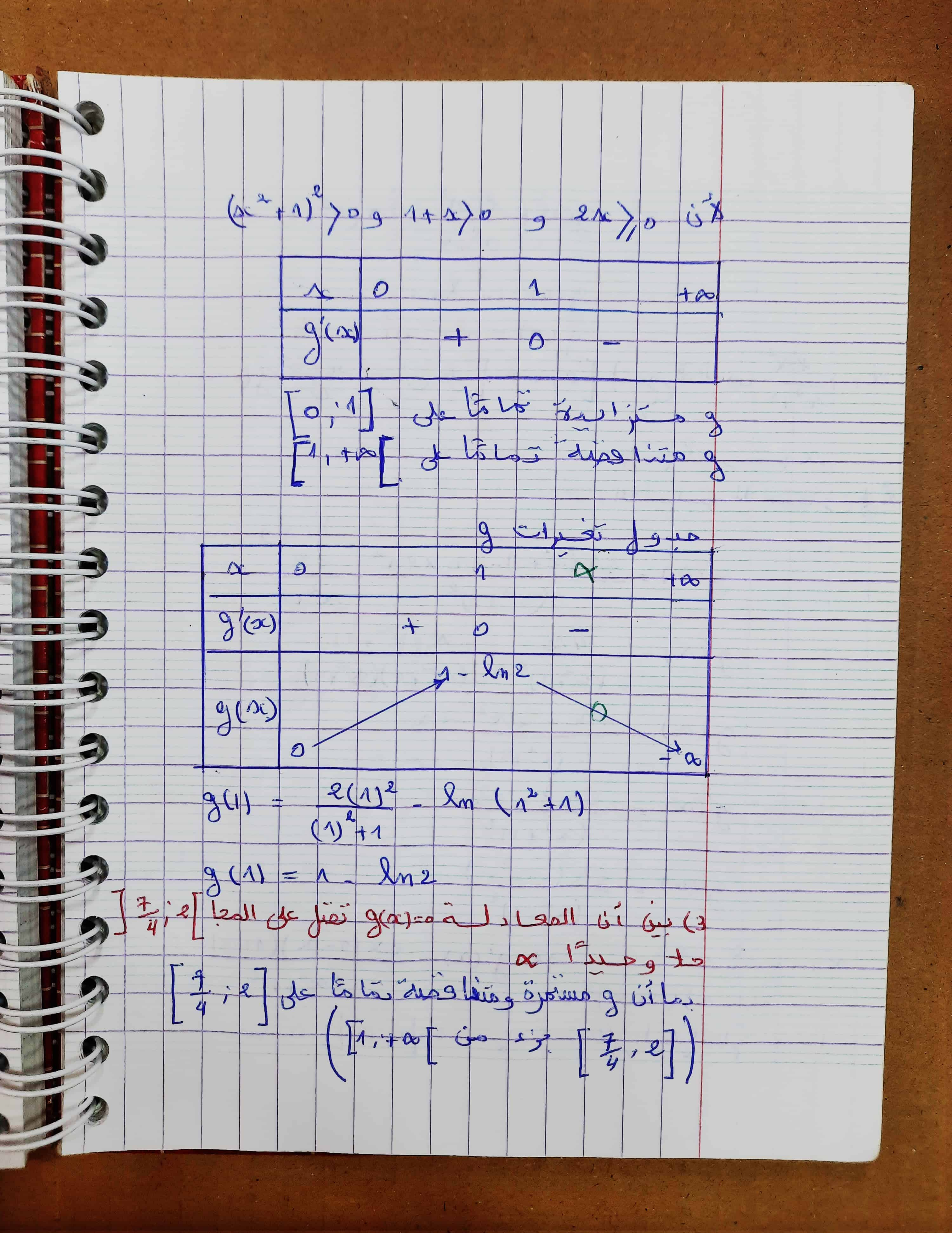
$$g'(x) = \frac{2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$-x^2+1 = 1^2 - x^2$

$= (1-x)(1+x)$

إذن $g'(x) = \frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$

بما أن $x \in [0;+\infty[$ فإن $g'(x)$ له إشارة $1-x$



لأن $2x \geq 0$ و $1+x>0$ و $(x^2+1)^2>0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

g متزايدة تماما على $[0;1]$

g متناقصة تماما على $[1,+\infty[$

جدول تغيرات g

x	0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		$-$		
$g(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$$g(1) = \frac{2(1)^2}{(1)^2+1} - \ln(1^2+1)$$

$$g(1) = 1 - \ln 2$$

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل على المجال $]\frac{7}{4};e[$ حلا وحيدا α

بما أن g مستمرة ومتناقصة تماما على $[\frac{7}{4};e]$

($[\frac{7}{4},e]$ جزء من $[1,+\infty[$)

$$g\left(\frac{7}{4}\right) = 0,1 \quad g(2) = -0,01$$

أي $g\left(\frac{7}{4}\right) \times g(2) < 0$ و

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]\frac{7}{4}; 2\right[$

4) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$

حسب الجدول السابق لدينا

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	

II نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}\ln(x^2+1) \; ; \; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) منحنى الدالة f في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) بين أن الدالة f فردية

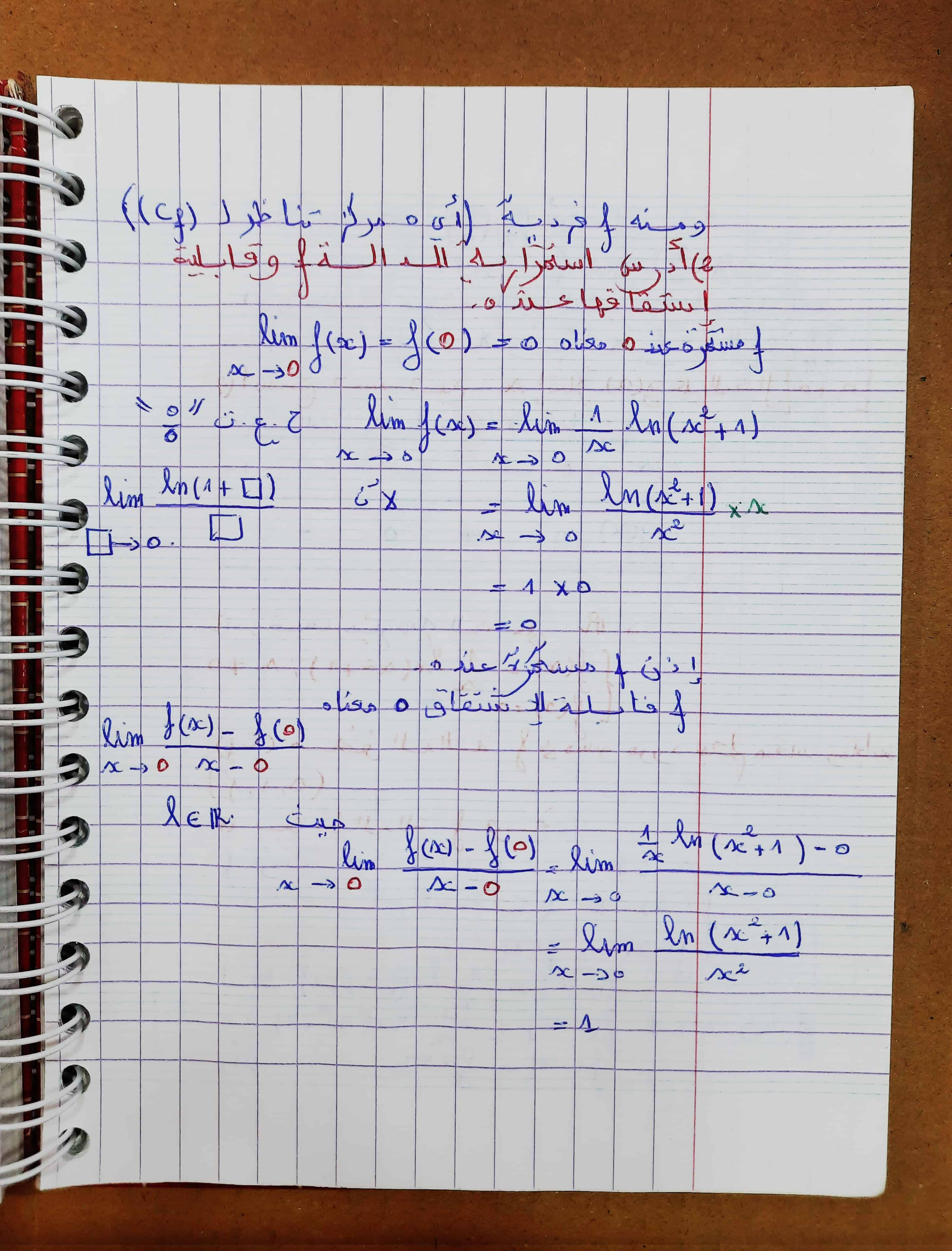
f فردية معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (-x) \in \mathbb{R} \quad (\text{محققة}) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

لدينا $f(-x) = \frac{1}{-x}\ln((-x)^2+1)$

$f(-x) = -\frac{1}{x}\ln(x^2+1)$ لأن $(-x)^2 = x^2$

أي $f(-x) = -f(x)$



ومنه f فردية (أي O مركز تناظر لـ (C_f))

ج) أدرس استمرارية الدالة f وقابلية اشتقاقها عند 0.

f مستمرة عند 0 معناه $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(x^2+1)$$

ح.ع.ت "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{\square \to 0} \frac{\ln(1+\square)}{\square}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} \times x$$

$$= 1 \times 0$$

$$= 0$$

إذن f مستمرة عند 0.

f قابلة للاشتقاق عند 0 معناه

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = l$$

حيث $l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}\ln(x^2+1) - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$$

$$= 1$$

ومنه f تقبل الاشتقاق عند 0

ولدينا $f'(0) = 1$

2) ب) احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \ln(x^2+1)$$ ح ع ت $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$= \lim_{x \to \mp\infty} \frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x}$$

$$= \lim_{x \to \mp\infty} \frac{\ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{\ln x^2}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= 0.$$

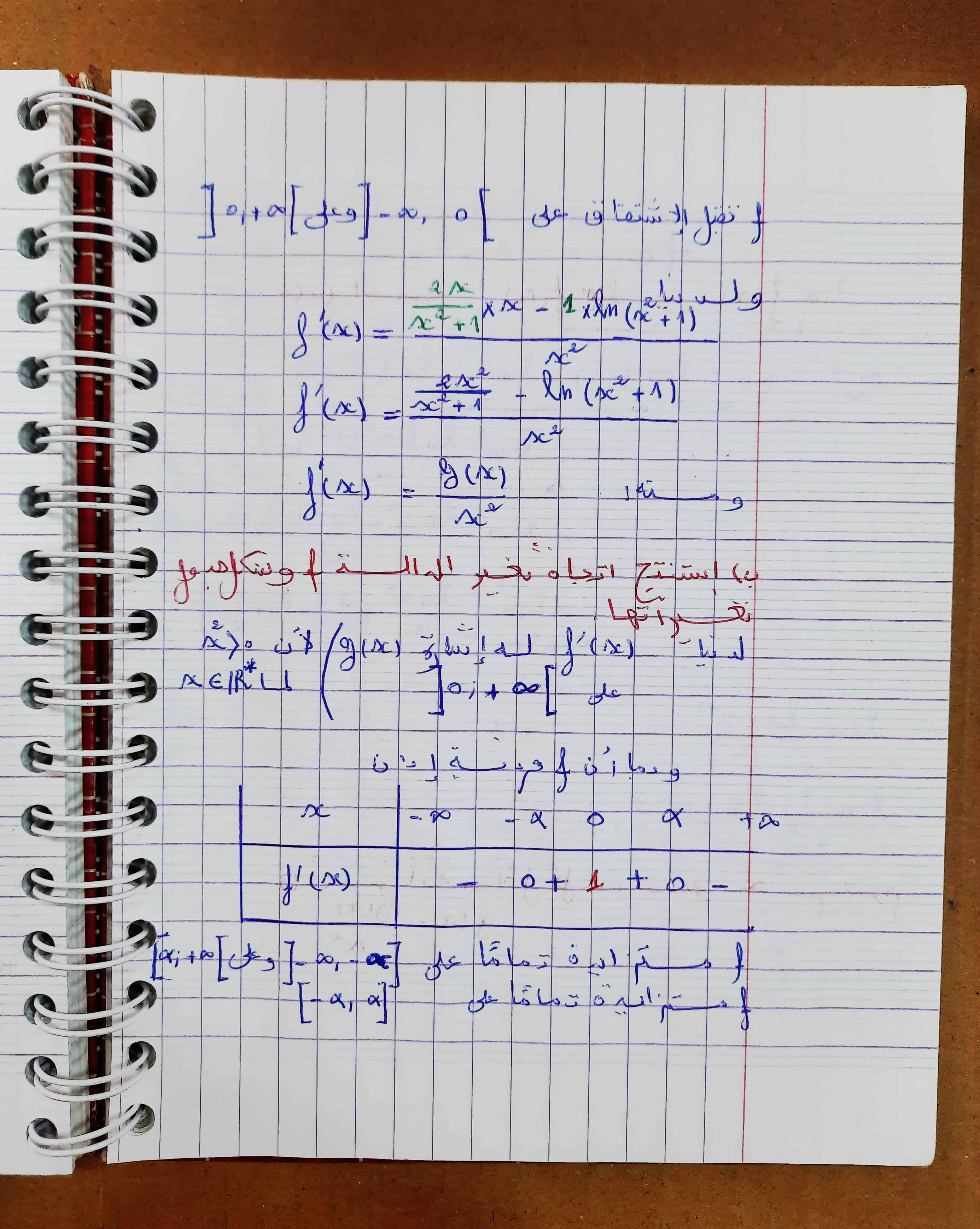
لأن

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(x^2)}{x}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$



f تقبل الإشتقاق على $]-\infty, 0[$ وعلى $]0,+\infty[$

ولدينا

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1} \times x - 1 \times \ln(x^2+1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2}$$

ومنه:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

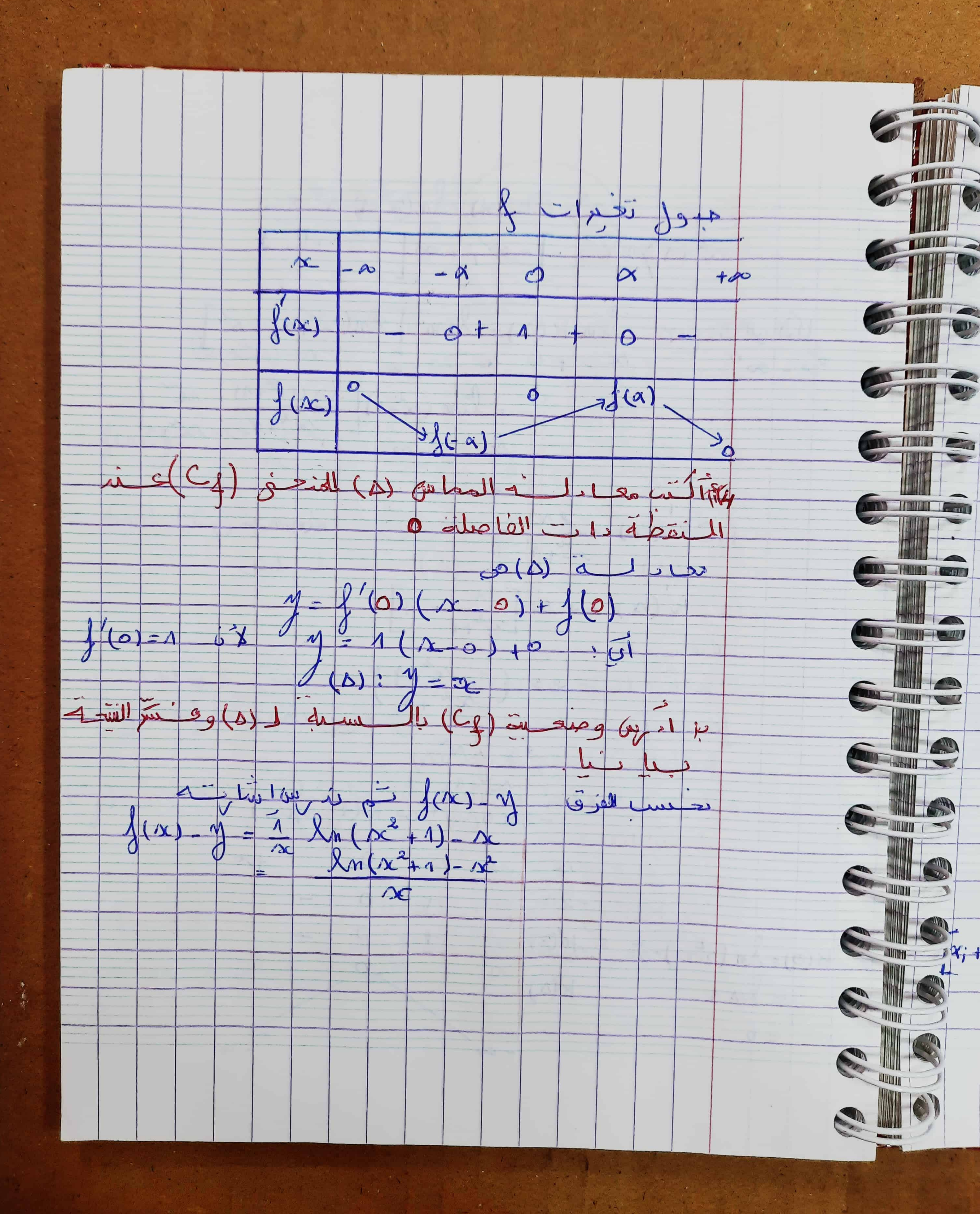
لدينا $f'(x)$ له إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ (لأن $x^2>0$ لما $x \in \mathbb{R}^*$

وبما أن f فردية إذن

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	

f متناقصة تماما على $]-\infty, -\alpha]$ وعلى $[\alpha, +\infty[$

f متزايدة تماما على $[-\alpha, \alpha]$



جدول تغيرات f

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(-\alpha)$	↗	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

4) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

معادلة (Δ) هي

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

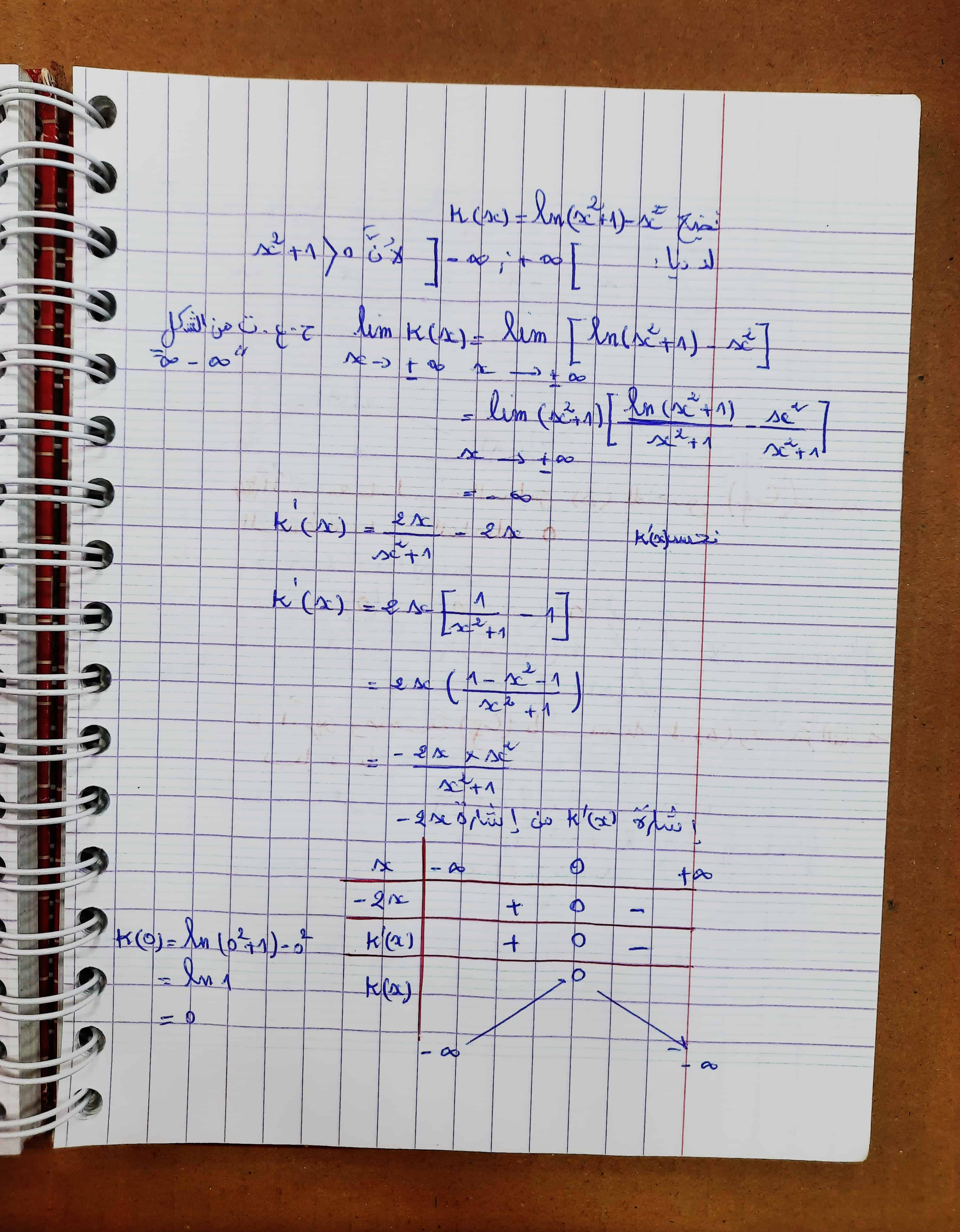
أي: $y = 1(x-0) + 0$ لأن $f'(0) = 1$

$$(\Delta) : y = x$$

5) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) وفسر النتيجة بيانيا.

نحسب الفرق $f(x) - y$ ثم ندرس إشارته

$$f(x) - y = \frac{1}{x}\ln(x^2+1) - x = \frac{\ln(x^2+1) - x^2}{x}$$



نضع $k(x) = \ln(x^2+1) - x^2$

لدينا : $]-\infty ; +\infty[$ لأن $x^2+1 > 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} k(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\ln(x^2+1) - x^2 \right]$$ ح.ع.ت من الشكل $\infty - \infty$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} (x^2+1)\left[\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^2+1} \right]$$

$$= -\infty$$

نحسب $k'(x)$

$$k'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 2x$$

$$k'(x) = 2x\left[\frac{1}{x^2+1} - 1\right]$$

$$= 2x\left(\frac{1 - x^2 - 1}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{-2x \times x^2}{x^2+1}$$

إشارة $k'(x)$ من إشارة $-2x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$	
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

$$k(0) = \ln(0^2+1) - 0^2$$
$$= \ln 1$$
$$= 0$$

ومنه $k(x) \leq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\ln(x^2+1) - x^2$		$-$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$	
$f(x) - y = \frac{\ln(x^2+1) - x^2}{x}$		$+$	‖	$-$	
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	

التفسير البياني:

بما أن المماس (Δ) يخترق المنحنى (C_f) لأن لما

$x \in]-\infty, 0[$ لدينا (C_f) يقع فوق (Δ) ولما $x \in]0, +\infty[$

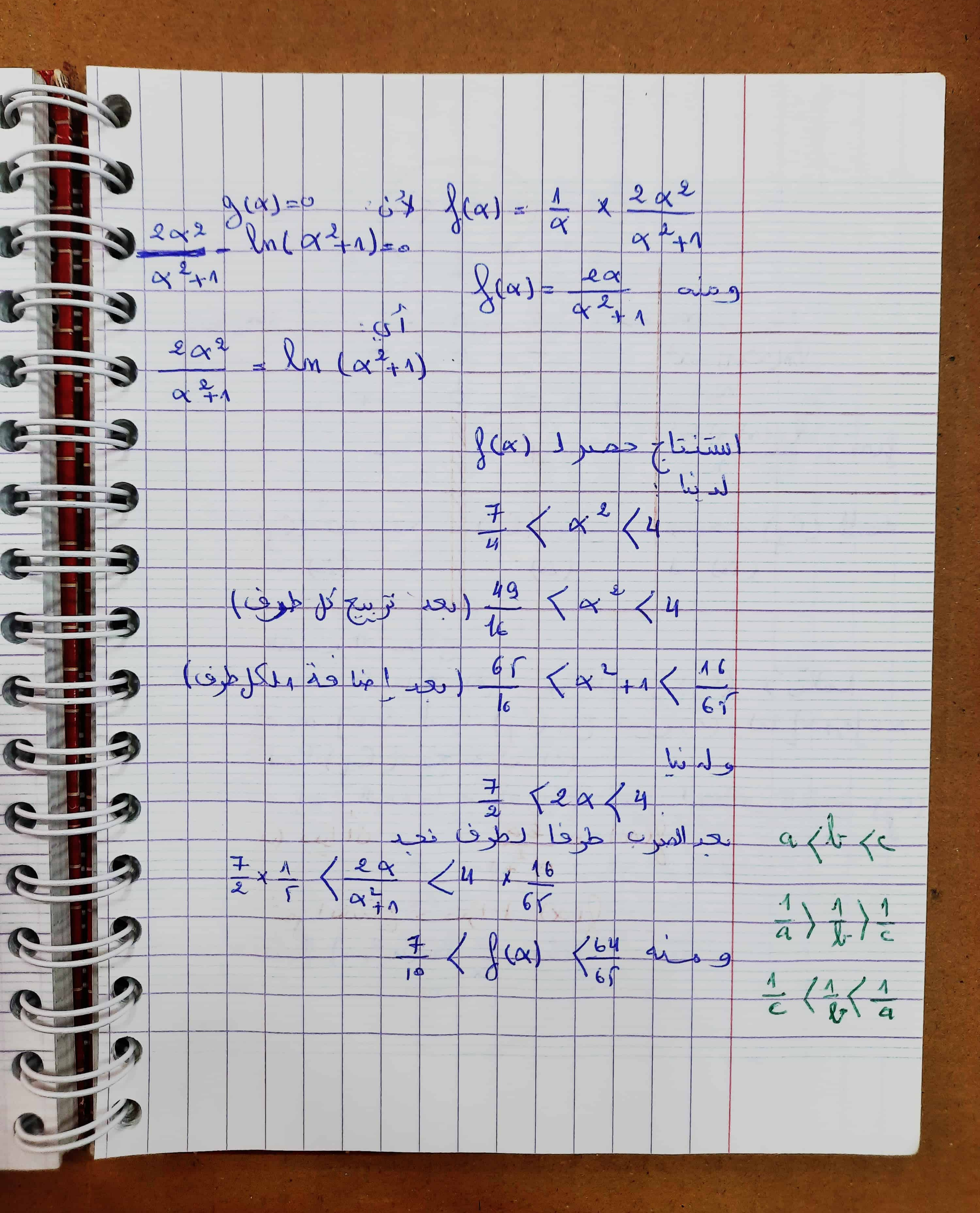
لدينا (C_f) يقع تحت (Δ)

إذن النقطة $O(0;0)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

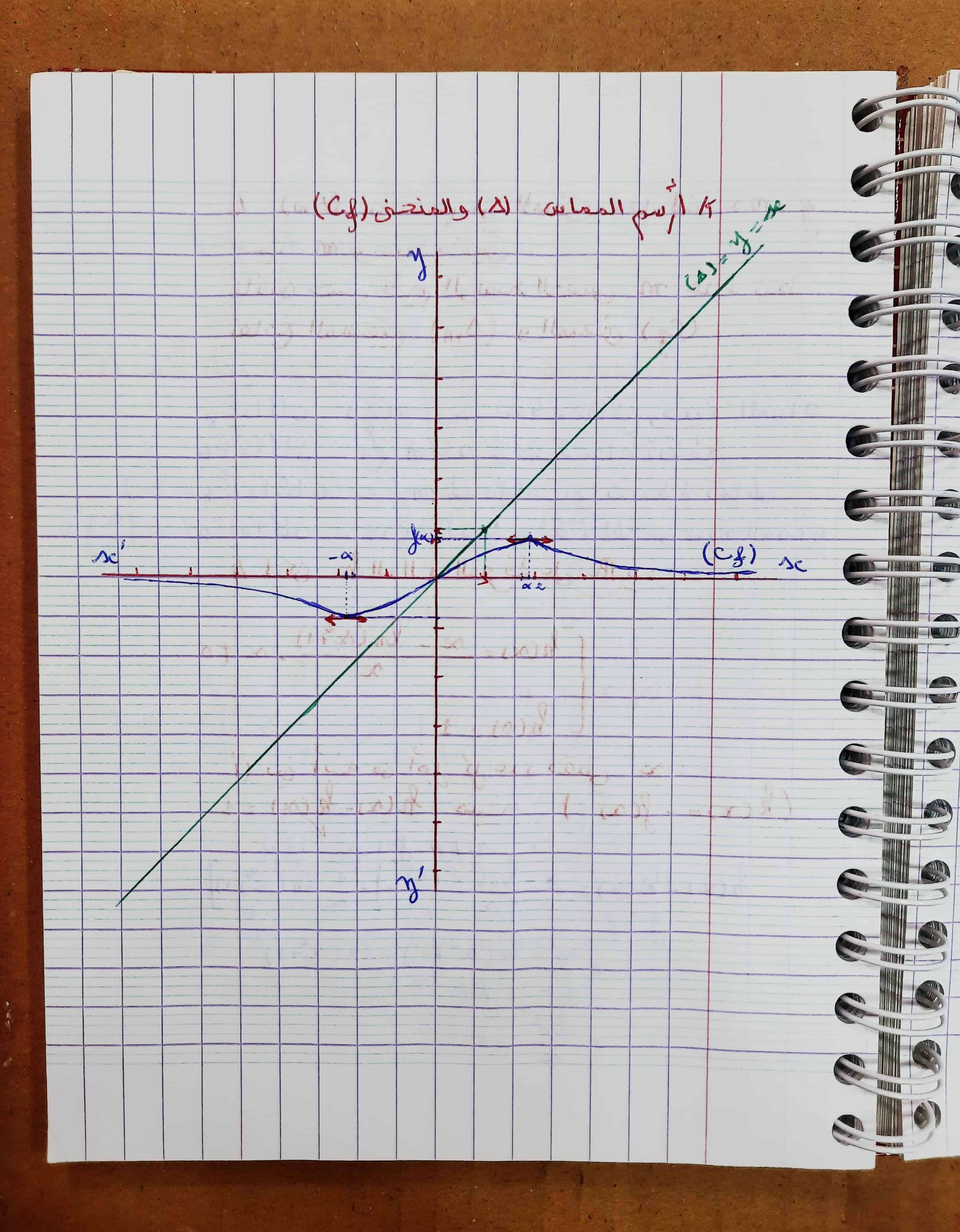
ب) بين أن $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \ln(\alpha^2+1)$



$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \times \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}$ لأن: $g(\alpha)=0$
$\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} - \ln(\alpha^2+1) = 0$
ومنه $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$
أي:
$\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} = \ln(\alpha^2+1)$
استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$
لدينا:
$\frac{7}{4} < \alpha^2 < 4$
$\frac{49}{16} < \alpha^2 < 4$ (بعد تربيع كل طرف)
$\frac{65}{16} < \alpha^2+1 < \frac{16}{65}$ (بعد إضافة 1 لكل طرف)
ولدينا
$\frac{7}{2} < 2\alpha < 4$
بعد الضرب طرفا لطرف نجد
$\frac{7}{2} \times \frac{1}{5} < \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} < 4 \times \frac{16}{65}$
ومنه $\frac{7}{10} < f(\alpha) < \frac{64}{65}$
$a < b < c$
$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$
$\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$



٢/ أرسم المماس (Δ) والمنحنى (Cf)
(Δ): y = x
y
y'
x'
x
(Cf)
-α
α
f(α)

(3) (Δm) مستقيم من المستوي معادلته $y = mx$
حيث m وسيط حقيقي
ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط
تقاطع المستقيم (Δm) والمنحنى (C_f)

- إذا كان $m \leq 0$ توجد نقطة تقاطع وحيدة المبدأ O
- إذا كان $0 < m < 1$ توجد 3 نقاط تقاطع
- إذا كان $m = 1$ لدينا المبدأ O نقطة تماس
- إذا كان $m > 1$ لدينا نقطة تقاطع وحيدة المبدأ O

4) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x - \ln(x^2+1)}{x} , x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

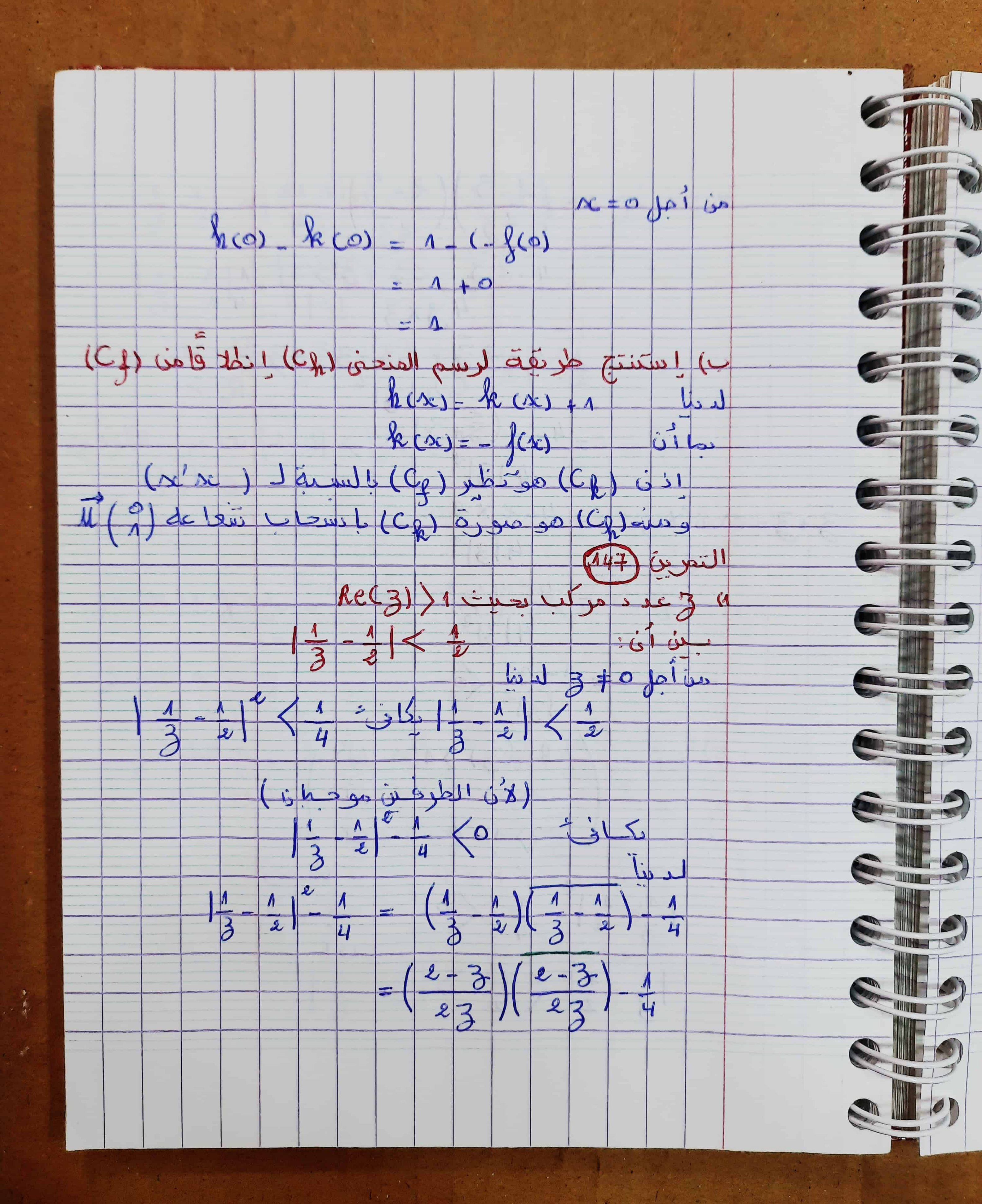
أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x:
$h(x) - k(x) = 1$ حيث: $(k(x) = -f(x))$

لدينا من أجل $x \neq 0$:

$$h(x) - k(x) = \frac{x - \ln(x^2+1)}{x} - \left[-\frac{1}{x}\ln(x^2+1)\right]$$

$$= \frac{x - \ln(x^2+1) + \ln(x^2+1)}{x}$$

$$= \frac{x}{x} = 1$$



من أجل $x = 0$

$$h(0) - k(0) = 1 - (-f(0))$$
$$= 1 + 0$$
$$= 1$$

ب) إستنتج طريقة لرسم المنحنى (C_h) إنطلاقاً من (C_f)

لدينا $h(x) = k(x) + 1$

بما أن $k(x) = -f(x)$

إذن (C_k) هو نظير (C_f) بالنسبة لـ $(x'x)$

ومنه (C_h) هو صورة (C_k) بانسحاب شعاعه $\vec{u}\binom{0}{1}$

التمرين (147)

1) z عدد مركب بحيث $Re(z) > 1$

بين أن: $\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$

من أجل $z \neq 0$ لدينا

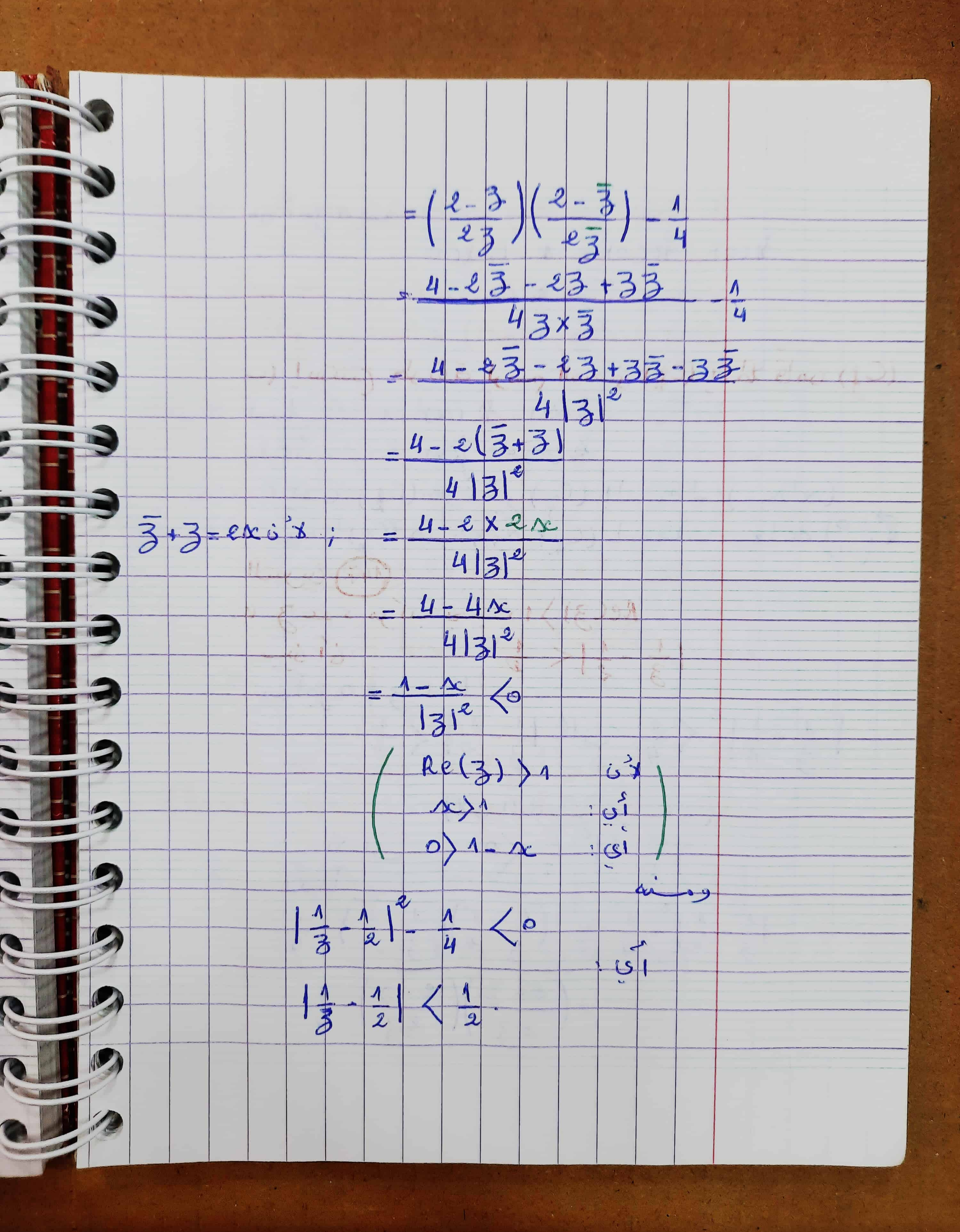
$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ يكافئ $\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right|^2 < \frac{1}{4}$

(لأن الطرفين موجبان)

يكافئ $\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right|^2 - \frac{1}{4} < 0$

لدينا

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right|^2 - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right)\overline{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{4}$$
$$= \left(\frac{2-z}{2z}\right)\overline{\left(\frac{2-z}{2z}\right)} - \frac{1}{4}$$



$$= \left(\frac{2-z}{2z}\right)\left(\frac{2-\bar{z}}{2\bar{z}}\right) - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4 - 2\bar{z} - 2z + z\bar{z}}{4z \times \bar{z}} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4 - 2\bar{z} - 2z + z\bar{z} - z\bar{z}}{4|z|^2}$$

$$= \frac{4 - 2(\bar{z} + z)}{4|z|^2}$$

$\bar{z} + z = 2x$;
$$= \frac{4 - 2 \times 2x}{4|z|^2}$$

$$= \frac{4 - 4x}{4|z|^2}$$

$$= \frac{1 - x}{|z|^2} < 0$$

لأن $Re(z) > 1$

أي : $x > 1$

أي : $0 > 1 - x$

ومنه

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right|^2 - \frac{1}{4} < 0$$

أي :

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}.$$

ط2) من أجل $z \neq 0$ لدينا: $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-z}{2z}\right|$

أي: $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right| = \frac{|2-z|}{2|z|}$

ومنه $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ تكافئ $\frac{|2-z|}{2|z|} < \frac{1}{2}$

تكافئ $|2-z| < |z|$ بعد ضرب الطرفين في $2|z|$

لأن $2|z| > 0$

تكافئ $\sqrt{(2-x)^2+(-y)^2} < \sqrt{x^2+y^2}$ لأن بوضع $z = x+iy$

نجد

$2-z = 2-x-iy$

$= (2-x)-iy$

تكافئ $(2-x)^2+y^2 < x^2+y^2$ بعد تربيع الطرفين الموجبين

تكافئ $4-4x+x^2+y^2 < x^2+y^2$

تكافئ $4 < 4x$

تكافئ $1 < x$ صحيحة.

ومنه

$$\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

التمرين 148

z_1 و z_2 عددان مركبان بحيث

$|z_1|=|z_2|=1$ و $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$

احسب $|z_1-z_2|$

لدينا:

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}$$

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$$

$$|z_1+z_2|^2=z_1\times\overline{z_1}+z_1\times\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\times\overline{z_2}$$

(1)...... $$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+z_1\times\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+|z_2|^2$$

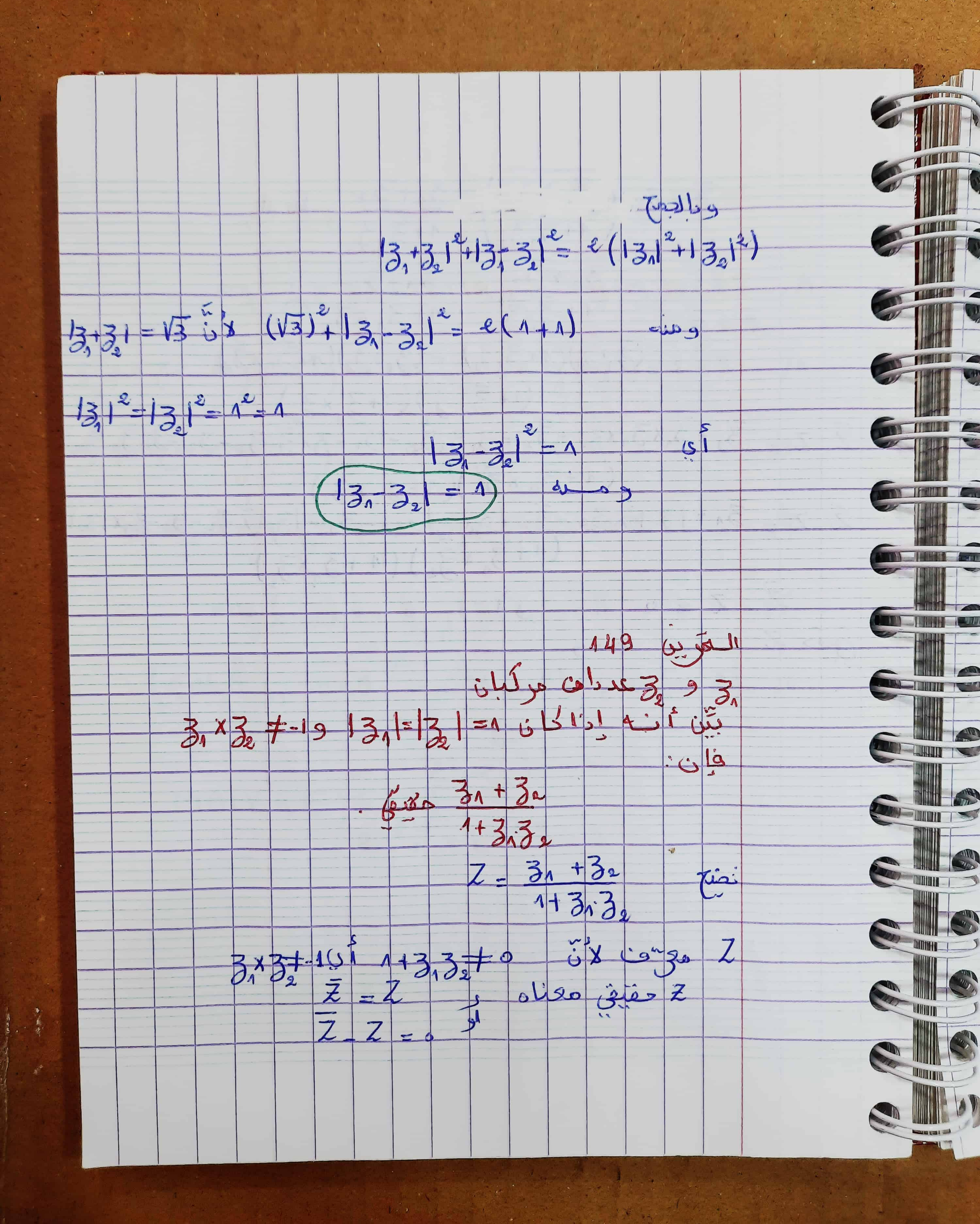
ولدينا

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}$$

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$$

$$|z_1-z_2|^2=z_1\times\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$$

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+|z_2|^2$$



وبالجمع

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

ومنه $(\sqrt{3})^2+|z_1-z_2|^2 = 2(1+1)$ لأنّ $|z_1+z_2| = \sqrt{3}$

$|z_1|^2=|z_2|^2=1^2=1$

أي $|z_1-z_2|^2 = 1$

ومنه $|z_1-z_2| = 1$

التمرين 149

z_1 و z_2 عددان مركبان

بيّن أنه إذا كان $|z_1|=|z_2|=1$ و $z_1\times z_2 \neq -1$

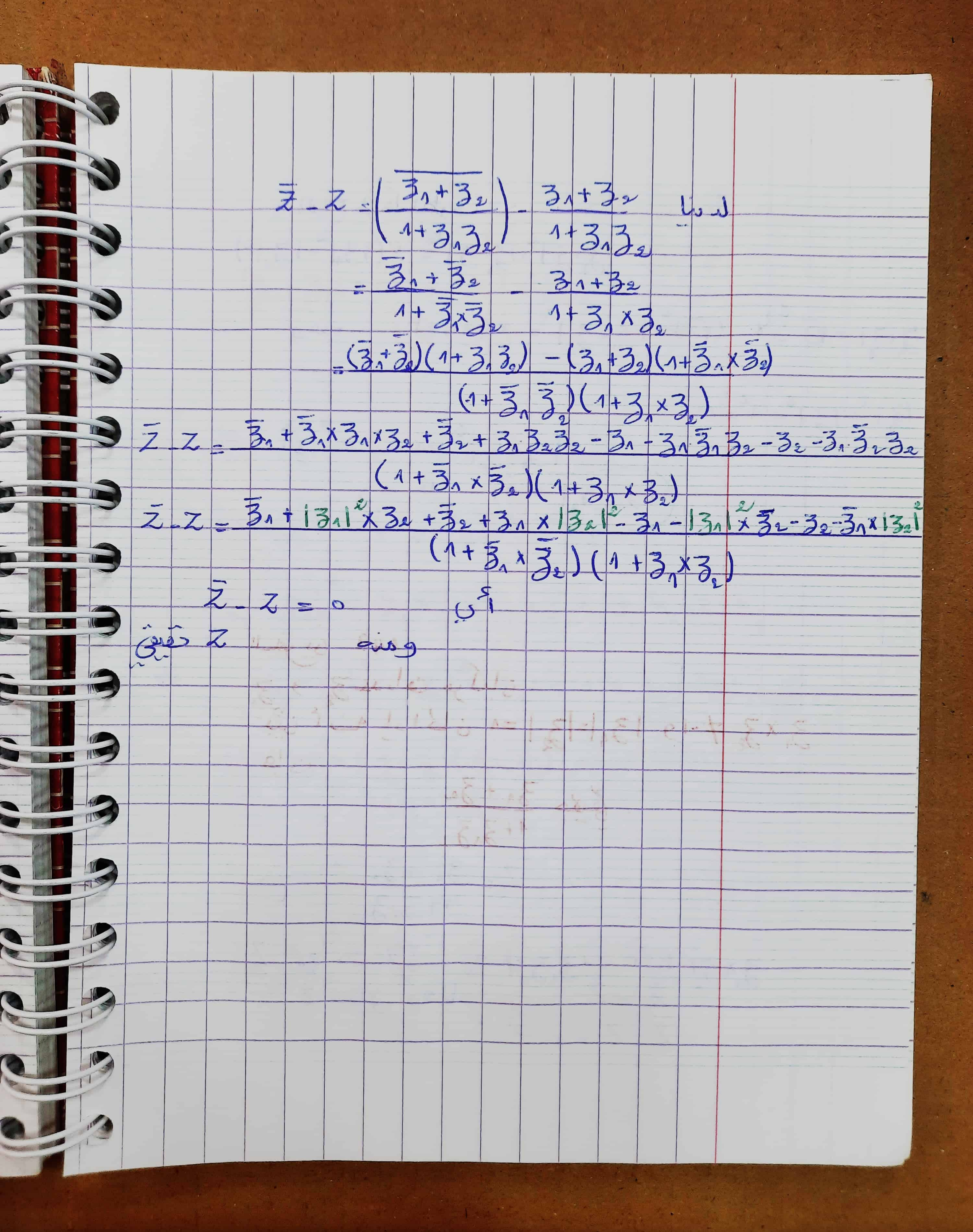
فإن:

$\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ حقيقي.

نضع $Z = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$

Z معرّف لأنّ $1+z_1z_2 \neq 0$ أي $z_1\times z_2 \neq -1$

Z حقيقي معناه $\bar{Z} = Z$ أو $\bar{Z} - Z = 0$



لدينا $\bar{z} - z = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)} - \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$

$$= \frac{\bar z_1+\bar z_2}{1+\bar z_1\times\bar z_2} - \frac{z_1+z_2}{1+z_1\times z_2}$$

$$= \frac{(\bar z_1+\bar z_2)(1+z_1z_2) - (z_1+z_2)(1+\bar z_1\times\bar z_2)}{(1+\bar z_1\bar z_2)(1+z_1\times z_2)}$$

$$\bar z - z = \frac{\bar z_1 + \bar z_1\times z_1\times z_2 + \bar z_2 + z_1 z_2\bar z_2 - z_1 - z_1\bar z_1\bar z_2 - z_2 - \bar z_1\bar z_2 z_2}{(1+\bar z_1\times\bar z_2)(1+z_1\times z_2)}$$

$$\bar z - z = \frac{\bar z_1 + |z_1|^2\times z_2 + \bar z_2 + z_1\times|z_2|^2 - z_1 - |z_1|^2\times\bar z_2 - z_2 - \bar z_1\times|z_2|^2}{(1+\bar z_1\times\bar z_2)(1+z_1\times z_2)}$$

أي $\bar z - z = 0$

ومنه z حقيقي

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم

1/ $\text{Arg}(z_1 \times z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

2/ $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) + 2k\pi$ مع $z_2 \neq 0$

3/ $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z) + 2k\pi$ مع $z \neq 0$

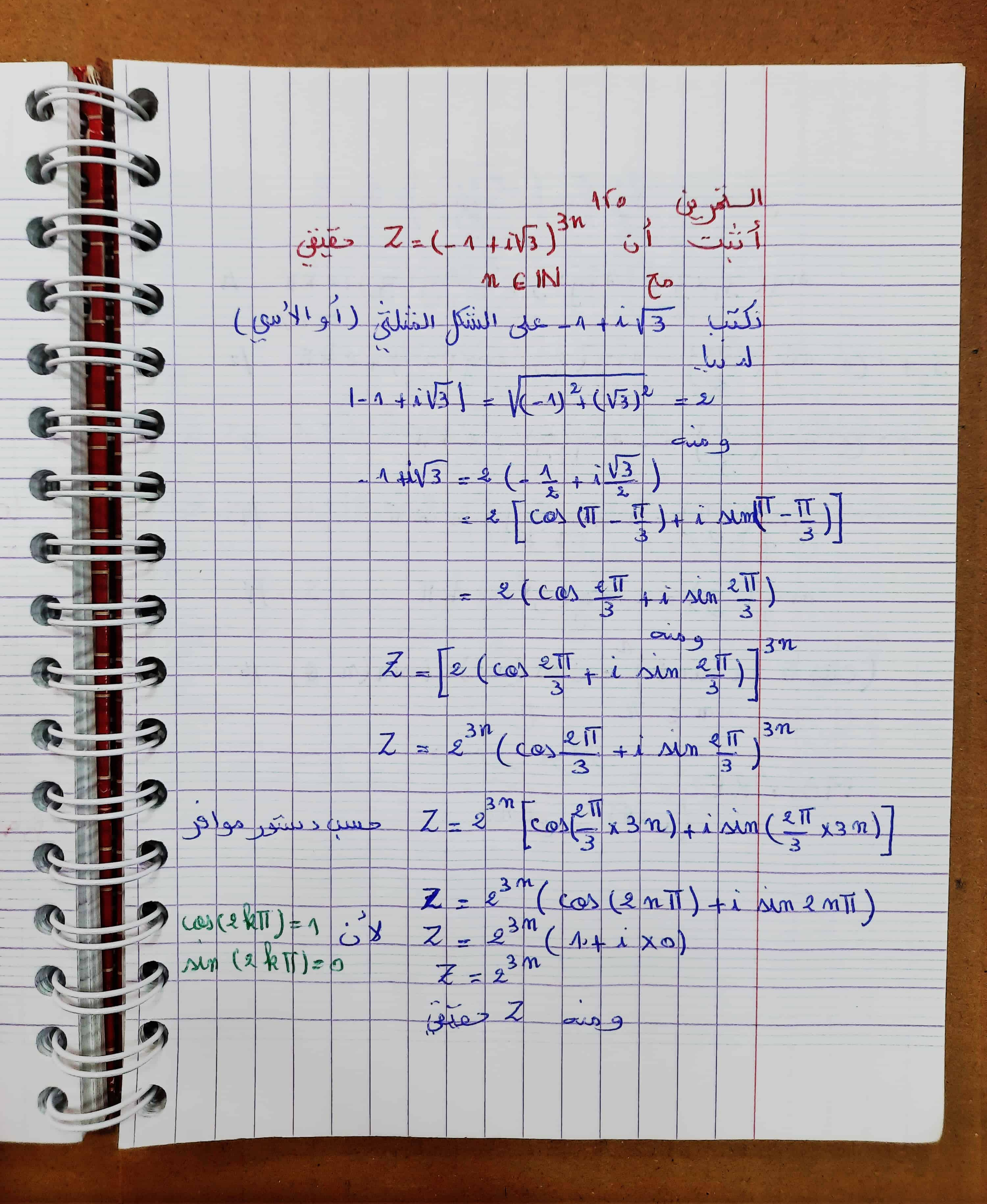
4/ $\text{Arg}(z^n) = n\,\text{Arg}(z) + 2k\pi$

5/ $\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z) + 2k\pi$

6/ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ مع $n \in \mathbb{Z}$

دستور موافر MOIVRE

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$



التمرين ١٢٥

أثبت أن $Z=(-1+i\sqrt{3})^{3n}$ حقيقي

مع $n \in \mathbb{N}$

نكتب $-1+i\sqrt{3}$ على الشكل المثلثي (أو الأسي)

لدينا

$$|-1+i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$$

ومنه

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

ومنه

$$Z = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{3n}$$

$$Z = 2^{3n}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{3n}$$

حسب دستور موافر

$$Z = 2^{3n}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\times 3n\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\times 3n\right)\right]$$

$$Z = 2^{3n}\left(\cos(2n\pi)+i\sin 2n\pi\right)$$

$$Z = 2^{3n}(1+i\times 0)$$

لأن $\cos(2k\pi)=1$

$\sin(2k\pi)=0$

$$Z = 2^{3n}$$

ومنه Z حقيقي

التمرين 151 (Bac . S.E 2008)

انطلاقا من التعريف $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

ومنه الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

برهن أنّ $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ وأنّ $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

حيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.

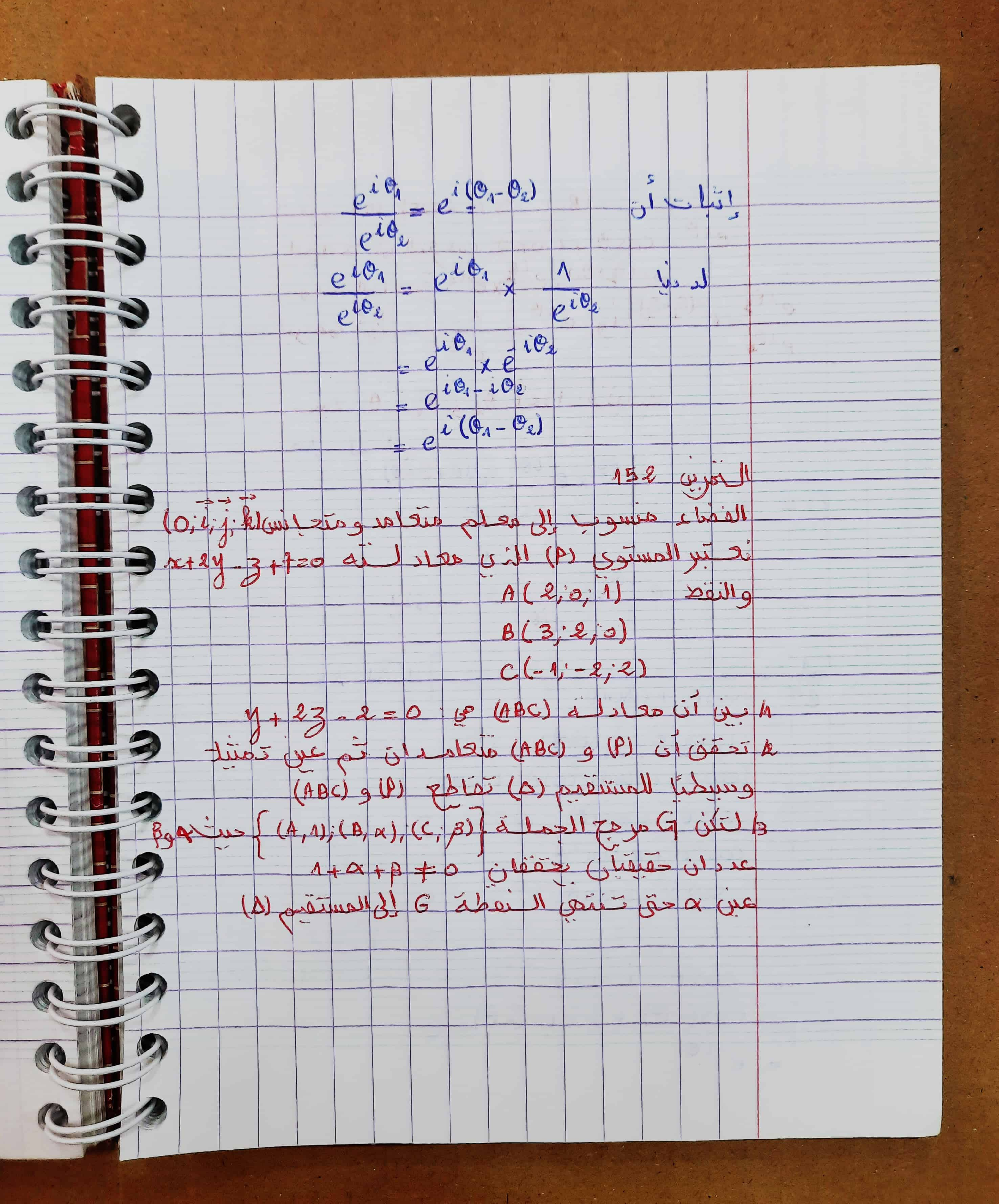
حل لدينا:

$$e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = e^{i\theta+(-i\theta)}$$
$$= e^0$$
$$= 1$$

إذن $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

حل لدينا

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$$
$$= \frac{1(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)}$$
$$= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$
$$= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1}$$
$$= \cos\theta - i\sin\theta$$
$$= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$
$$= e^{-i\theta}$$



إثبات أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

لدينا $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \times \frac{1}{e^{i\theta_2}}$

$= e^{i\theta_1} \times e^{-i\theta_2}$

$= e^{i\theta_1 - i\theta_2}$

$= e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

التمرين 152

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x+2y-z+7=0$

والنقط $A(2;0;1)$

$B(3;2;0)$

$C(-1;-2;2)$

1 بين أن معادلة (ABC) هي $y+2z-2=0$

2 تحقق أن (P) و (ABC) متعامدان ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع (P) و (ABC)

3 لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,\alpha);(C;\beta)\}$ حيث α و β عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta \neq 0$

عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ)

A) لدينا

$\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا

لأن $-\frac{3}{1} \neq -\frac{2}{2}$

أي أن A ، B ، C تشكل مستويا وحيدا (ABC)

ولدينا

$A \in (ABC)$ أي $y_A + 2z_A - 2 = 0 + 2(1) - 2 = 0$

$B \in (ABC)$ أي $y_B + 2z_B - 2 = 2 + 2(0) - 2 = 0$

$C \in (ABC)$ أي $y_C + 2z_C - 2 = 2 + 2(2) - 2 = 0$

ومنه معادلة لـ (ABC) هي $y + 2z - 2 = 0$

2) نتحقق أن $(ABC) \perp (P)$

ليكن $\vec{n_1}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

$\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P)

بما أن $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = (0)(1) + (1)(2) + (2)(-1) = 0$

إذن $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ متعامدان ومنه $(ABC) \perp (P)$

بما أن $(ABC) \perp (P)$ إذن (P) يقطع (ABC) وفق مستقيم (Δ) حيث

$$\begin{cases} x + 2y - z + 7 = 0 \\ y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

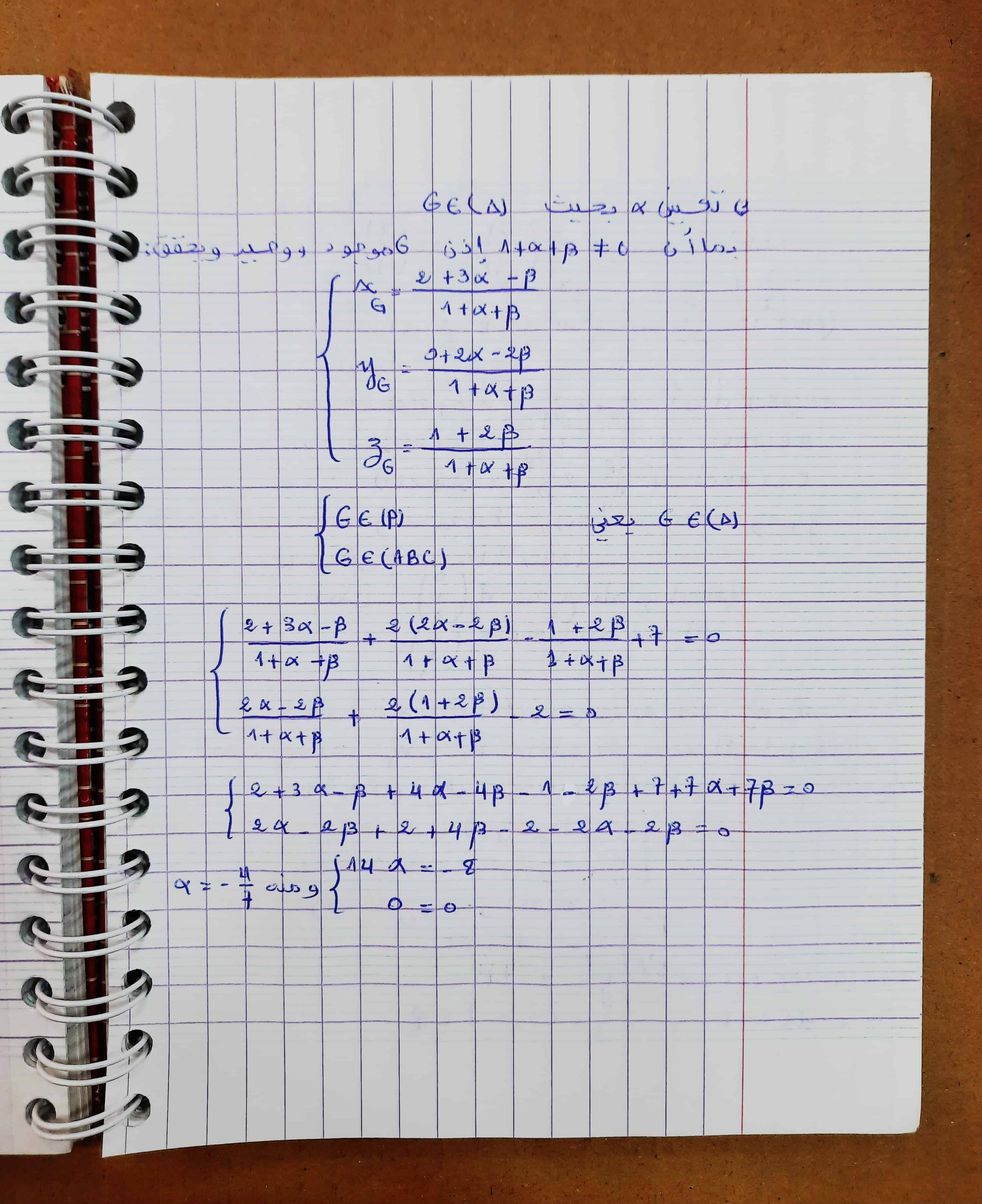
ومنه تمثيل وسيطي لـ (Δ) هو:

$$\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

لأن

$x + 2(2 - 2t) - t + 7 = 0$

$x = -11 + 5t$


ب) تعيين α بحيث G ∈ (Δ)
بما أن 1+α+β ≠ 0 إذن G موجود ووحيد ويحقق:
x_G = (2 + 3α − β)/(1 + α + β)
y_G = (0 + 2α − 2β)/(1 + α + β)
z_G = (1 + 2β)/(1 + α + β)
G ∈ (Δ) يعني G ∈ (P) ، G ∈ (ABC)
(2 + 3α − β)/(1 + α + β) + 2(2α − 2β)/(1 + α + β) − (1 + 2β)/(1 + α + β) + 7 = 0
(2α − 2β)/(1 + α + β) + 2(1 + 2β)/(1 + α + β) − 2 = 0
2 + 3α − β + 4α − 4β − 1 − 2β + 7 + 7α + 7β = 0
2α − 2β + 2 + 4β − 2 − 2α − 2β = 0
14α = −8
0 = 0
ومنه α = −4/7

ومنه

يعني $G \in (\Delta)$

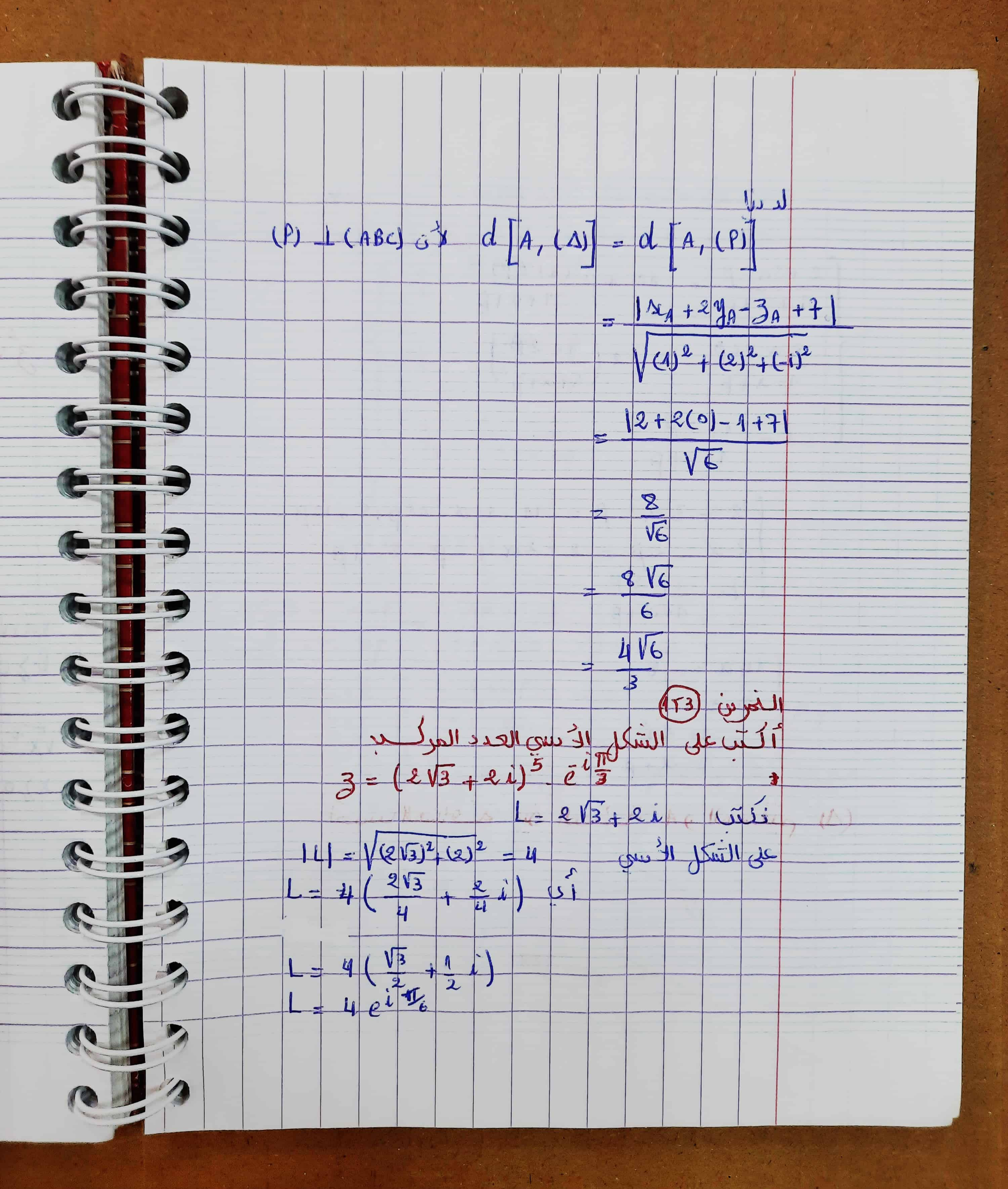
$$\begin{cases} \dfrac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta} = -11 + \dfrac{5(1+2\beta)}{1+\alpha+\beta} \\ \dfrac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta} = 2 - 2\left(\dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}\right) \\ t = \dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+3\alpha-\beta = -11-11\alpha-11\beta+5+10\beta \\ 2\alpha-2\beta = 2+2\alpha+2\beta-2-4\beta \\ t = \dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14\alpha = -8 \\ 0 = 0 \\ t = \dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta} \end{cases}$$

أحسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ)

(P) (ABC) A



لدينا

$(P) \perp (ABC)$ لأن $\quad d[A,(\Delta)] = d[A,(P)]$

$$= \frac{|x_A + 2y_A - z_A + 7|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|2 + 2(0) - 1 + 7|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{8\sqrt{6}}{6}$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

التمرين (123)

أكتب على الشكل الأسي العدد المركب

$$z = (2\sqrt{3} + 2i)^5 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

نكتب $L = 2\sqrt{3} + 2i$ على الشكل الأسي

$$|L| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = 4$$

أي $L = 4\left(\frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4}i\right)$

$$L = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$L = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

ومنه $L^5 = (4 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}})^2$

$L^5 = 4^2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{6}}$ حسب دستور موافر

وبالتالي $z = 4^2 \cdot e^{2\frac{\pi}{6}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z = 4^2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{6} - i\frac{\pi}{3}}$

$z = 4^2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{6} - i\frac{2\pi}{6}}$

$z = 4^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z =$

العدد المركب i

- $i^2 = -1$
- $(1+i)^2 = 2i$
- $(1-i)^2 = -2i$
- $\bar{i} = -i = \frac{1}{i}$
- $|\bar{i}| = |-i| = |i| = 1$
- $Arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

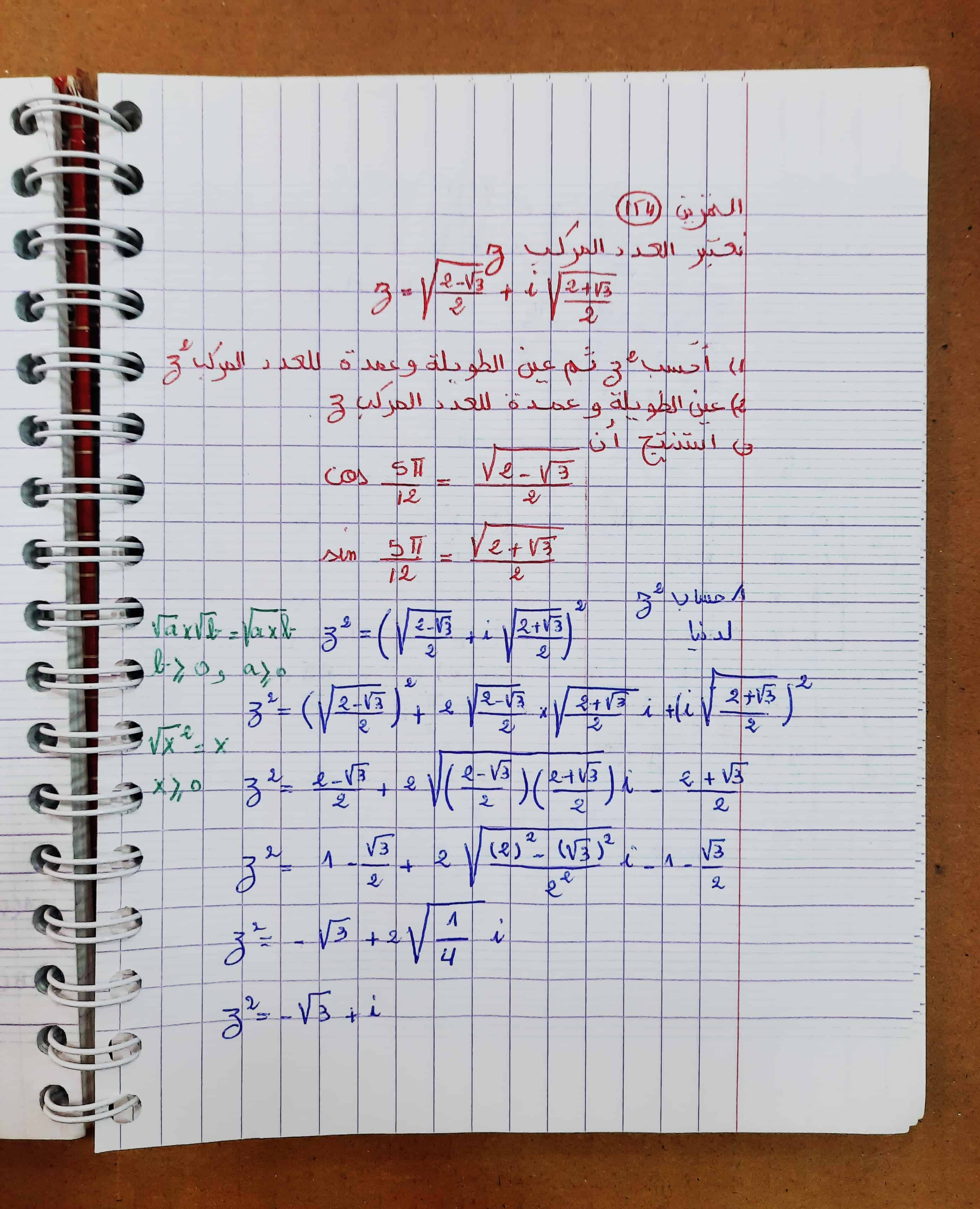
$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$i^n \begin{cases} 1 ; & n = 4k ; k \in \mathbb{N} \\ i ; & n = 4k+1 \\ -1 ; & n = 4k+2 \\ -i ; & n = 4k+3 \end{cases}$$

$i \longmapsto M(0;1)$

$iy = y e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; y > 0$

$iy = -y e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad ; y < 0$



التمرين (١٢٤)

نعتبر العدد المركب z

$$z = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$$

1) أحسب z^2 ثم عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z^2

2) عين الطويلة و عمدة للعدد المركب z

3) استنتج أن

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

1/ حساب z^2

لدينا

$$z^2 = \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)^2$$

$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$

$b \geq 0,\ a \geq 0$

$$z^2 = \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\times\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\,i + \left(i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)^2$$

$\sqrt{x}^2 = x$

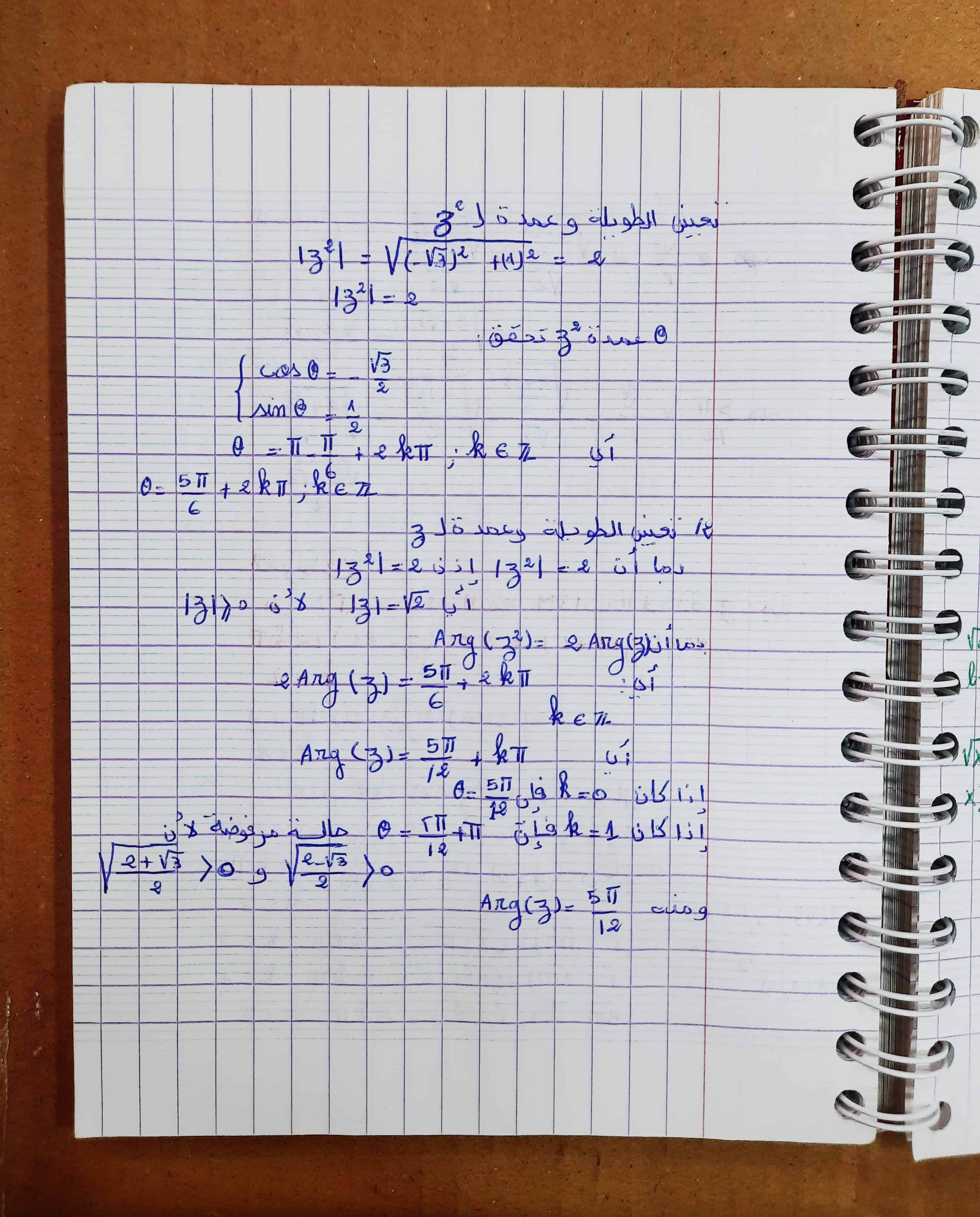
$x \geq 0$

$$z^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)}\,i - \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

$$z^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{\frac{(2)^2-(\sqrt{3})^2}{2^2}}\,i - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^2 = -\sqrt{3} + 2\sqrt{\frac{1}{4}}\,i$$

$$z^2 = -\sqrt{3} + i$$



تعيين الطويلة وعمدة لـ z^2

$$|z^2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$$

$$|z^2| = 2$$

θ عمدة z^2 تحقق:

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

أي $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

$$\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$$

2) تعيين الطويلة وعمدة لـ z

بما أن $|z^2| = 2$ إذن $|z^2| = 2$

أي $|z| = \sqrt{2}$ لأن $|z| \geq 0$

بما أن $Arg(z^2) = 2Arg(z)$

أي: $2Arg(z) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

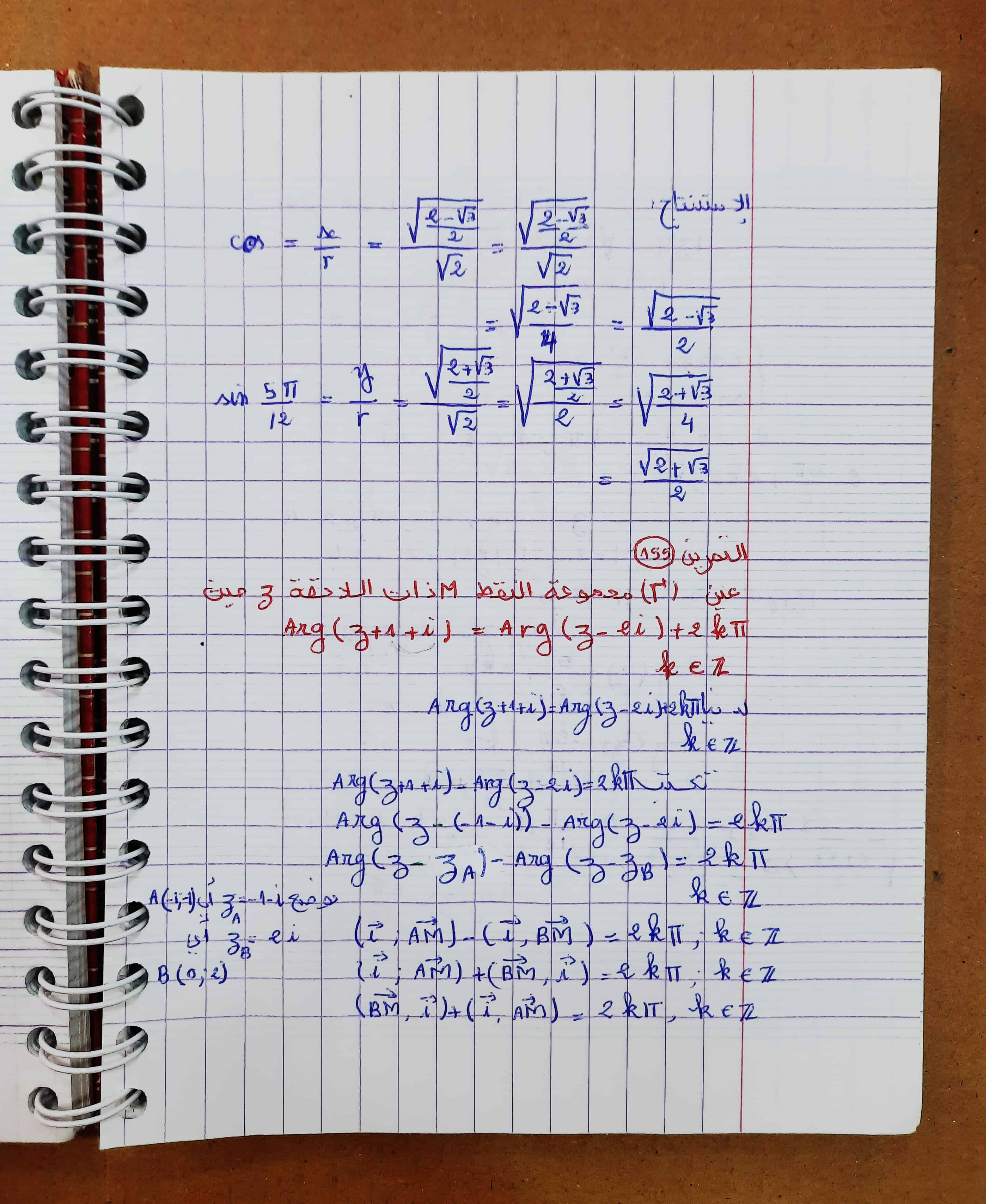
أي $Arg(z) = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

إذا كان $k=0$ فإن $\theta = \frac{5\pi}{12}$

إذا كان $k=1$ فإن $\theta = \frac{5\pi}{12} + \pi$ حالة مرفوضة لأن

$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} > 0$ و $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} > 0$

ومنه $Arg(z) = \frac{5\pi}{12}$



الاستنتاج

$$\cos = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

التمرين (155)

عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث

$$Arg(z+1+i) = Arg(z-2i)+2k\pi$$
$$k\in\mathbb{Z}$$

لدينا $Arg(z+1+i)=Arg(z-2i)+2k\pi$
$k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $Arg(z+1+i)-Arg(z-2i)=2k\pi$

$$Arg(z-(-1-i)) - Arg(z-2i) = 2k\pi$$

$$Arg(z-z_A) - Arg(z-z_B) = 2k\pi$$
$$k\in\mathbb{Z}$$

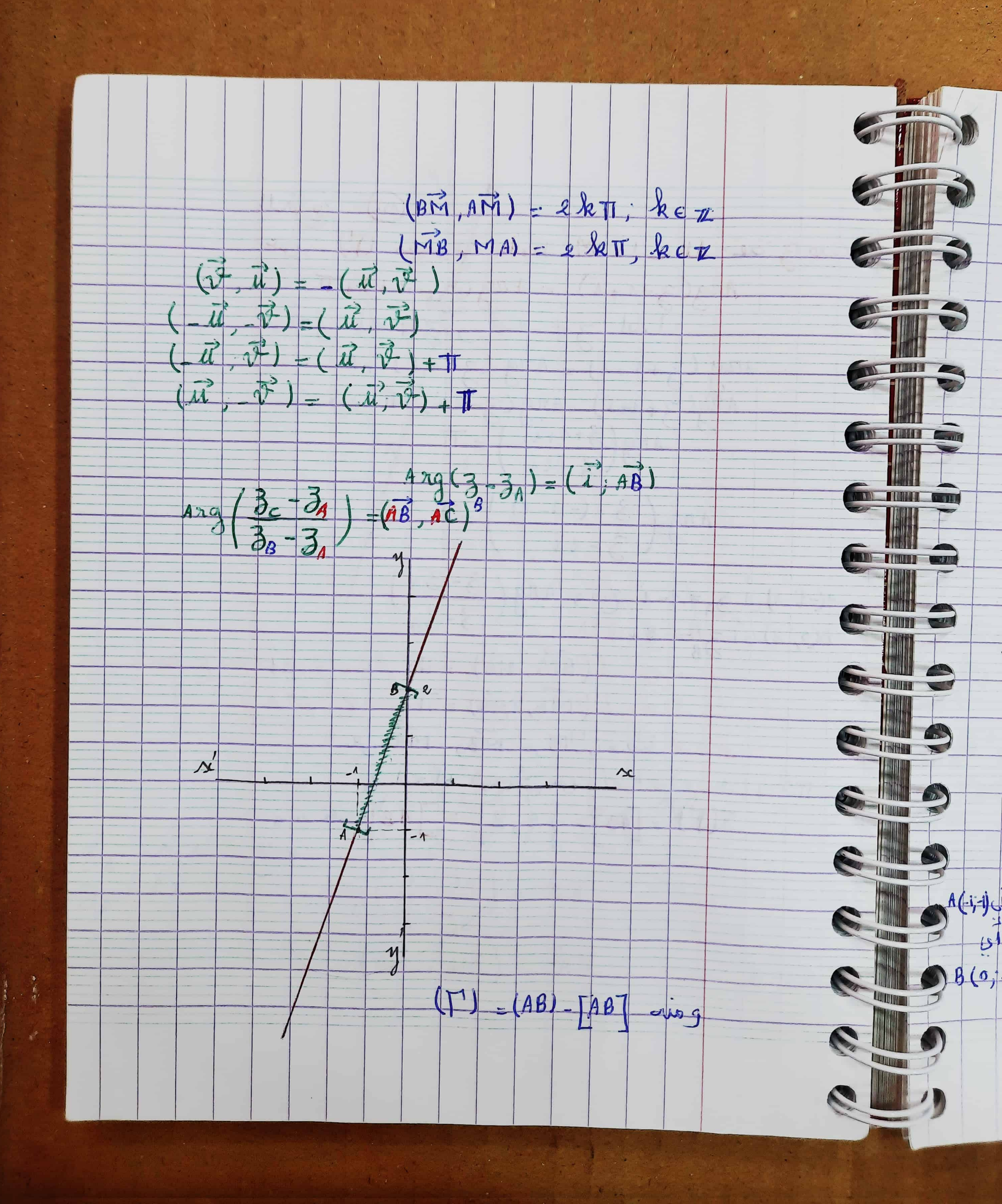
نضع $z_A=-1-i$ أي $A(-1,-1)$

$z_B = 2i$ أي $B(0,2)$

$$(\vec{i}, \vec{AM}) - (\vec{i}, \vec{BM}) = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$(\vec{i}, \vec{AM}) + (\vec{BM}, \vec{i}) = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$(\vec{BM}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{AM}) = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$


(BM, AM) = 2kπ ; k ∈ Z
(MB, MA) = 2kπ, k ∈ Z
(v, u) = -(u, v)
(-u, -v) = (u, v)
(-u, v) = (u, v) + π
(u, -v) = (u; v) + π
Arg(z - zA) = (i; AB)
Arg((zC - zA)/(zB - zA)) = (AB, AC)
y
x'
x
-1
B
2
A
-1
y'
(Γ) = (AB) - [AB]

التمرين (126)

عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث

$$Arg(z+1+i) = Arg(z-2i)+\pi$$

من أجل $z \neq 2i$ و $z \neq -1-i$ لدينا

$$Arg(z+1+i) = Arg(z-2i)+\pi$$

نكتب $Arg(z+1+i) - Arg(z-2i) = \pi$

$$Arg\left(\frac{z+1+i}{z-2i}\right) = \pi$$

$$Arg\left(\frac{z-(-1-i)}{z-2i}\right) = \pi$$

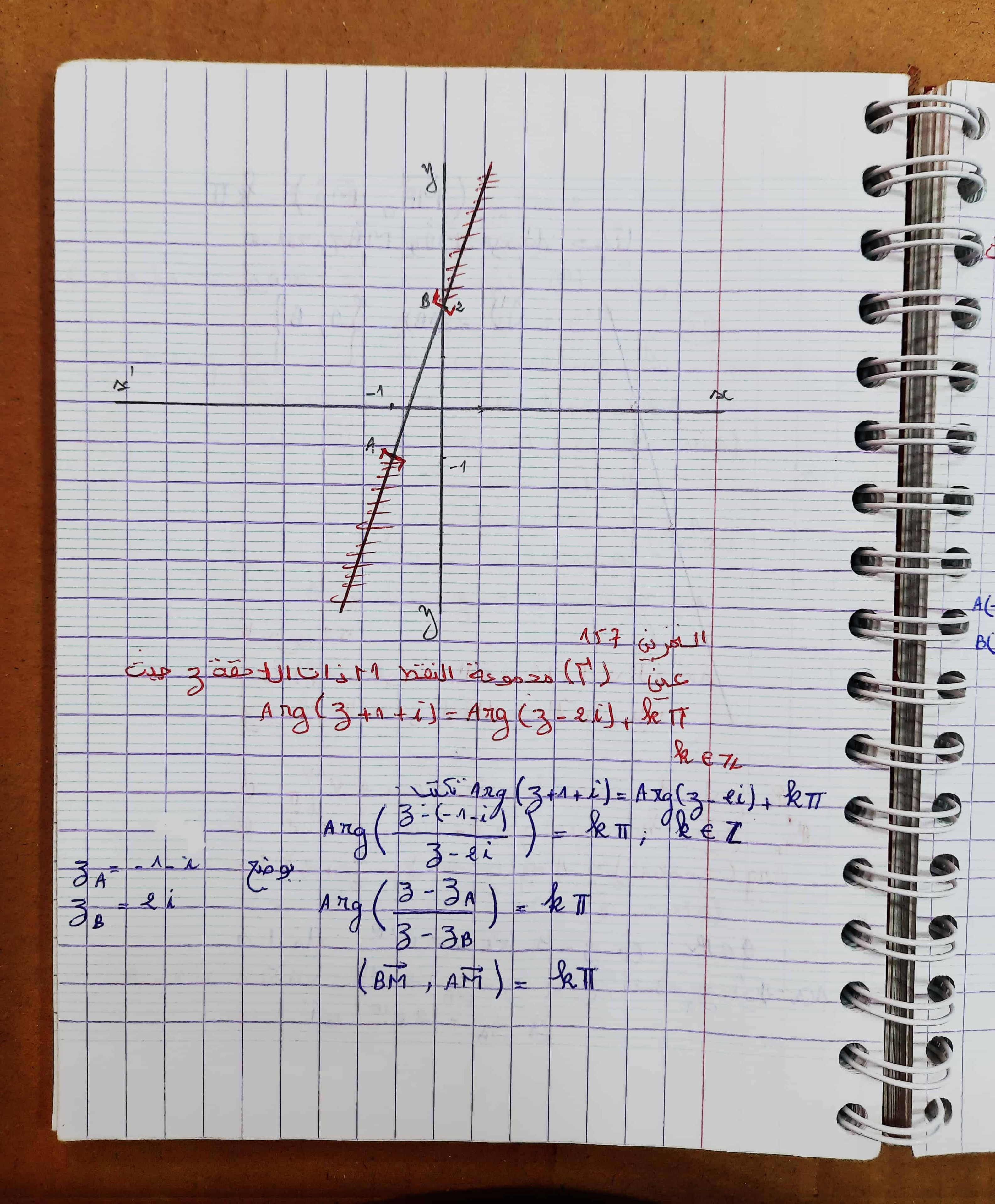
نضع $Arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)$ ، $z_A = -1-i$ أي $A(-1;-1)$ ، $z_B = 2i$ أي $B(0;2)$

أي $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \pi$

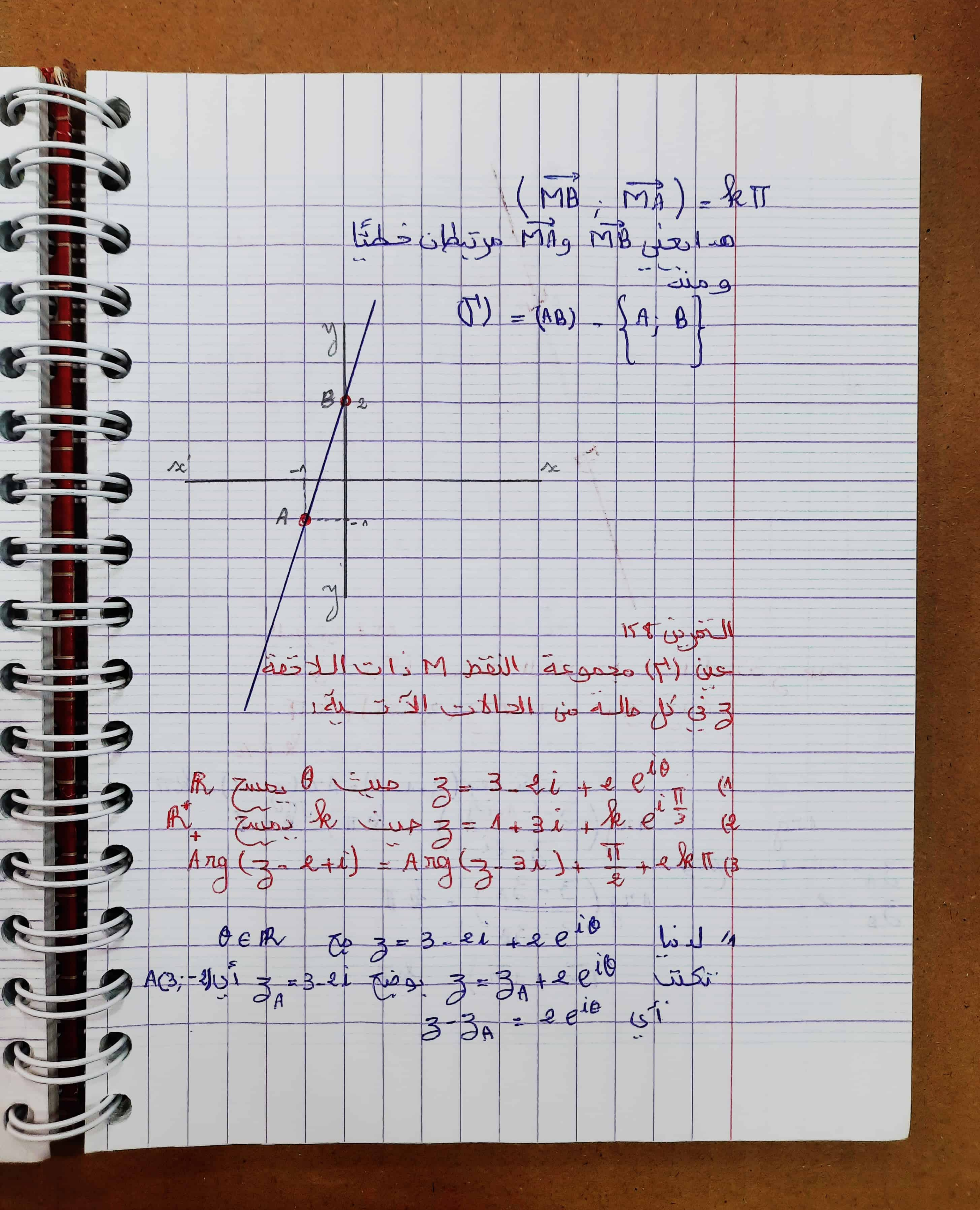
$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pi$$

يعني $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ مرتبطان خطيا في اتجاه معاكس.

ومنه: $(\Gamma) = [AB] - \{A, B\} =]AB[$



y
B
2
x'
-1
x
A
-1
y'
التمرين 157
عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث
Arg(z+1+i) = Arg(z-2i) + kπ
k ∈ ℤ
نكتب Arg(z+1+i) = Arg(z-2i) + kπ
Arg((z-(-1-i))/(z-2i)) = kπ ; k ∈ ℤ
نضع
z_A = -1-i
z_B = 2i
Arg((z-z_A)/(z-z_B)) = kπ
(BM, AM) = kπ



$(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MA}) = k\pi$

معناه $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ مرتبطان خطيًا

ومنه

$(\Gamma) = (AB) - \{A ; B\}$

التمرين ١٢٤

عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة

z في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $z = 3 - 2i + 2e^{i\theta}$ حيث θ يمسح $\mathbb{R}$

2) $z = 1 + 3i + k e^{i\frac{\pi}{3}}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}_+^*$

3) $Arg(z - 2 + i) = Arg(z - 3i) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

1) لدينا $z = 3 - 2i + 2e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$

نكتب $z = z_A + 2e^{i\theta}$ بوضع $z_A = 3 - 2i$ أي $A(3; -2)$

أي $z - z_A = 2e^{i\theta}$

ومنه $|z - z_A| = 2$ و $\theta \in \mathbb{R}$

$AM = 2$ و $\theta \in \mathbb{R}$

ومنه (Γ) دائرة مركزها $A(3; -2)$ و نصف قطرها $R = 2$

(2.P) $z = 3 - 2i + 2e^{i\theta}$

نكتب $x + iy = 3 - 2i + 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ بوضع $z = x + iy$

$x + iy = 3 - 2i + 2\cos\theta + 2i\sin\theta$

$x + iy = (3 + 2\cos\theta) + i(-2 + 2\sin\theta)$

وبالمطابقة نجد

$$\begin{cases} x = 3 + 2\cos \\ y = -2 + 2\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

نعين علاقة بين x و y مستقلة عن θ

لدينا:

$$\begin{cases} x - 3 = 2\cos\theta \\ y + 2 = 2\sin\theta \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 4\cos^2\theta \\ (y+2)^2 = 4\sin^2\theta \end{cases}$$

وبالجمع طرفا لطرف نجد

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$$

ومنه (Γ) دائرة مركزها $W(3; -2)$ و نصف قطرها $R = 2$

ملاحظة

عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث :

$$z = 3 - 2i + 2e^{i\theta}$$

$$\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

ج

حسب ماسبق M تنتمي للدائرة (C) التي مركزها $\omega(3;-2)$

ونصف قطرها $R = 2$

بما أن $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

إذن $\cos\frac{\pi}{2} \leqslant \cos\theta \leqslant \cos 0$

$$0 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$$

$$0 \leqslant 2\cos\theta \leqslant 2$$

$$0 \leqslant x - 3 \leqslant 2$$

$$3 \leqslant x \leqslant 5$$

ولدينا

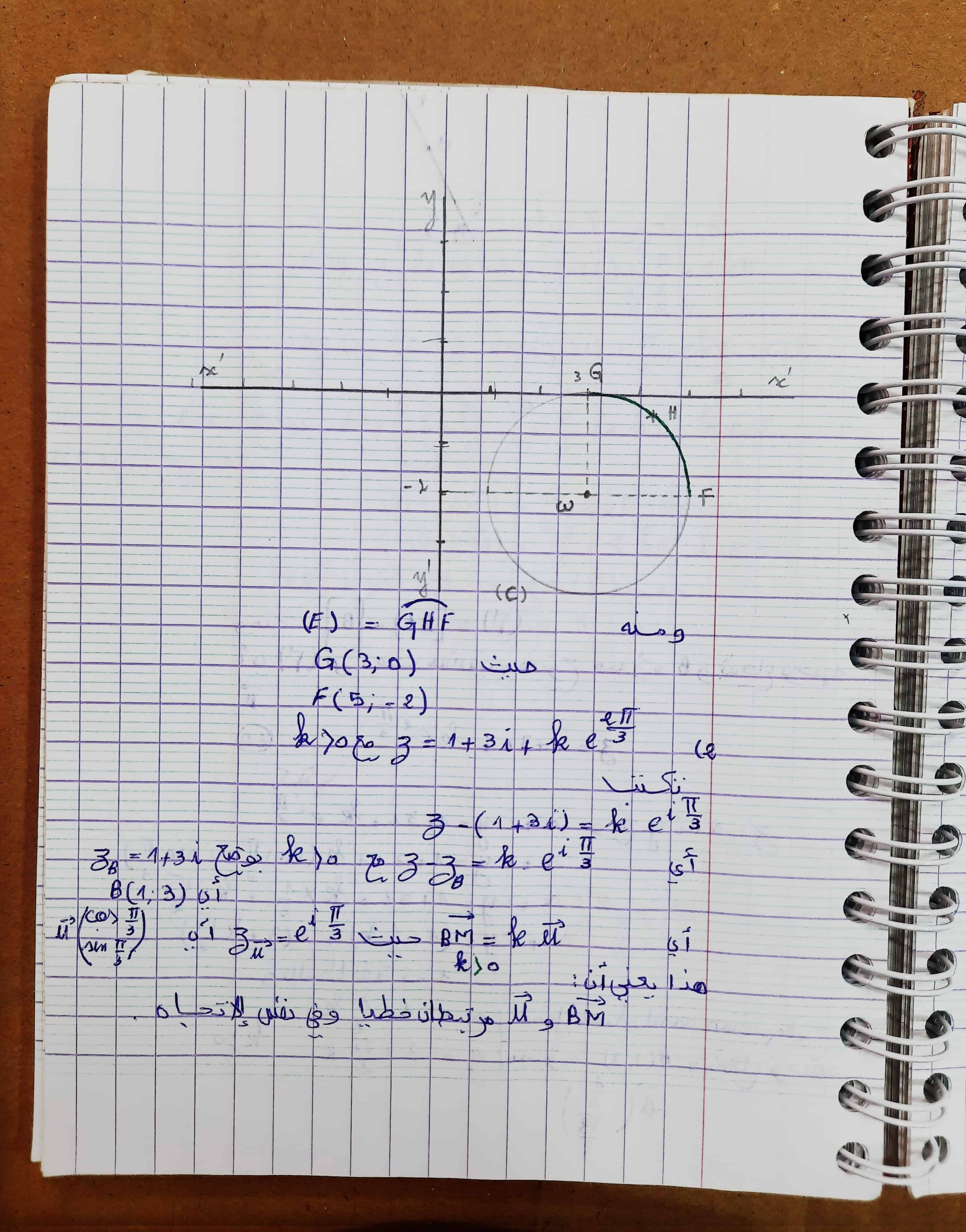
$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

إذن $0 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$

$$0 \leqslant 2\sin\theta \leqslant 2$$

$$0 \leqslant y + 2 \leqslant 2$$

$$-2 \leqslant y \leqslant 0$$



ومنه $(E) = \overset{\frown}{GHF}$

حيث $G(3;0)$

$F(5;-2)$

e) $z = 1 + 3i + k e^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k > 0$

نكتب

$z - (1+3i) = k e^{i\frac{\pi}{3}}$

أي $z - z_B = k \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k > 0$ بوضع $z_B = 1+3i$

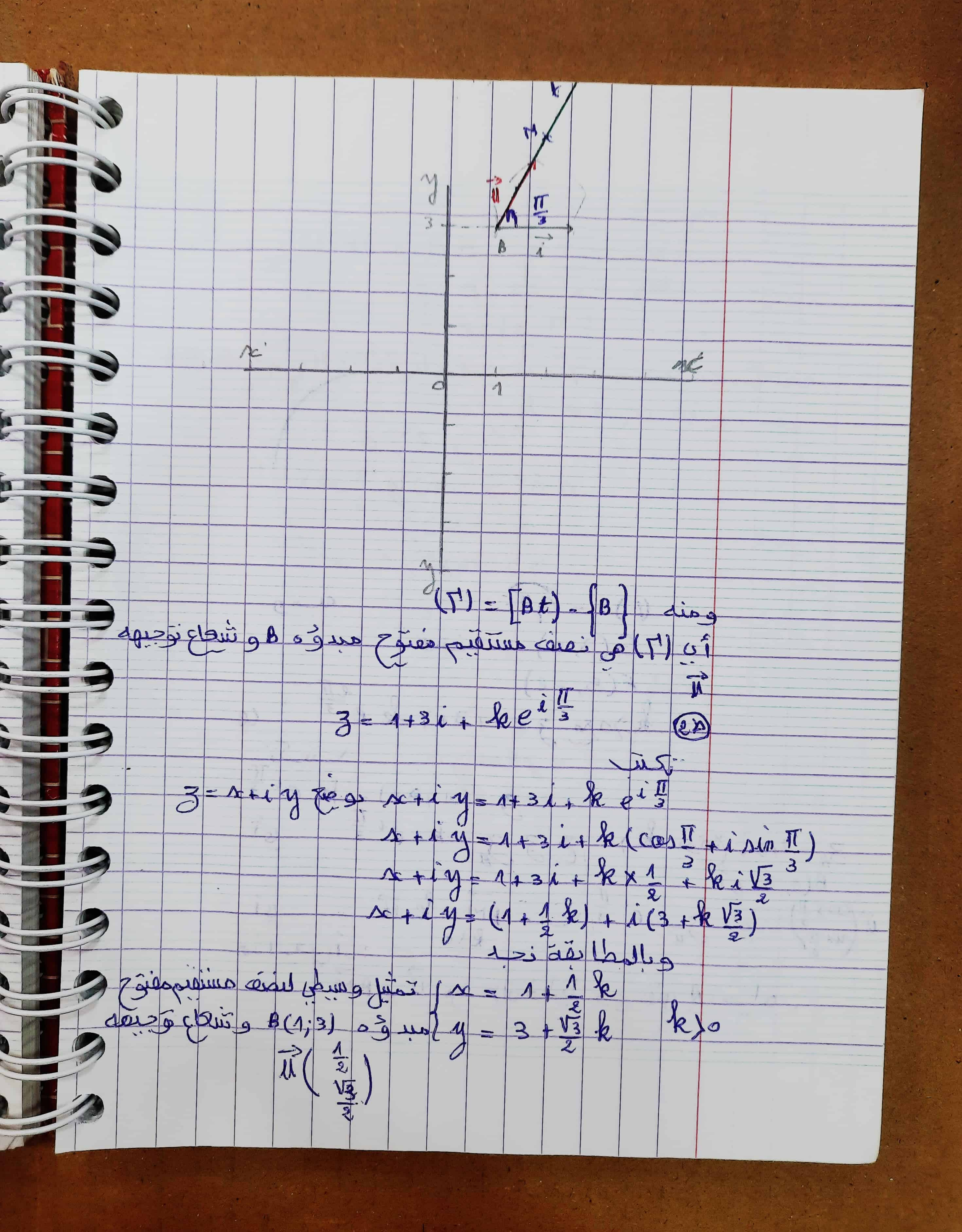
أي $B(1;3)$

أي $\overrightarrow{BM} = k\vec{u}$ حيث $z_{\vec{u}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ أي $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$

$k > 0$

هذا يعني أن:

$\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا وفي نفس الاتجاه.



ومنه $(\Gamma) = [Bt) - \{B\}$

أي (Γ) هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه B و شعاع توجيهه $\vec{u}$

(2A) $z = 1+3i + k e^{i\frac{\pi}{3}}$

نكتب

نضع $z = x+iy$

$$x+iy = 1+3i + k\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$x+iy = 1+3i + k\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x+iy = 1+3i + k\times\frac{1}{2} + k\,i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x+iy = \left(1+\frac{1}{2}k\right) + i\left(3+k\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

وبالمطابقة نجد

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}k \\ y = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}k \end{cases} \quad k>0$$

تمثيل وسيطي لنصف مستقيم مفتوح مبدؤه $B(1;3)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

3) تعيين Γ حيث:

$$Arg(z-2+i) = Arg(z-3i) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$k \in \mathbb{Z}$

تكتب: $Arg(z-(2-i)) - Arg(z-3i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

نضع $A(2;-1)$ ذات اللاحقة $z_A = 2-i$ و $B(0;3)$ ذات اللاحقة $z_B = 3i$

$$Arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$(\vec{BM};\vec{AM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$(\vec{MB};\vec{MA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

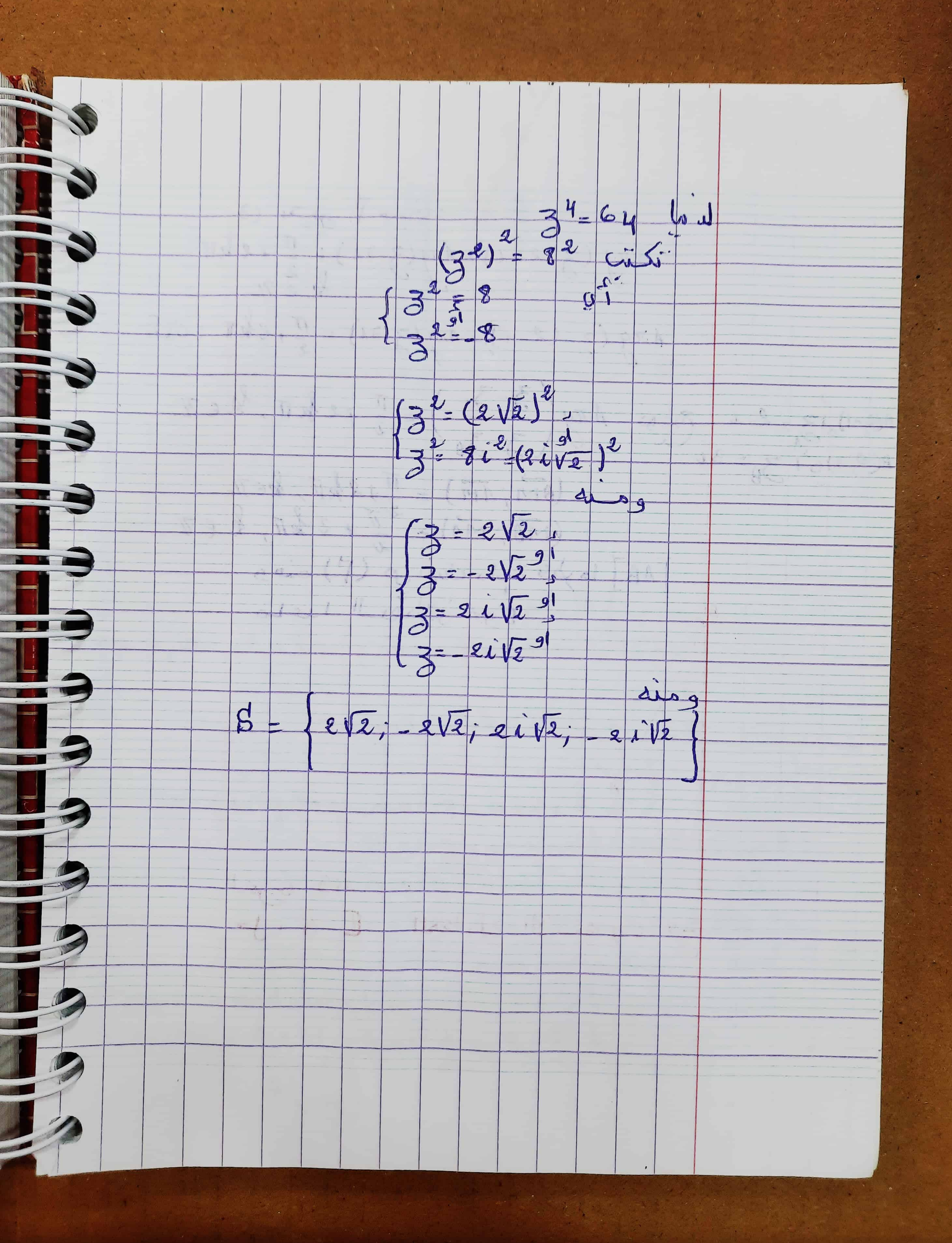
ومنه (Γ) هي نصف دائرة قطرها [AB]

ماعدا النقطتين A و B

B
3
2
-1
A

التمرين 129

حل، في $\mathbb{C}$ المعادلة الآتية $z^4 = 64$



لدينا $z^4 = 64$

تكتب $(z^2)^2 = 8^2$

أي
$$\begin{cases} z^2 = 8 \\ \text{أو} \\ z^2 = -8 \end{cases}$$

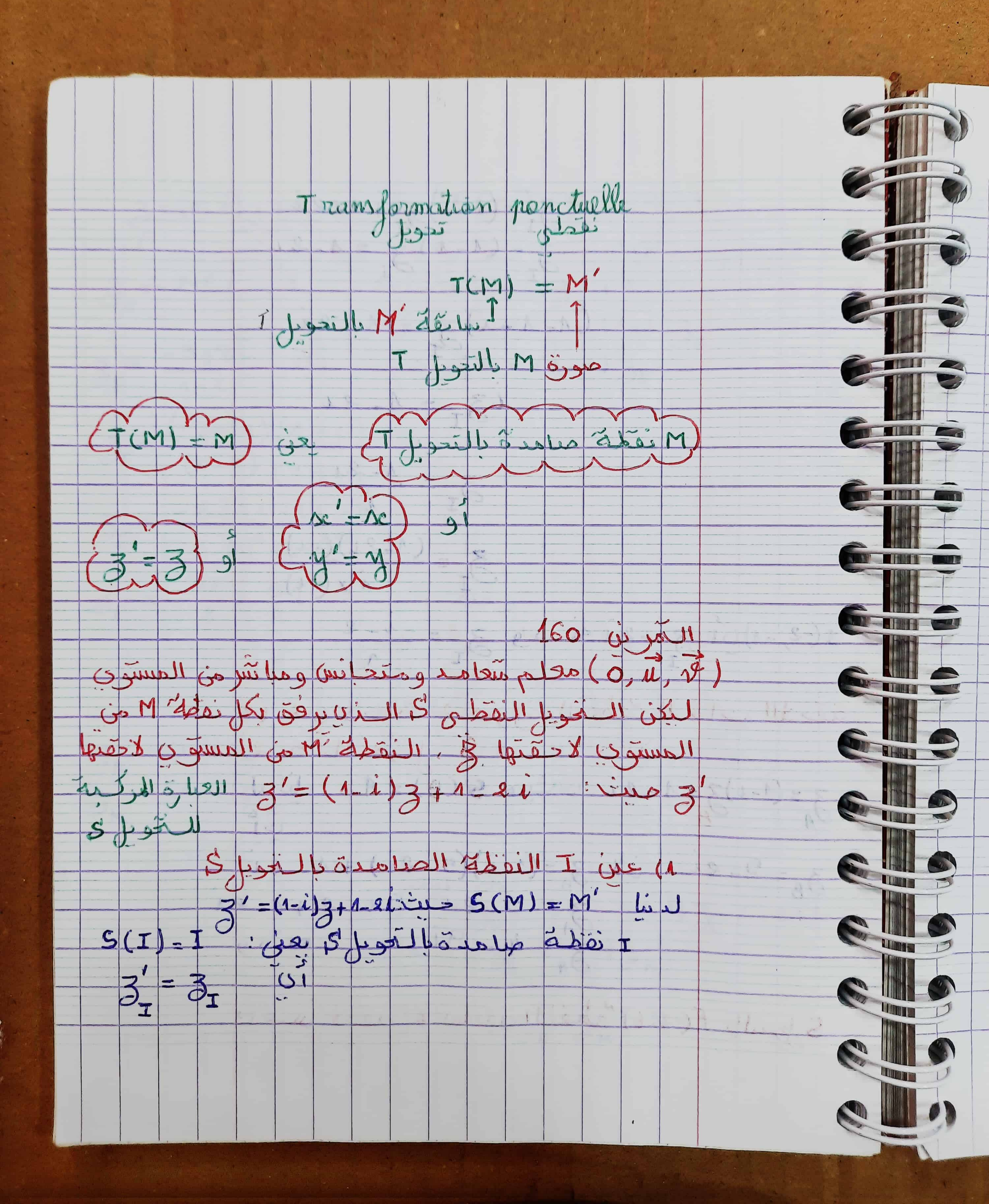
$$\begin{cases} z^2 = (2\sqrt{2})^2 \quad \text{و} \\ z^2 = 8i^2 = (2i\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} z = 2\sqrt{2} \quad \text{أو} \\ z = -2\sqrt{2} \quad \text{أو} \\ z = 2i\sqrt{2} \quad \text{أو} \\ z = -2i\sqrt{2} \end{cases}$$

ومنه

$$S = \{2\sqrt{2};\ -2\sqrt{2};\ 2i\sqrt{2};\ -2i\sqrt{2}\}$$



Transformation ponctuelle

تحويل نقطي

$T(M) = M'$

سابقة M' بالتحويل T

صورة M بالتحويل T

M نقطة صامدة بالتحويل T يعني $T(M) = M$

أو $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ أو $z' = z$

التمرين 160

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس ومباشر من المستوي

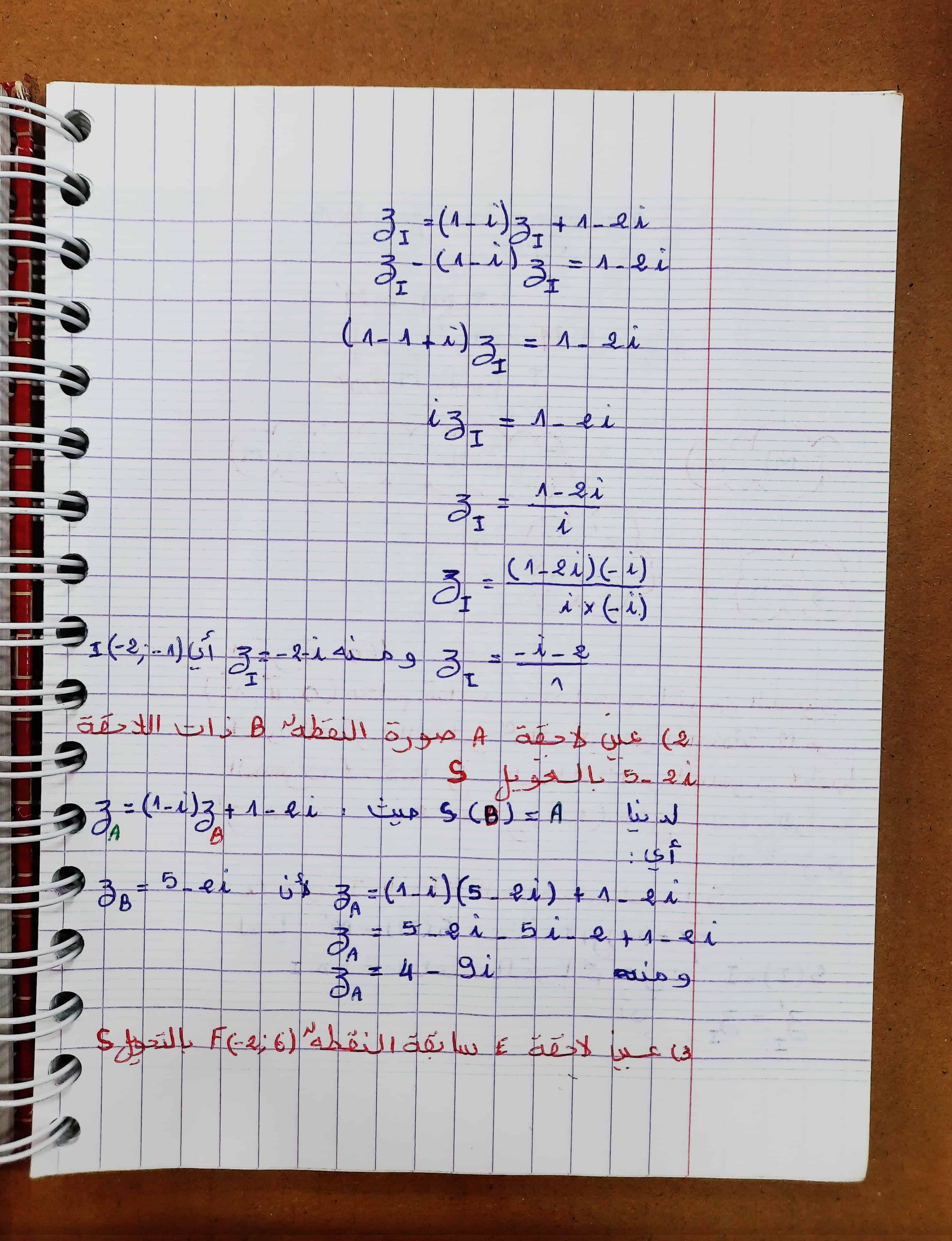
ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z، النقطة M' من المستوي لاحقتها z' حيث: $z' = (1-i)z + 1 - 2i$ العبارة المركبة للتحويل S

1) عين I النقطة الصامدة بالتحويل S

لدينا $S(M) = M'$ حيث: $z' = (1-i)z + 1 - 2i$

I نقطة صامدة بالتحويل S يعني: $S(I) = I$

أي $z'_I = z_I$



$z_I = (1-i)z_I + 1 - 2i$

$z_I - (1-i)z_I = 1 - 2i$

$(1 - 1 + i)z_I = 1 - 2i$

$iz_I = 1 - 2i$

$z_I = \frac{1-2i}{i}$

$z_I = \frac{(1-2i)(-i)}{i \times (-i)}$

$z_I = \frac{-i-2}{1}$ ومنه $z_I = -2-i$ أي $I(-2;-1)$

2) عين لاحقة A صورة النقطة B ذات اللاحقة $5-2i$ بالتحويل S

لدينا $S(B) = A$ حيث $z_A = (1-i)z_B + 1 - 2i$

أي:

$z_A = (1-i)(5-2i) + 1 - 2i$ أي $z_B = 5-2i$

$z_A = 5 - 2i - 5i - 2 + 1 - 2i$

ومنه $z_A = 4 - 9i$

3) عين لاحقة E سابقة النقطة $F(-2;6)$ بالتحويل S

لدينا: $S(E) = F$ حيث $z_F = (1-i)z_E + 1 - 2i$

أي:

$-2+6i = (1-i)z_E + 1 - 2i$ لأن $z_F = -2+6i$

$-2+6i - 1 + 2i = (1-i)z_E$

$-3+8i = (1-i)z_E$ أي $z_E = \frac{-3+8i}{1-i}$

$$z_E = \frac{(-3+8i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$z_E = \frac{-3-3i+8i-8}{(1)^2+(-1)^2}$$

ومنه $z_E = -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}i$

4) K و H نقطتان من المستوي

و K' و H' صورتاهما بالتحويل S

أثبت أن: $K'H' = \sqrt{2}\,KH$

لدينا $S(H) = H'$ حيث: $z_{H'} = (1-i)z_H + 1 - 2i$

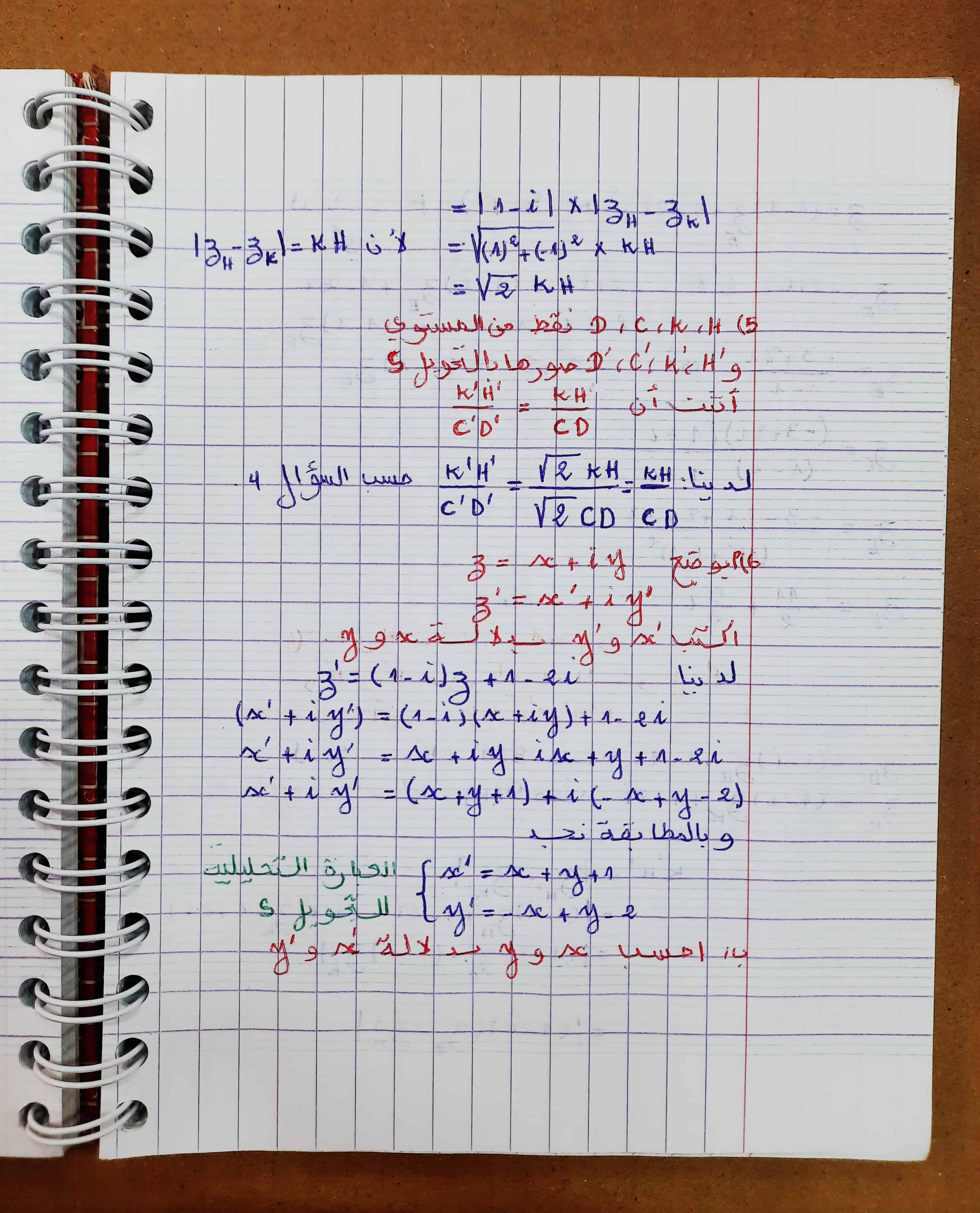
$S(K) = K'$ حيث: $z_{K'} = (1-i)z_K + 1 - 2i$

$$K'H' = |z_{H'} - z_{K'}|$$

$$= |(1-i)z_H + 1 - 2i - (1-i)z_K - 1 + 2i|$$

$$= |(1-i)z_H - (1-i)z_K|$$

$$= |(1-i)(z_H - z_K)|$$



$$= |1-i| \times |z_H - z_K|$$

$|z_H - z_K| = KH$ لأن

$$= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} \times KH$$

$$= \sqrt{2}\, KH$$

5) H، K، C، D نقط من المستوى

و H'، K'، C'، D' صورها بالتحويل S

أثبت أن $\dfrac{K'H'}{C'D'} = \dfrac{KH}{CD}$

لدينا: $\dfrac{KH}{CD} = \dfrac{\sqrt{2}\, KH}{\sqrt{2}\, CD} = \dfrac{K'H'}{C'D'}$ حسب السؤال 4.

6) نضع $z = x + iy$

$z' = x' + iy'$

اكتب x' و y' بدلالة x و y

لدينا $z' = (1-i)z + 1 - 2i$

$$(x' + iy') = (1-i)(x+iy) + 1 - 2i$$

$$x' + iy' = x + iy - ix + y + 1 - 2i$$

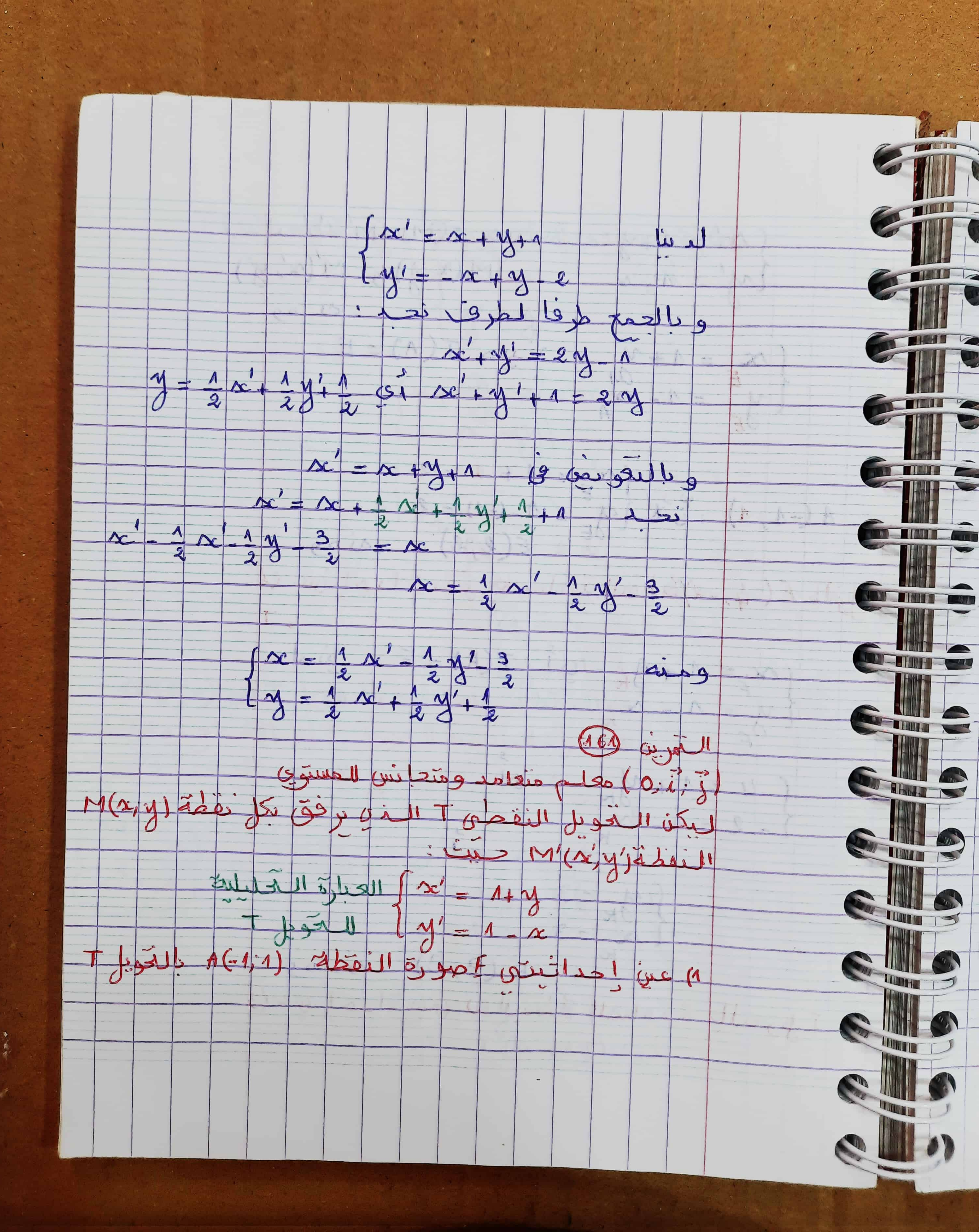
$$x' + iy' = (x + y + 1) + i(-x + y - 2)$$

وبالمطابقة نجد

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y - 2 \end{cases}$$

العبارة التحليلية للتحويل S

ب) احسب x و y بدلالة x' و y'



لدينا
$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y - 2 \end{cases}$$

وبالجمع طرفا لطرف نجد:

$$x' + y' = 2y - 1$$

أي $x' + y' + 1 = 2y$ و $y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}$

وبالتعويض في $x' = x + y + 1$

نجد $x' = x + \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2} + 1$

$$x' - \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2} = x$$

$$x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}$$

ومنه
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2} \end{cases}$$

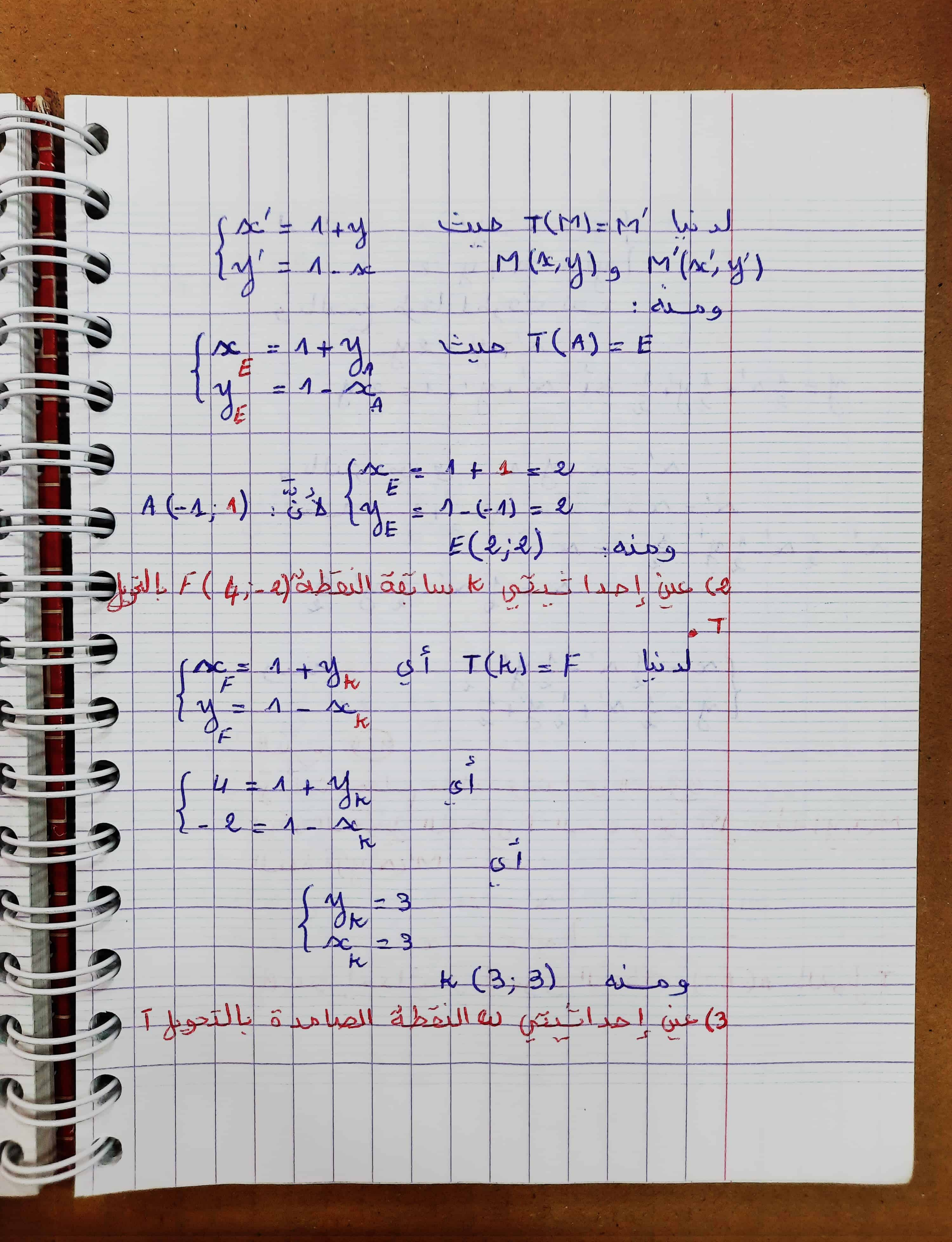
التمرين 161

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي

ليكن التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة $M(x,y)$ النقطة $M'(x',y')$ حيث:

$$\begin{cases} x' = 1 + y \\ y' = 1 - x \end{cases}$$
العبارة التحليلية للتحويل T

1) عين إحداثيتي صورة النقطة $A(-1;1)$ بالتحويل T



لدينا $T(M)=M'$ حيث

$$\begin{cases} x' = 1+y \\ y' = 1-x \end{cases}$$

$M(x,y)$ و $M'(x',y')$

ومنه:

$T(A)=E$ حيث

$$\begin{cases} x_E = 1+y_A \\ y_E = 1-x_A \end{cases}$$

لدينا: $A(-1;1)$

$$\begin{cases} x_E = 1+1 = 2 \\ y_E = 1-(-1) = 2 \end{cases}$$

ومنه: $E(2;2)$

2) عين إحداثيتي K سابقة النقطة $F(4;-2)$ بالتحويل T.

لدينا $T(K)=F$ أي

$$\begin{cases} x_F = 1+y_K \\ y_F = 1-x_K \end{cases}$$

أي

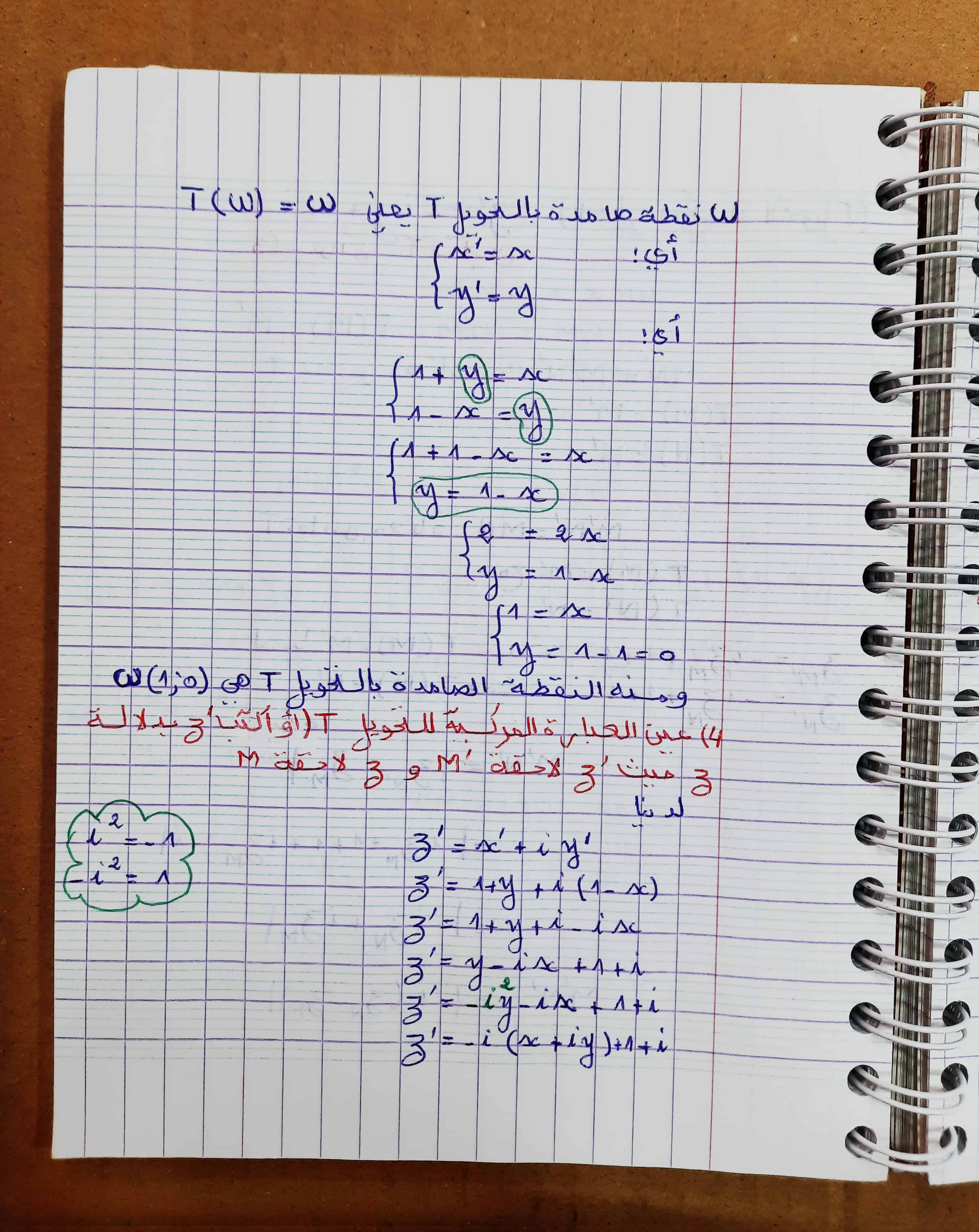
$$\begin{cases} 4 = 1+y_K \\ -2 = 1-x_K \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} y_K = 3 \\ x_K = 3 \end{cases}$$

ومنه $K(3;3)$

3) عين إحداثيتي النقطة الصامدة بالتحويل T



ω نقطة صامدة بالتحويل T يعني $T(\omega) = \omega$

أي: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

أي:

$\begin{cases} 1 + y = x \\ 1 - x = y \end{cases}$

$\begin{cases} 1 + 1 - x = x \\ y = 1 - x \end{cases}$

$\begin{cases} 2 = 2x \\ y = 1 - x \end{cases}$

$\begin{cases} 1 = x \\ y = 1 - 1 = 0 \end{cases}$

ومنه النقطة الصامدة بالتحويل T هي $\omega(1;0)$

4) عين العبارة المركبة للتحويل T (أو أكتب z' بدلالة z حيث z' لاحقة M' و z لاحقة M

لدينا

$i^2 = -1$

$-i^2 = 1$

$z' = x' + iy'$

$z' = 1 + y + i(1 - x)$

$z' = 1 + y + i - ix$

$z' = y - ix + 1 + i$

$z' = -i^2 y - ix + 1 + i$

$z' = -i(x + iy) + 1 + i$

$z' = -iz + 1 + i$ (العبارة المركبة للتحويل T)

5) بين أن T تقايس.

$T(M) = M'$

T تقايس معناه $MN = M'N'$

حيث $T(M) = M'$

$T(N) = N'$

T تقايس معناه $M'N' = MN$

مع $T(M) = M'$

$T(N) = N'$

لدينا $T(M) = M'$ حيث $z_{M'} = -iz_M + 1 + i$

$T(N) = N'$ حيث $z_{N'} = -iz_N + 1 + i$

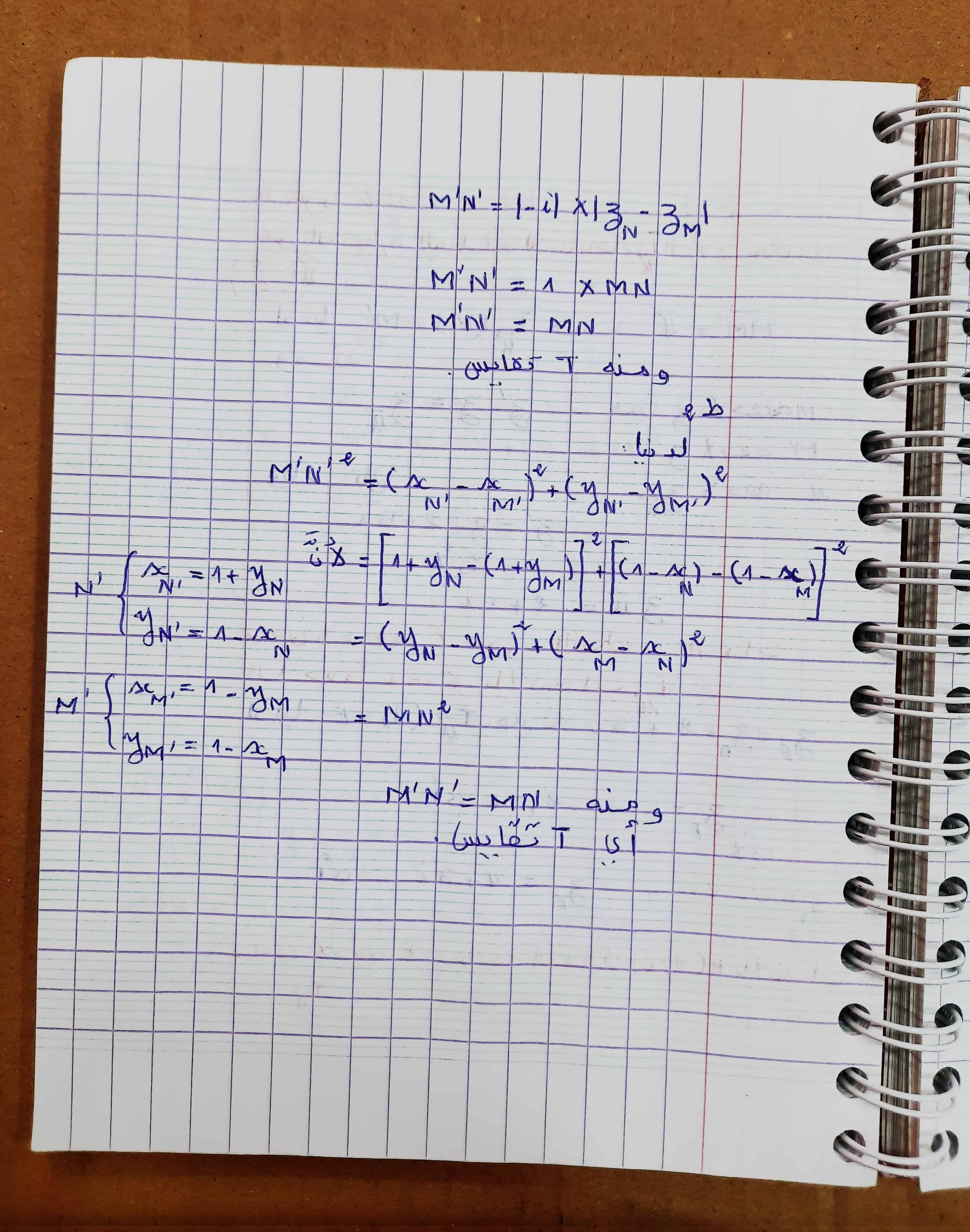
ومنه

$$M'N' = |z_{N'} - z_{M'}|$$

$$= |-iz_N + 1 + i + iz_M - 1 - i|$$

$$= |-iz_N + iz_M|$$

$$M'N' = |-i(z_N - z_M)|$$



$$M'N' = |-i| \times |z_N - z_M|$$

$$M'N' = 1 \times MN$$

$$M'N' = MN$$

ومنه T تقايس.

ط2

لدينا:

$$M'N'^2 = (x_{N'} - x_{M'})^2 + (y_{N'} - y_{M'})^2$$

[illegible] $= \left[1 + y_N - (1 + y_M)\right]^2 + \left[(1 - x_N) - (1 - x_M)\right]^2$

$N' \begin{cases} x_{N'} = 1 + y_N \\ y_{N'} = 1 - x_N \end{cases}$

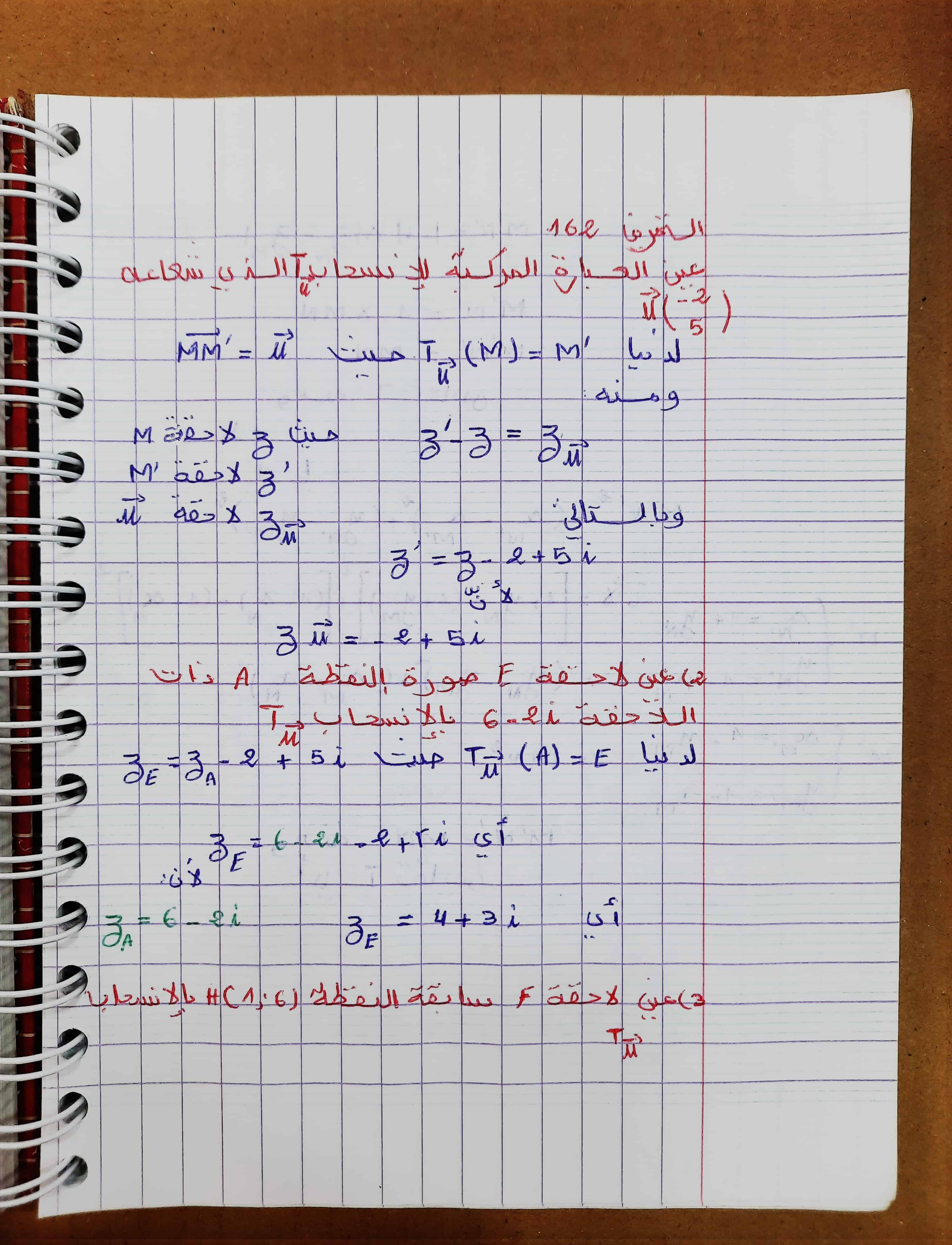
$$= (y_N - y_M)^2 + (x_M - x_N)^2$$

$M' \begin{cases} x_{M'} = 1 - y_M \\ y_{M'} = 1 - x_M \end{cases}$

$$= MN^2$$

ومنه $M'N' = MN$

أي T تقايس.



التمرين 162

عين العبارة المركبة للإنسحاب $T_{\vec{u}}$ الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

لدينا $T_{\vec{u}}(M) = M'$ حيث $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

ومنه:

$z' - z = z_{\vec{u}}$ حيث z لاحقة M

z' لاحقة M'

$z_{\vec{u}}$ لاحقة $\vec{u}$

وبالتالي:

$$z' = z - 2 + 5i$$

لأن

$$z_{\vec{u}} = -2 + 5i$$

2) عين لاحقة E صورة النقطة A ذات اللاحقة $6-2i$ بالانسحاب $T_{\vec{u}}$

لدينا $T_{\vec{u}}(A) = E$ حيث $z_E = z_A - 2 + 5i$

أي $z_E = 6 - 2i - 2 + 5i$

لأن: $z_A = 6 - 2i$

أي $z_E = 4 + 3i$

3) عين لاحقة F سابقة النقطة $H(1;6)$ بالانسحاب $T_{\vec{u}}$

لدينا $T_{\vec{u}}(F) = H$

$$z_H = z_F - 2 + 5i$$

$z_H = 1+6i$ لأن $1+6i = z_F - 2 + 5i$

ومنه $z_F = 3 + i$

(2) عين العبارة التحليلية لـ : $T_{\vec{u}}$

ط1) نكتب : $z' = z - 2 + 5i$

$x' + iy' = x + iy - 2 + 5i$ لأن $M(x, y)$ و $M'(x'; y')$

$$x' + iy' = (x-2) + i(y+5)$$

وبالمطابقة نجد

$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 5 \end{cases}$ العبارة التحليلية لـ $T_{\vec{u}}$

ط2)

$\vec{MM'} = \vec{u}$ يعني $T_{\vec{u}}(M) = M'$

أي $\begin{cases} x' - x = -2 \\ y' - y = 5 \end{cases}$ لأن $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ و $\vec{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$

ومنه $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 5 \end{cases}$ العبارة التحليلية لـ $T_{\vec{u}}$

5) (C) دائرة معادلتها $(x-4)^2+(y+1)^2=9$

عين معادلة (C') صورة (C) بالانسحاب $T_{\vec{u}}$

$T_{\vec{u}}((C))=(C')$

صورة (C) ذات المركز ω ونصف القطر R بانسحاب شعاعه $\vec{u}$ هي دائرة (C') مركزها ω' حيث $T_{\vec{u}}(\omega)=\omega'$ ونصف قطرها $R'=R$

ط 1:

$$\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y+5 \end{cases}$$ إذن $$\begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'-5 \end{cases}$$

بما أن:

$M\in(C)$ إذن $(x'+2-4)^2+(y'-5+1)^2=9$

ومنه معادلة (C') هي

$$(x'-2)^2+(y'-4)^2=9$$

أي $M'\in(C')$

حيث (C') دائرة مركزها $I(2;4)$ ونصف قطرها $R'=3$

طع

بما أن (C) دائرة مركزها $\omega(4,-1)$ ونصف قطرها $R=3$ إذن (C') صورة (C) بـ $T_{\vec{u}}$ هي دائرة مركزها ω' حيث $T_{\vec{u}}(\omega)=\omega'$ ونصف قطرها $R'=R=3.$

ولدينا:

$T_{\vec{u}}(\omega)=\omega'$ أي $\begin{cases} x_{\omega'} = x_{\omega} - 2 = 4-2 = 2 \\ y_{\omega'} = y_{\omega} + 5 = -1+5 = 4 \end{cases}$ أي $\omega'(2;4)$

ومنه معادلة (C') هي

$$(x-2)^2+(y-4)^2 = 3^2 = 9.$$

التحاكي:

Homothétie

H

h

$H_{(\omega,k)}(M)=M'$ حيث $\overrightarrow{\omega M'} = k\overrightarrow{\omega M}$

$k\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ $k\neq 0$

$k\neq 1$

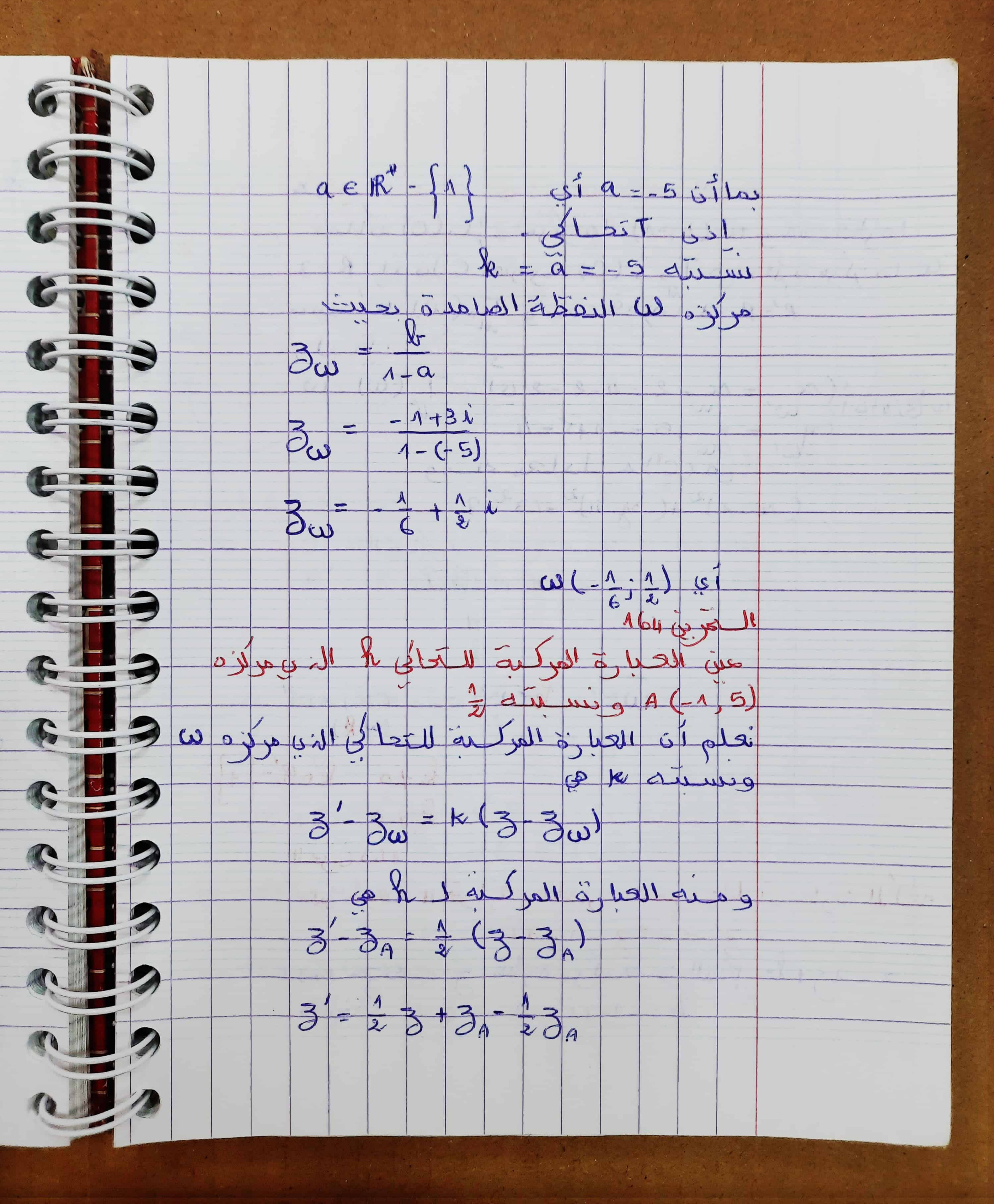
التمرين 163

عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة علما أن عبارته المركبة:

$$z'=-5z-1+3i$$

$z'=-5z-1+3i$ عبارة مركبة من الشكل $z'=az+b$

حيث: $a=-5$ ، $b=-1+3i$



بما أن $a = -5$ أي $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

إذن T تحاكي

نسبته $k = a = -5$

مركزه ω النقطة الصامدة بحيث

$$z_\omega = \frac{b}{1-a}$$

$$z_\omega = \frac{-1+3i}{1-(-5)}$$

$$z_\omega = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} i$$

أي $\omega\left(-\frac{1}{6} ; \frac{1}{2}\right)$

التمرين 164

عين العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه $A(-1,5)$ ونسبته $\frac{1}{2}$

نعلم أن العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه ω ونسبته k هي

$$z' - z_\omega = k(z - z_\omega)$$

ومنه العبارة المركبة لـ h هي

$$z' - z_A = \frac{1}{2}(z - z_A)$$

$$z' = \frac{1}{2} z + z_A - \frac{1}{2} z_A$$

ومنه $z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z_A$

$z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}(-1+5i)$ لأن $z_A = -1+5i$

التمرين رقم 18

A, B, C نقاط من المستوي.

T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' بحيث:

1) $\vec{MM'} = 4\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}$

2) $\vec{MM'} = 4\vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC}$

عين طبيعة التحويل T في كل حالة من الحالتين السابقتين مع ذكر عناصره المميزة.

1) لدينا

$\vec{MM'} = 4\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}$

نكتب:

$z' - z = 4(z_A - z) - (z_B - z) + 2(z_C - z)$

$z' = z + 4z_A - 4z - z_B + z + 2z_C - 2z$

$z' = -4z + 4z_A - z_B + 2z_C$

من الشكل $z' = az + b$ حيث $\begin{cases} a = -4 \\ b = 4z_A - z_B + 2z_C \end{cases}$

بما أن $-4 \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ إذن T تحاكي نسبته $k = a = -4$

ومركزه ω النقطة الصامدة حيث

$$z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{4z_A - z_B + 2z_C}{5}$$

2)

بما أن $4 - 1 + 2 = 5 \neq 0$ إذن G

مرجح الجملة $\{(A;4);(B;-1);(C;2)\}$

موجود ووحيد ويحقق

$$4\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = (4-1+2)\vec{MG}$$
$$= 5\vec{MG}$$

ومنه نكتب $\vec{MM'} = 4\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}$

$$\vec{MM'} = 5\vec{MG}$$

علاقة شال : $\vec{MG} + \vec{GM'} = 5\vec{MG}$

$$\vec{GM'} = 4\vec{MG}$$

ومنه $\vec{GM'} = -4\vec{GM}$ T تحاكي مركزه G

ونسبته $k = -4$

3) $\vec{MM'} = 4\vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC}$ (*)

بما أن $4 - 3 - 1 = 0$ إذن $4\vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC}$

شعاع ثابت (مستقل عن النقطة M)

إذن

حسب علاقة شال : $4\vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC} = 4\vec{MA} - 3(\vec{MA} + \vec{AB}) - (\vec{MA} + \vec{AC})$

$$= -3\vec{AB} - \vec{AC}$$

ومنه (*) نكتب $\overrightarrow{MM'} = -3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

ومنه T انسحاب شعاعه $-3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

التمرين 166

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $O;\vec{u},\vec{v}$

A، B، C، D لواحقها على الترتيب:

$z_A = 1 + i$

$z_B = -5 + 2i$

$z_C = 1 + 5i$

$z_D = -11 + 7i$

عين العبارة المركبة والعناصر المميزة للتحاكي h

الذي يحول A إلى C و B إلى D

لدينا $h(A) = C$

$h(B) = D$

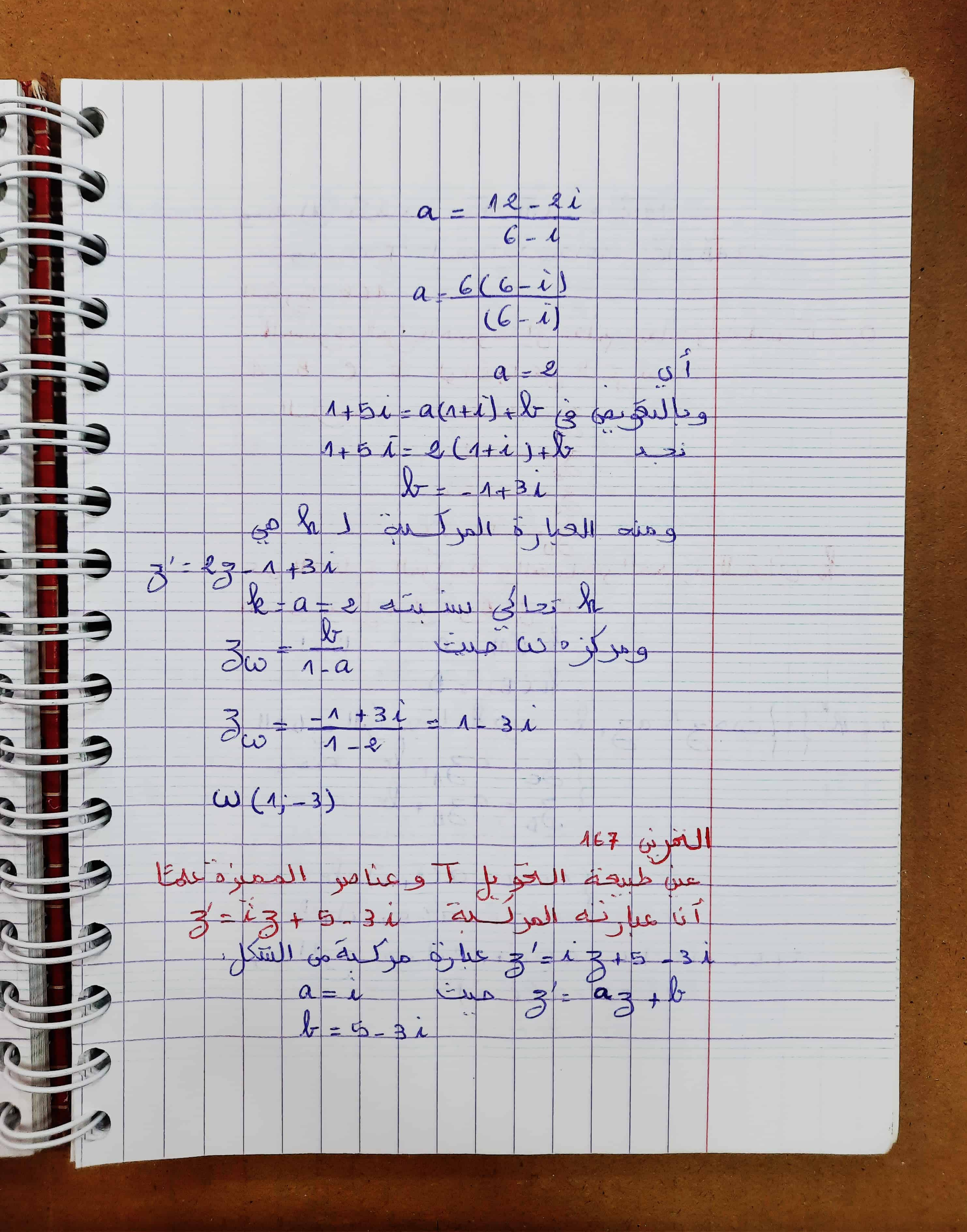
العبارة المركبة لـ h هي: $z' = az + b$ حيث $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

ومنه $\begin{cases} z_C = a z_A + b \\ z_D = a z_B + b \end{cases}$

$\begin{cases} 1 + 5i = a(1+i) + b \\ -11 + 7i = a(-5+2i) + b \end{cases}$

وبالطرح نجد $1 + 5i + 11 - 7i = a(1 + i + 5 - 2i)$

$12 - 2i = a(6 - i)$



$$a = \frac{12 - 2i}{6 - i}$$

$$a = \frac{6(6 - i)}{(6 - i)}$$

أي $a = 2$

وبالتعويض في $1 + 5i = a(1 + i) + b$

نجد $1 + 5i = 2(1 + i) + b$

$$b = -1 + 3i$$

ومنه العبارة المركبة لـ h هي

$$z' = 2z - 1 + 3i$$

h تحاكي نسبته $k = a = 2$

ومركزه ω حيث $z_\omega = \frac{b}{1 - a}$

$$z_\omega = \frac{-1 + 3i}{1 - 2} = 1 - 3i$$

$$\omega(1; -3)$$

التمرين 167

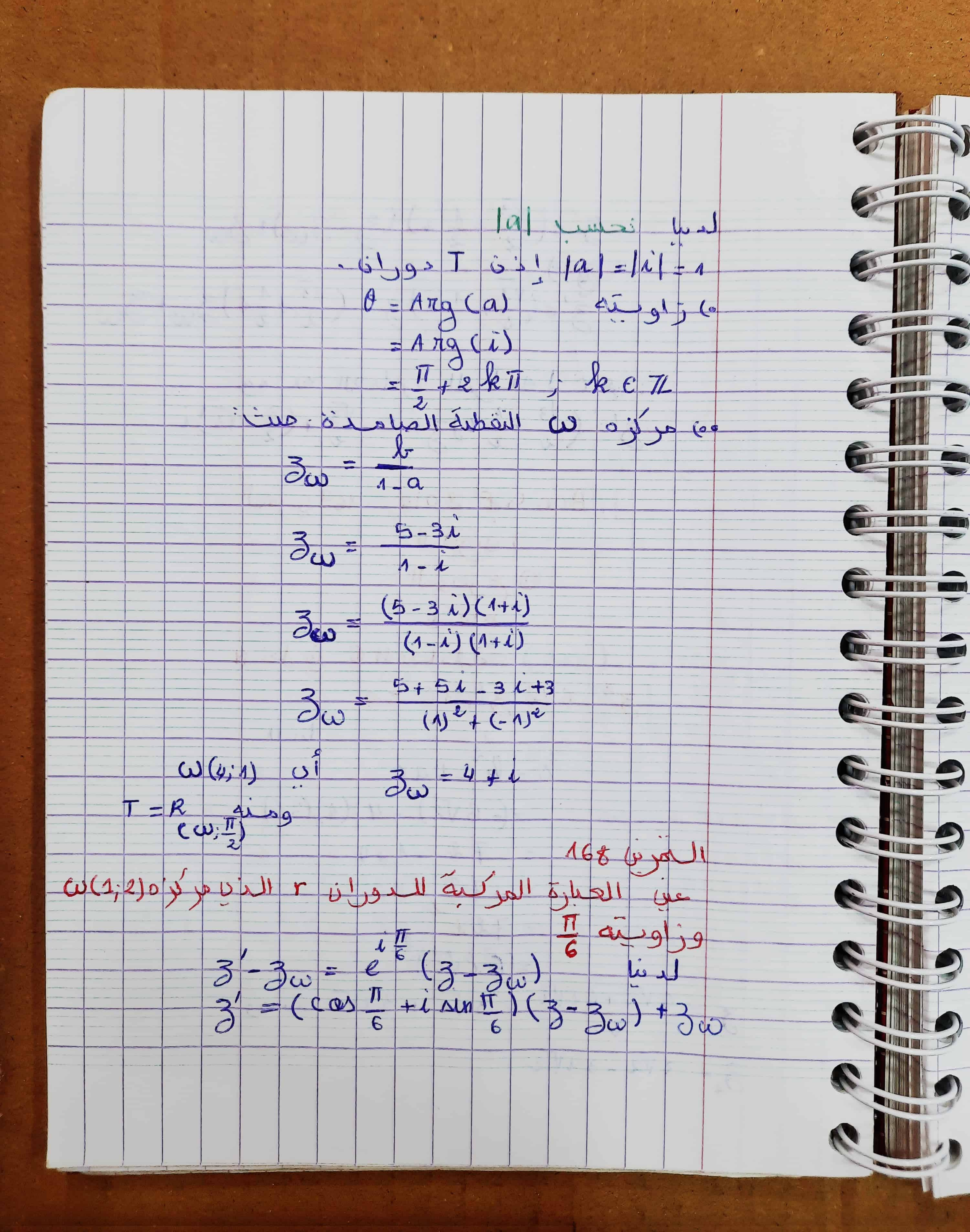
عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة علماً

أن عبارته المركبة $z' = iz + 5 - 3i$

$z' = iz + 5 - 3i$ عبارة مركبة من الشكل:

$z' = az + b$ حيث $a = i$

$b = 5 - 3i$



لدينا نحسب $|a|$

$|a| = |i| = 1$ إذن T دوران.

• زاويته $\theta = Arg(a)$

$= Arg(i)$

$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

•• مركزه ω النقطة الصامدة: حيث:

$$z_\omega = \frac{b}{1-a}$$

$$z_\omega = \frac{5-3i}{1-i}$$

$$z_\omega = \frac{(5-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$z_\omega = \frac{5+5i-3i+3}{(1)^2+(-1)^2}$$

$z_\omega = 4+i$ أي $\omega(4;1)$

ومنه $T = R_{(\omega;\frac{\pi}{2})}$

التمرين 168

عين العبارة المركبة للدوران r الذي مركزه $\omega(1;2)$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$

لدينا

$$z' - z_\omega = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - z_\omega)$$

$$z' = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)(z - z_\omega) + z_\omega$$

$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z - z_\omega) + z_\omega$$

$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_\omega + z_\omega$$

ومنه العبارة المركبة لـ r هي :

$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)i$$

التمرين 169 Bac S.F 2014

التمرين 3

الموضوع ①

5 نقاط

1) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2 - 6\sqrt{2}\,z + 36 = 0$$

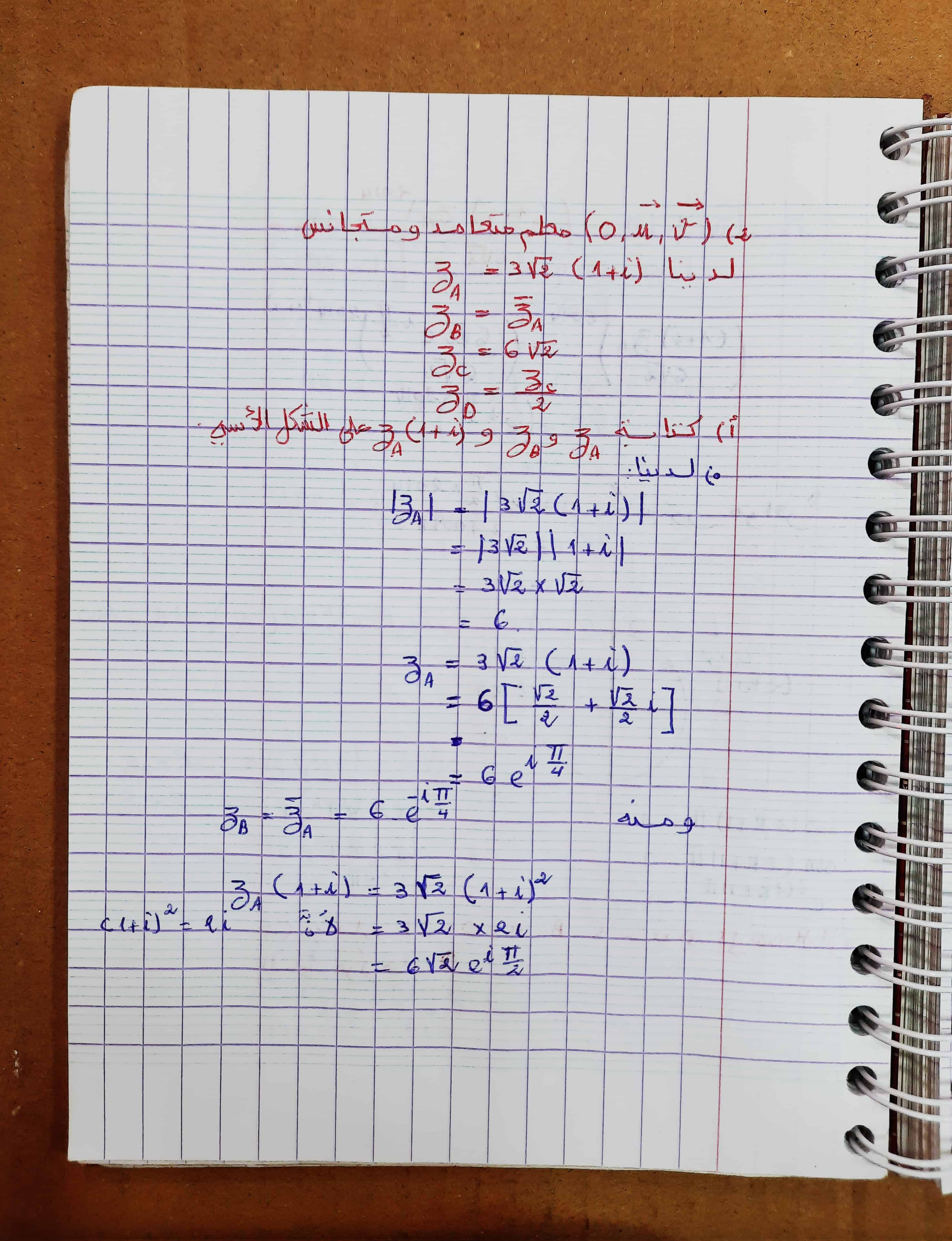
لدينا

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= (-6\sqrt{2})^2 - 4(1)(36) \\
&= 72 - 144 \\
&= -72 \\
&= 72i^2 \\
&= (6i\sqrt{2})^2
\end{aligned}$$

ومنه :

$$z_1 = \frac{6\sqrt{2} + 6i\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$$



2) $(O, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس

لدينا $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$

$z_B = \overline{z_A}$

$z_C = 6\sqrt{2}$

$z_D = \frac{z_C}{2}$

أ) كتابة z_A و z_B و $z_A(1+i)$ على الشكل الأسي:

من لدينا:

$$|z_A| = |3\sqrt{2}(1+i)| = |3\sqrt{2}|\,|1+i| = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6$$

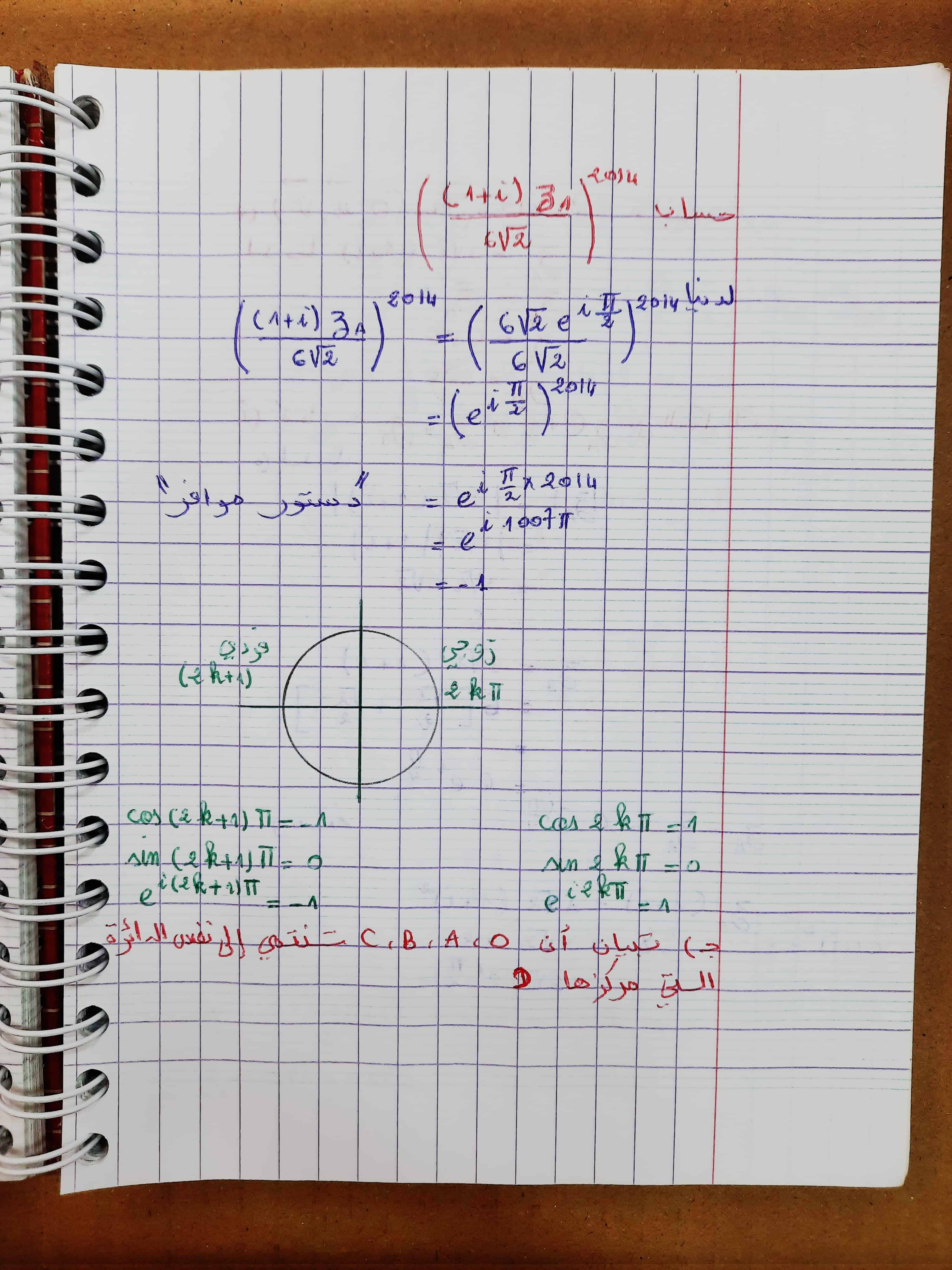
$$z_A = 3\sqrt{2}(1+i) = 6\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right] = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ومنه $z_B = \overline{z_A} = 6e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$z_A(1+i) = 3\sqrt{2}(1+i)^2$$

$(1+i)^2 = 2i$

$$= 3\sqrt{2} \times 2i = 6\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$$



حساب $\left(\frac{(1+i)z_1}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

لدينا

$$\left(\frac{(1+i)z_1}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = \left(\frac{6\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$$

$$= \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2014}$$

"دستور موافر"

$$= e^{i\frac{\pi}{2}\times 2014}$$

$$= e^{i\,1007\pi}$$

$$= -1$$

$\cos(2k+1)\pi = -1$

$\sin(2k+1)\pi = 0$

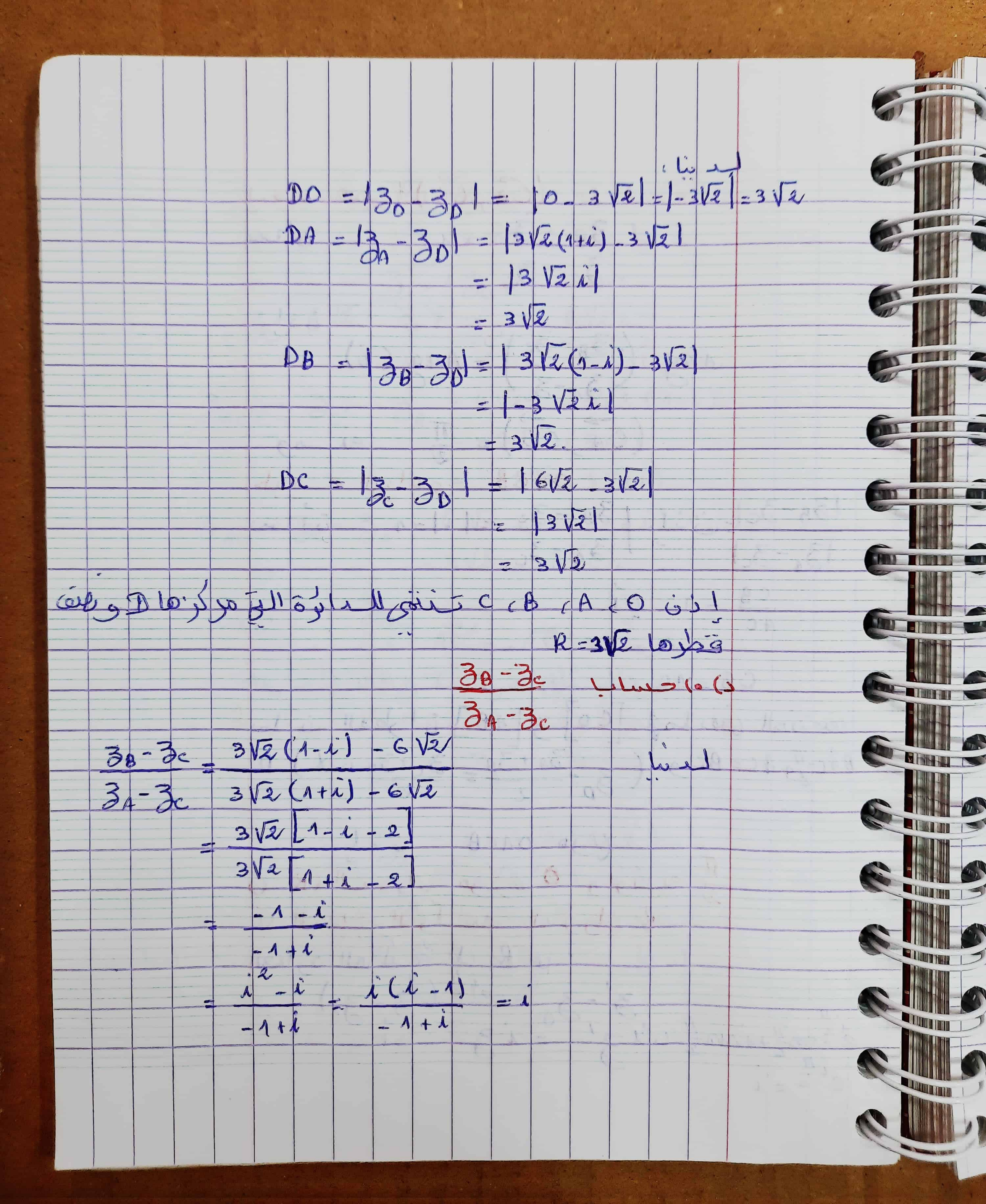
$e^{i(2k+1)\pi} = -1$

$\cos 2k\pi = 1$

$\sin 2k\pi = 0$

$e^{i2k\pi} = 1$

جـ) تبيان أن O ، A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D



لدينا:

$DO = |z_O - z_D| = |0 - 3\sqrt{2}| = |-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$

$DA = |z_A - z_D| = |3\sqrt{2}(1+i) - 3\sqrt{2}|$

$= |3\sqrt{2}\, i|$

$= 3\sqrt{2}$

$DB = |z_B - z_D| = |3\sqrt{2}(1-i) - 3\sqrt{2}|$

$= |-3\sqrt{2}\, i|$

$= 3\sqrt{2}.$

$DC = |z_C - z_D| = |6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}|$

$= |3\sqrt{2}|$

$= 3\sqrt{2}$

إذن O، A، B، C تنتمي للدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $R = 3\sqrt{2}$

د) 1) حساب $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

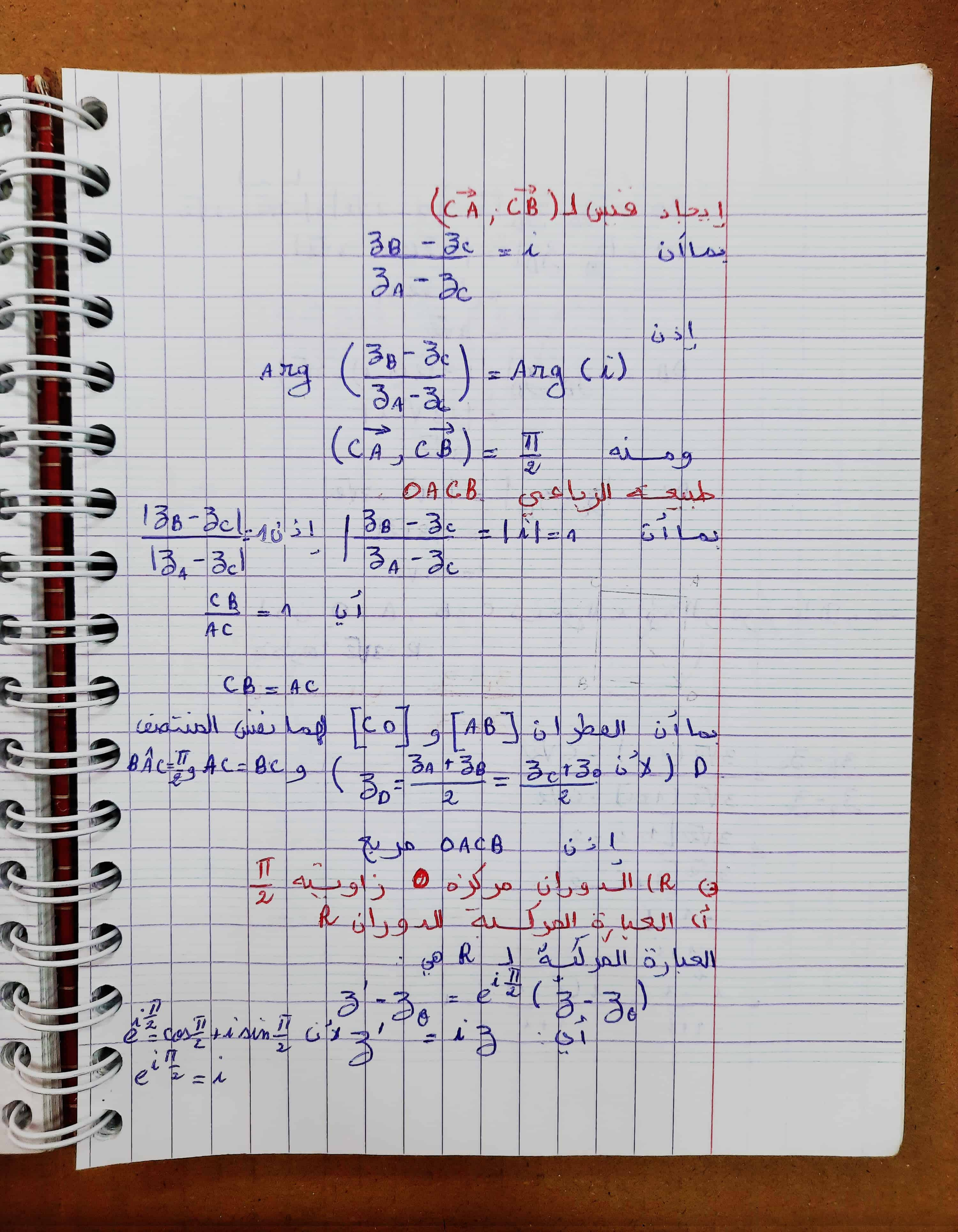
لدينا

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{3\sqrt{2}(1-i) - 6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1+i) - 6\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}[1 - i - 2]}{3\sqrt{2}[1 + i - 2]}$$

$$= \frac{-1 - i}{-1 + i}$$

$$= \frac{i^2 - i}{-1 + i} = \frac{i(i - 1)}{-1 + i} = i$$



إيجاد قيس لـ $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

بما أن $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i$

إذن

$$Arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = Arg(i)$$

ومنه $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$

طبيعة الرباعي OACB

بما أن $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = |i| = 1$ إذن $\frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = 1$

أي $\frac{CB}{AC} = 1$

$CB = AC$

بما أن القطران $[AB]$ و $[CO]$ لهما نفس المنتصف D (لأن $z_D = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_C + z_O}{2}$) و $AC = BC$ و $B\hat{A}C = \frac{\pi}{2}$

إذن OACB مربع

ج) R الدوران مركزه O زاويته $\frac{\pi}{2}$

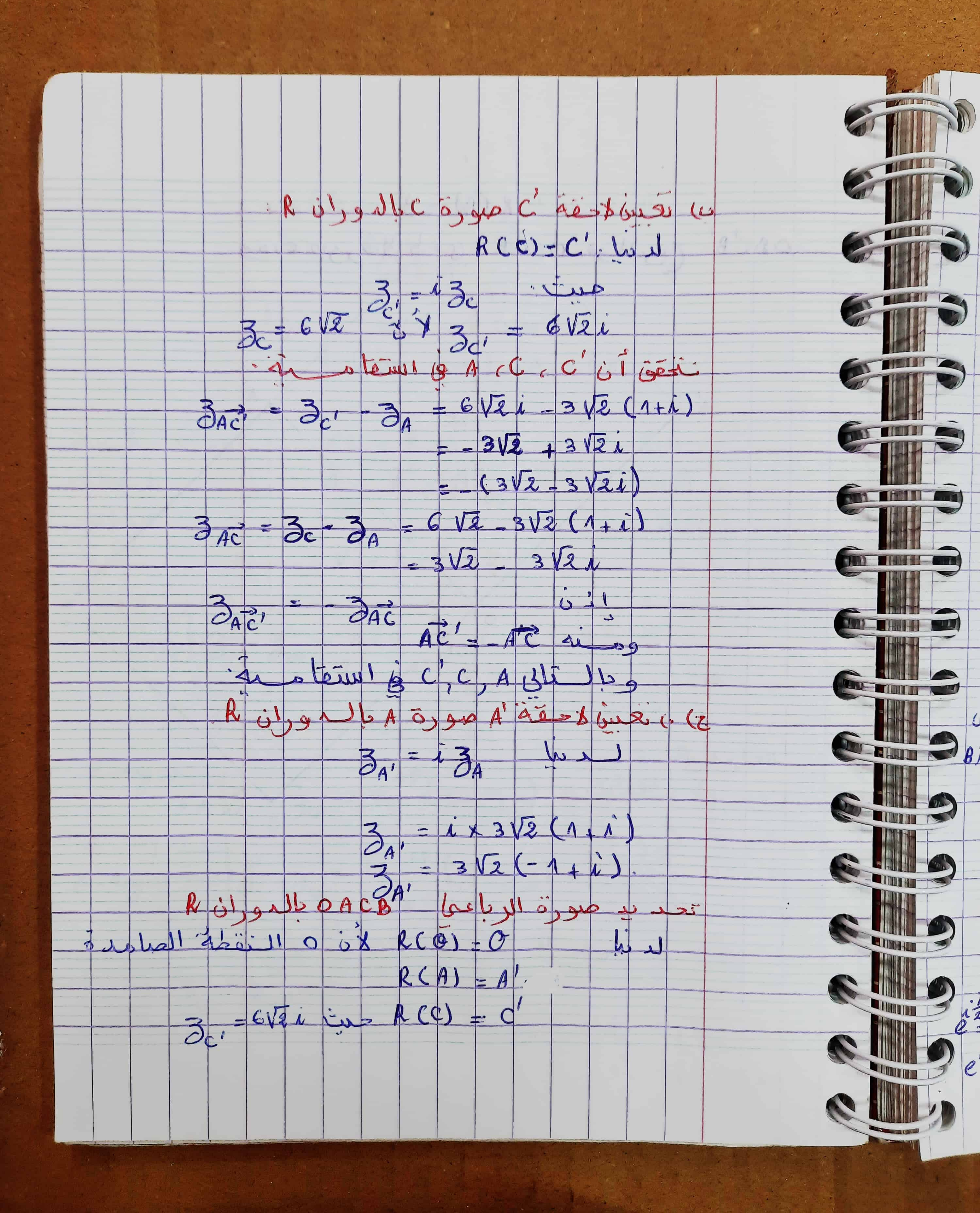
أ) العبارة المركبة للدوران R

العبارة المركبة لـ R هي:

$$z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$$

أي: $z' = iz$ لأن $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$



ب) تعيين لاحقة C' صورة C بالدوران R :

لدينا: $R(C) = C'$

حيث: $z_{C'} = i\, z_C$

$z_{C'} = 6\sqrt{2}\, i$ لأن $z_C = 6\sqrt{2}$

نتحقق أن C' ، C ، A في استقامية:

$$z_{\vec{AC'}} = z_{C'} - z_A = 6\sqrt{2}\, i - 3\sqrt{2}(1+i)$$
$$= -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\, i$$
$$= -(3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\, i)$$

$$z_{\vec{AC}} = z_C - z_A = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}(1+i)$$
$$= 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\, i$$

إذن $z_{\vec{AC'}} = -z_{\vec{AC}}$

ومنه $\vec{AC'} = -\vec{AC}$

وبالتالي A, C, C' في استقامية

ج) تعيين لاحقة A' صورة A بالدوران R

لدينا $z_{A'} = i\, z_A$

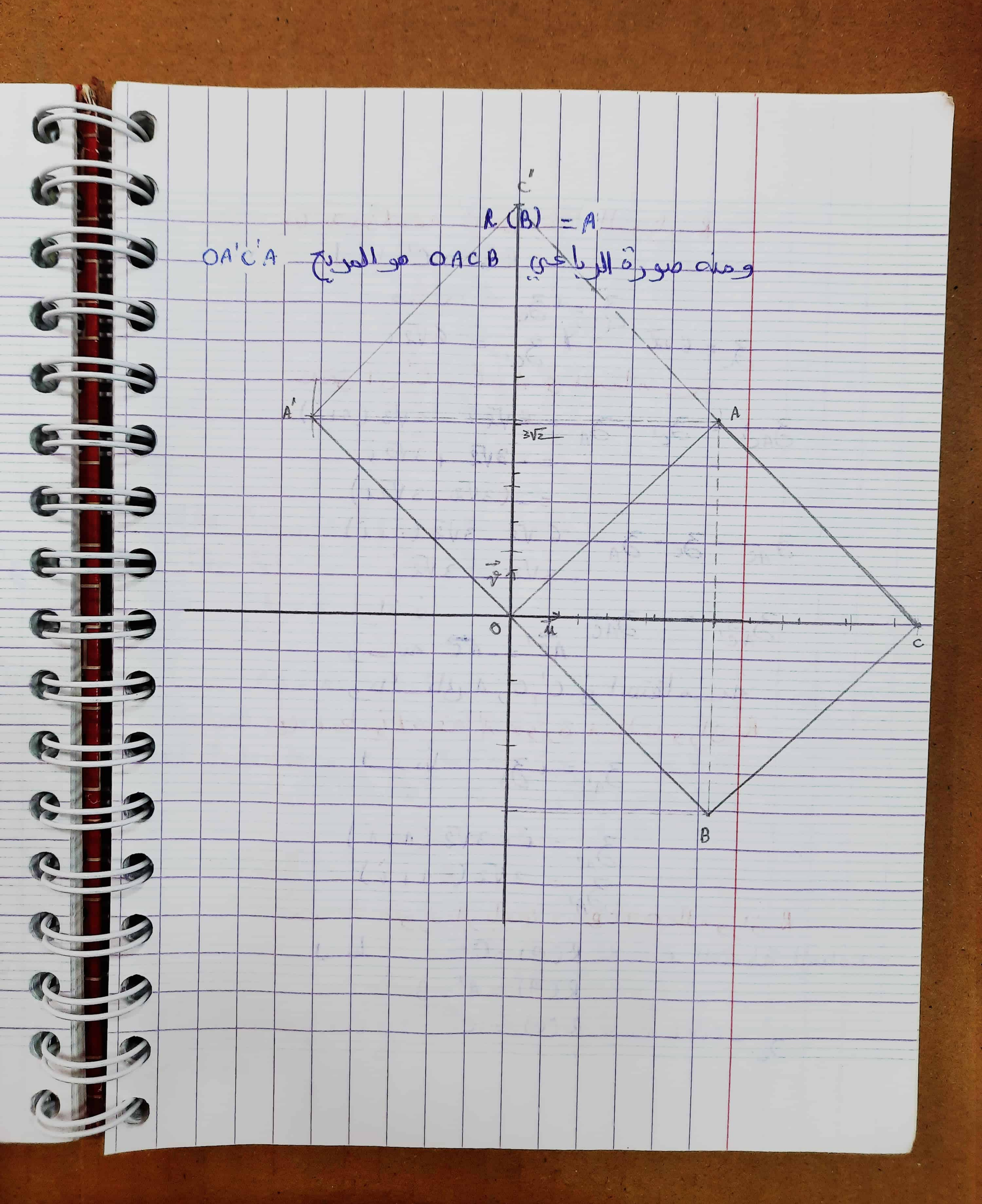
$$z_{A'} = i \times 3\sqrt{2}(1+i)$$
$$z_{A'} = 3\sqrt{2}(-1+i)$$

تحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R

لدينا $R(O) = O$ لأن O النقطة الصامدة

$R(A) = A'$

$R(C) = C'$ حيث $z_{C'} = 6\sqrt{2}\, i$


R (B) = A
ومنه صورة الرباعي OACB هو المربع OA'C'A
C'
A'
A
3√2
O
C
B

similitude directe التشابه المباشر

$$S_{(\omega, k, \theta)}(M) = M'$$

$$k>0 \begin{cases} \omega M' = k\,\omega M \\ (\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \theta + 2h\pi,\ h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

حيث k نسبة التشابه المباشر

$$A'B' = k\,AB \qquad A' = S(A)$$

$$\mathcal{A}_{A'B'C'} = k^2 \times \mathcal{A}_{ABC} \qquad B' = S(B)$$

$$C' = S(C)$$

$$V' = k^3 \times V$$

العبارة المركبة:

تحاكي: $z' - z_\omega = k(z - z_\omega)$, $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ — نسبته k، مركزه ω

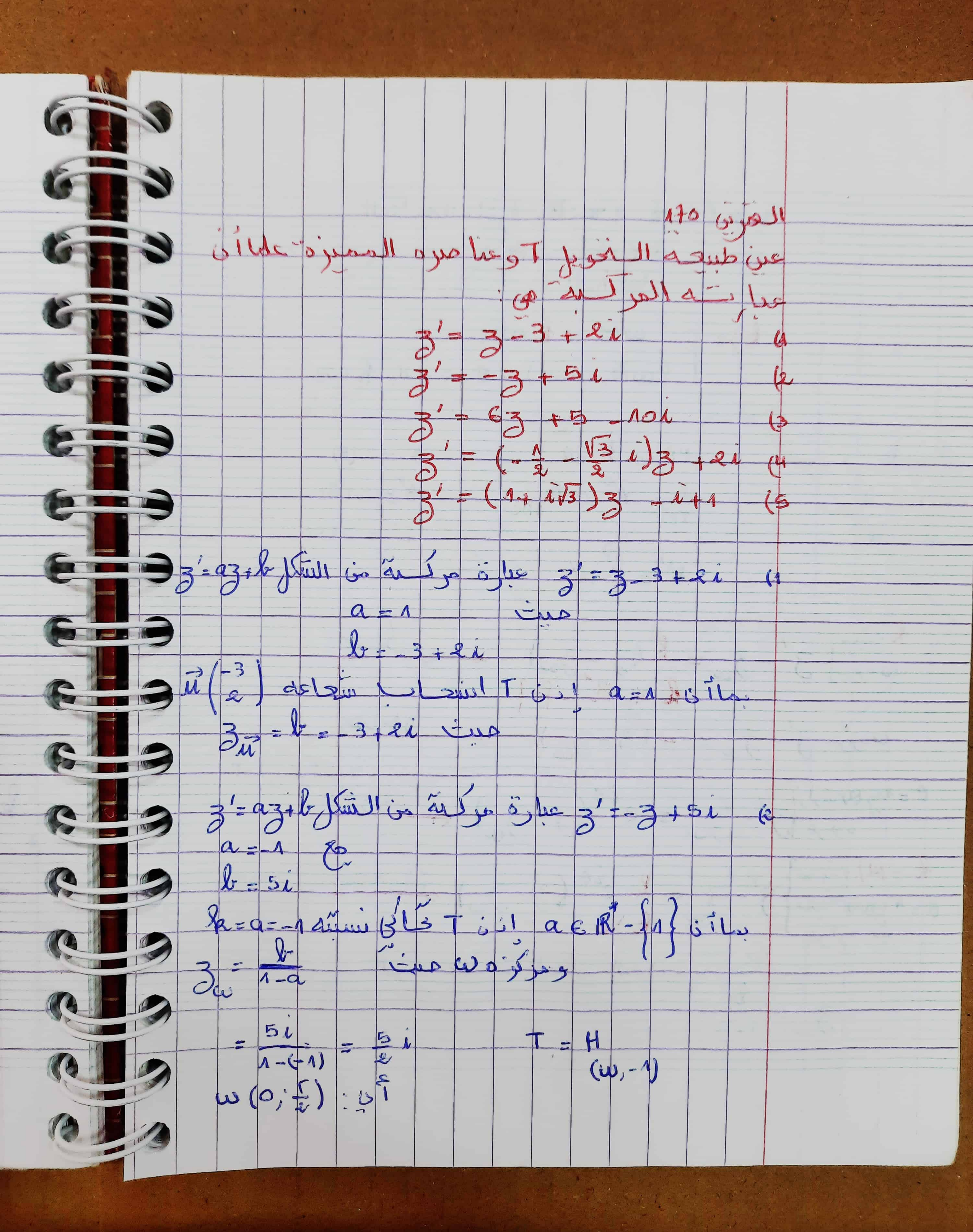
تناظر: $z' - z_\omega = -(z - z_\omega)$ — مركزه ω

دوران: $z' - z_\omega = e^{i\theta}(z - z_\omega)$ — زاويته $\theta = Arg(a)$، مركزه ω

تشابه مباشر: $z' - z_\omega = k\,e^{i\theta}(z - z_\omega)$, $k>0$ — نسبته $k = |a|$، زاويته $\theta = Arg(a)$، مركزه ω

المركز ω هو النقطة الصامدة حيث

$$z_\omega = \frac{b}{1-a}$$



التمرين 175

عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة علما أن عبارته المركبة هي:

1) $z' = z - 3 + 2i$

2) $z' = -z + 5i$

3) $z' = 6z + 5 - 10i$

4) $z' = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z + 2i$

5) $z' = (1 + i\sqrt{3}) z - i + 1$

1) $z' = z - 3 + 2i$ عبارة مركبة من الشكل $z' = az + b$

حيث $a = 1$

$b = -3 + 2i$

بما أن $a = 1$ إذن T انسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

حيث $z_{\vec{u}} = b = -3 + 2i$

2) $z' = -z + 5i$ عبارة مركبة من الشكل $z' = az + b$

مع $a = -1$

$b = 5i$

بما أن $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ إذن T تحاكي نسبته $k = a = -1$

ومركزه ω حيث $z_\omega = \frac{b}{1-a}$

$= \frac{5i}{1-(-1)} = \frac{5}{2} i$

ومنه: $\omega\left(0; \frac{5}{2}\right)$

$T = H_{(\omega, -1)}$

3) $z' = 6z + 5 - 10i$ عبارة مركبة من الشكل $z' = az + b$

حيث $\begin{cases} a = 6 \\ b = 5 - 10i \end{cases}$

بما أن $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ إذن T تحاكي

نسبته $k = a = 6$

مركزه ω حيث

$$z_\omega = \frac{b}{1-a}$$

$$z_\omega = \frac{5-10i}{1-6}$$

$z_\omega = -1 + 2i$ أي أن $\omega(-1; 2)$

4) $z' = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 2i$ عبارة مركبة من الشكل $z' = az + b$

مع $a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$b = 2i$

نحسب $|a|$

لدينا $|a| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

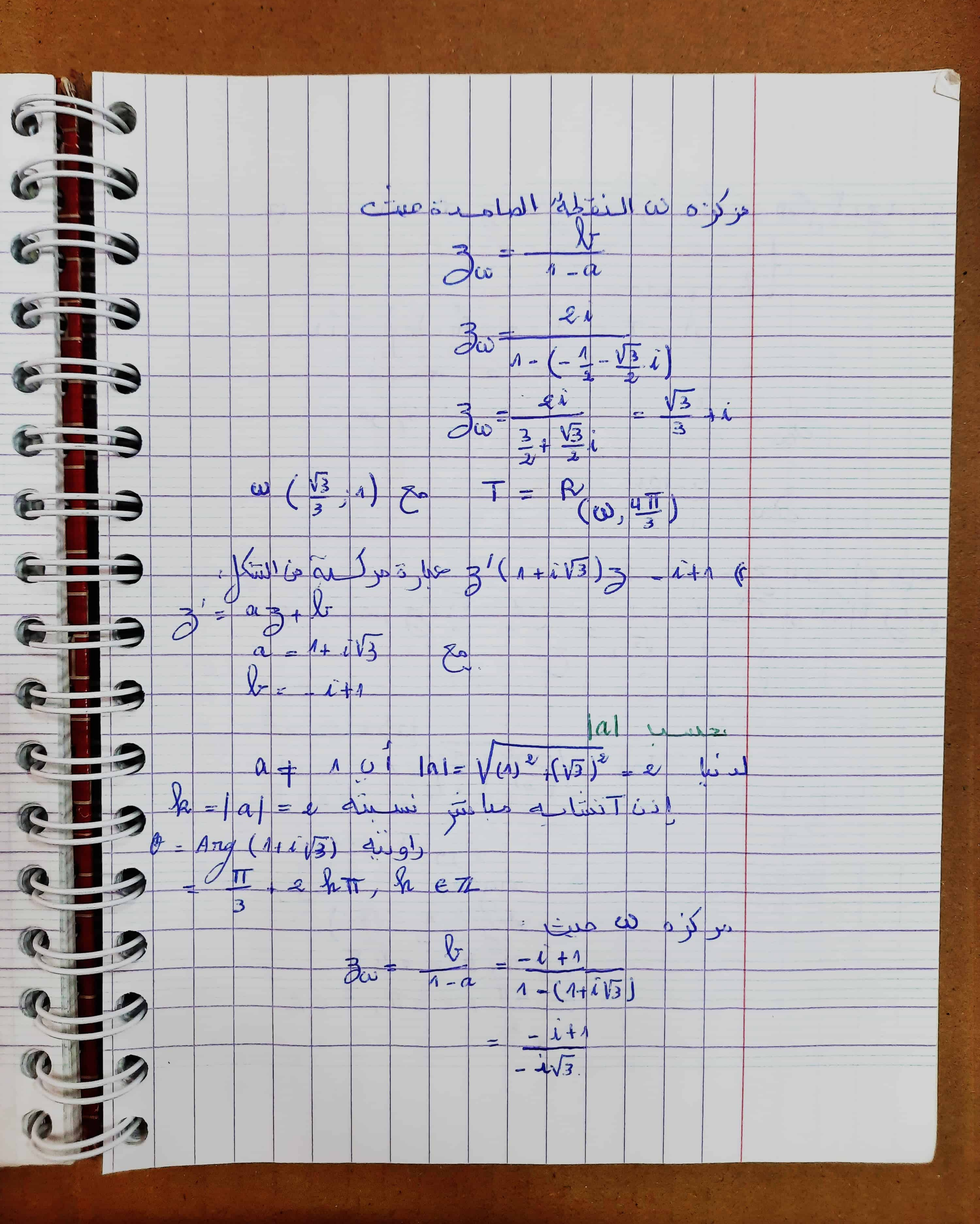
إذن T دوران،

زاويته $\theta = \arg(a)$

$\theta = Arg\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



مركزه ω النقطة الصامدة حيث

$$z_\omega = \frac{b}{1-a}$$

$$z_\omega = \frac{2i}{1-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$z_\omega = \frac{2i}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\sqrt{3}}{3}+i$$

$T = R_{(\omega, \frac{4\pi}{3})}$ مع $\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{3};1\right)$

4) $z' = (1+i\sqrt{3})z - i + 1$ عبارة مركبة من الشكل:

$z' = az + b$

مع $a = 1 + i\sqrt{3}$

$b = -i + 1$

نحسب $|a|$

لدينا $|a| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ أي $a \neq 1$

إذن T تشابه مباشر نسبته $k = |a| = 2$

زاويته $\theta = Arg(1+i\sqrt{3})$

$= \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

مركزه ω حيث:

$$z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-i+1}{1-(1+i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-i+1}{-i\sqrt{3}}$$

$\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\quad z_\omega = \frac{(-i+1)(i\sqrt{3})}{(-i\sqrt{3})(i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}$

ومنه $T = S_{(\omega, 2; \frac{\pi}{3})}$

ملاحظة

$H_{(\omega,-1)} = S_\omega = R_{(\omega,\pi)} = S_{(\omega;1;}$

M' ω M

التمرين (171) Bac S E 2014

الموضوع ②

التمرين ③

4 نقاط

1) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

المعادلة تكافئ $\begin{cases} z-i=0 \\ \text{أو} \\ z^2-2z+5=0 \end{cases}$

ط(1 $\begin{cases} z=i \\ \text{أو} \\ z^2-2z+5=0 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = (-2)^2-4(5)$

$\Delta = 4-20$

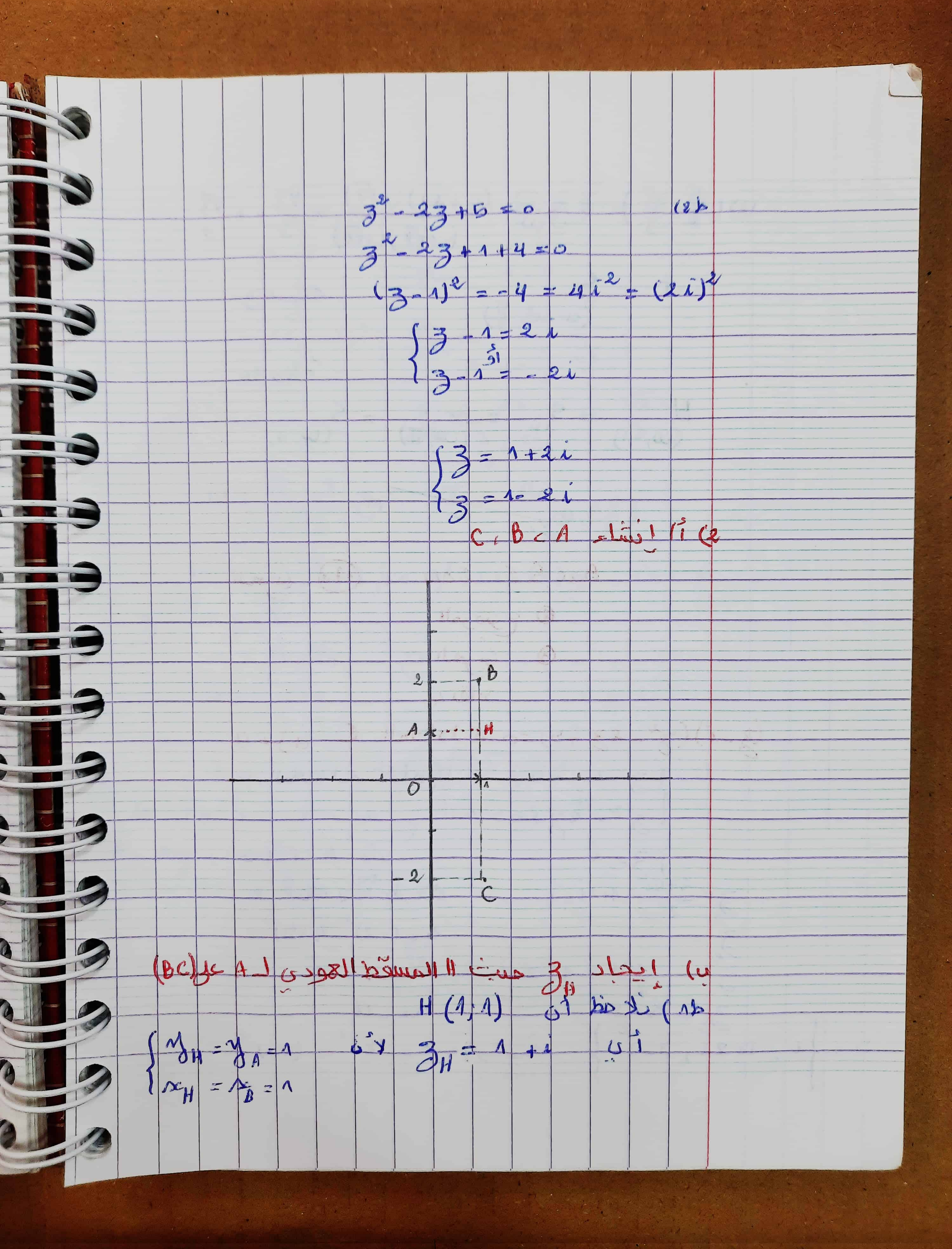
$\Delta = -16$

$\Delta = 16i^2 = (4i)^2$

$z_1 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$

$z_2 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$

ومنه $S = \{i, 1+2i, 1-2i\}$



2) ب
z² - 2z + 5 = 0
z² - 2z + 1 + 4 = 0
(z - 1)² = -4 = 4i² = (2i)²
z - 1 = 2i
أو
z - 1 = -2i
z = 1 + 2i
z = 1 - 2i
3) أ) إنشاء A ، B ، C
B
2
A
H
O
1
-2
C
ب) إيجاد z_H حيث H المسقط العمودي لـ A على (BC)
ط1) نلاحظ أن H (1;1)
أي z_H = 1 + i لأن
y_H = y_A = 1
x_H = x_B = 1

ط2) بما أن H المسقط العمودي لـ A على (BC) فإن $\begin{cases} H \in (BC) \\ \vec{AH} \perp \vec{BC} \end{cases}$

بما أن $H \in (BC)$ فإن $x_H = 1$

وبما أن $\vec{AH} \perp \vec{BC}$ فإن $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$

لد $\vec{AH}\begin{pmatrix} 1-0 \\ y_H - 1 \end{pmatrix}$ و $\vec{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$0 \times 1 + (-4)(y_H - 1) = 0$

أي $y_H = 1$

ومنه $H(1;1)$ أي $z_H = 1+i$

ج- حساب مساحة ABC

لدينا

$$A_{ABC} = S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} \text{ u.a}$$

$$= \frac{1 \times 4}{2} \text{ u.a}$$

ومنه $A_{ABC} = S_{ABC} = 2 \text{ cm}^2$

لد $AH = |z_H - z_A|$

$= |1+i-i|$

$= |1|$

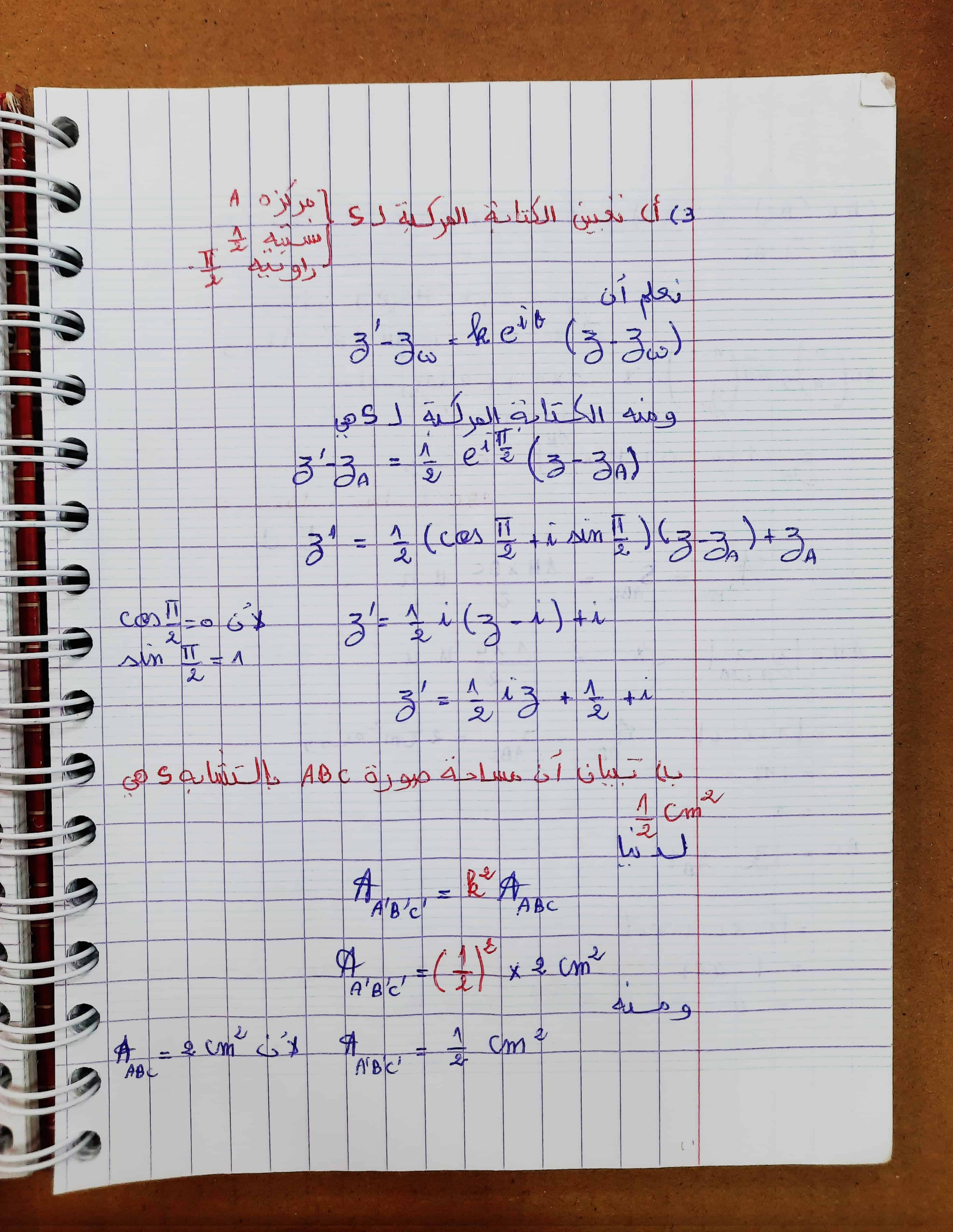
$= 1$

$BC = |z_C - z_B|$

$= |1-2i-1-2i|$

$= |-4i|$

$= 4$



3) أ) تعيين الكتابة المركبة لـ S

{ مركزه A
نسبته $\frac{1}{2}$
زاويته $\frac{\pi}{2}$.

نعلم أن

$$z' - z_{\omega} = k e^{i\theta} (z - z_{\omega})$$

ومنه الكتابة المركبة لـ S هي

$$z' - z_A = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_A)$$

$$z' = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)(z - z_A) + z_A$$

لأن $\cos \frac{\pi}{2} = 0$
$\sin \frac{\pi}{2} = 1$

$$z' = \frac{1}{2} i (z - i) + i$$

$$z' = \frac{1}{2} i z + \frac{1}{2} + i$$

ب) تبيان أن مساحة صورة ABC بالتشابه S هي $\frac{1}{2} cm^2$

لدينا

$$\mathcal{A}_{A'B'C'} = k^2 \mathcal{A}_{ABC}$$

$$\mathcal{A}_{A'B'C'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2\ cm^2$$

ومنه

$$\mathcal{A}_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\ cm^2$$

لأن $\mathcal{A}_{ABC} = 2\ cm^2$

4) نعين (Δ) مجموعة النقط $M(z)$

حيث $|z| = |iz + 1 + 2i|$

ط1

$$|z| = |iz + 1 + 2i|$$

نكتب $|z| = \left|i\left(z + \frac{1}{i} + 2\right)\right|$

$$|z| = |i||z - i + 2|$$

أي $|z| = |z - i + 2|$

$$|z| = |z - (-2 + i)|$$

$|z| = |z - z_E|$ حيث $z_E = -2 + i$

أي

$$OM = EM$$

ومنه (Δ) هو محور القطعة $[OE]$

ط2

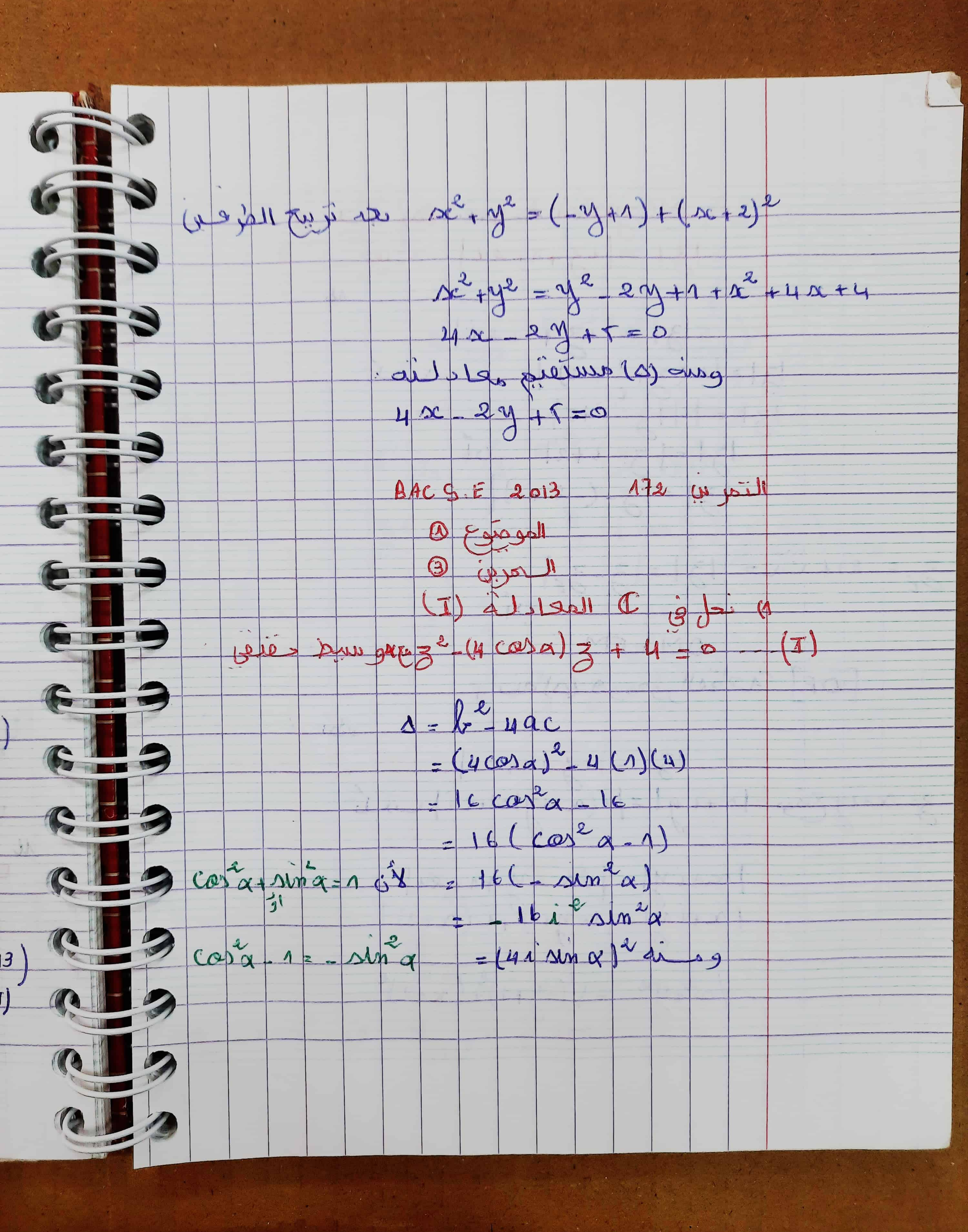
$$|z| = |iz + 1 + 2i|$$

نكتب $|x + iy| = |i(x + iy) + 1 + 2i|$ بوضع $z = x + iy$

$$|x + iy| = |ix - y + 1 + 2i|$$

$$|x + iy| = |(-y + 1) + i(x + 2)|$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-y + 1)^2 + (x + 2)^2}$$



بعد تربيع الطرفين $x^2+y^2=(-y+1)+(x+2)^2$

$x^2+y^2=y^2-2y+1+x^2+4x+4$

$4x-2y+5=0$

ومنه (Δ) مستقيم معادلته:

$4x-2y+5=0$

التمرين 172 BAC S.E 2013

① الموضوع

③ التمرين

1) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I)

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ ---(I) حيث α عدد حقيقي

$\Delta=b^2-4ac$

$=(4\cos\alpha)^2-4(1)(4)$

$=16\cos^2\alpha-16$

$=16(\cos^2\alpha-1)$

$=16(-\sin^2\alpha)$ لأن $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ أي $\cos^2\alpha-1=-\sin^2\alpha$

$=-16i^2\sin^2\alpha$

ومنه $=(4i\sin\alpha)^2$

$z = r e^{i\theta}$

$\bar{z} = r e^{-i\theta}$

$$z_1 = \frac{4\cos\alpha + 4i\sin\alpha}{2}$$

$$= 2\cos\alpha + 2i\sin\alpha$$

$$z_2 = 2\cos\alpha - 2i\sin\alpha$$

2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ تبيان أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

لدينا

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{2(\cos\alpha - i\sin\alpha)}$$

$$= \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)}$$

$$= \cos\alpha(\alpha - (-\alpha)) + i\sin(\alpha - (-\alpha))$$

$$= \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ إذا $= \cos\frac{2\pi}{3} + i\frac{2\pi}{3}$

ومنه

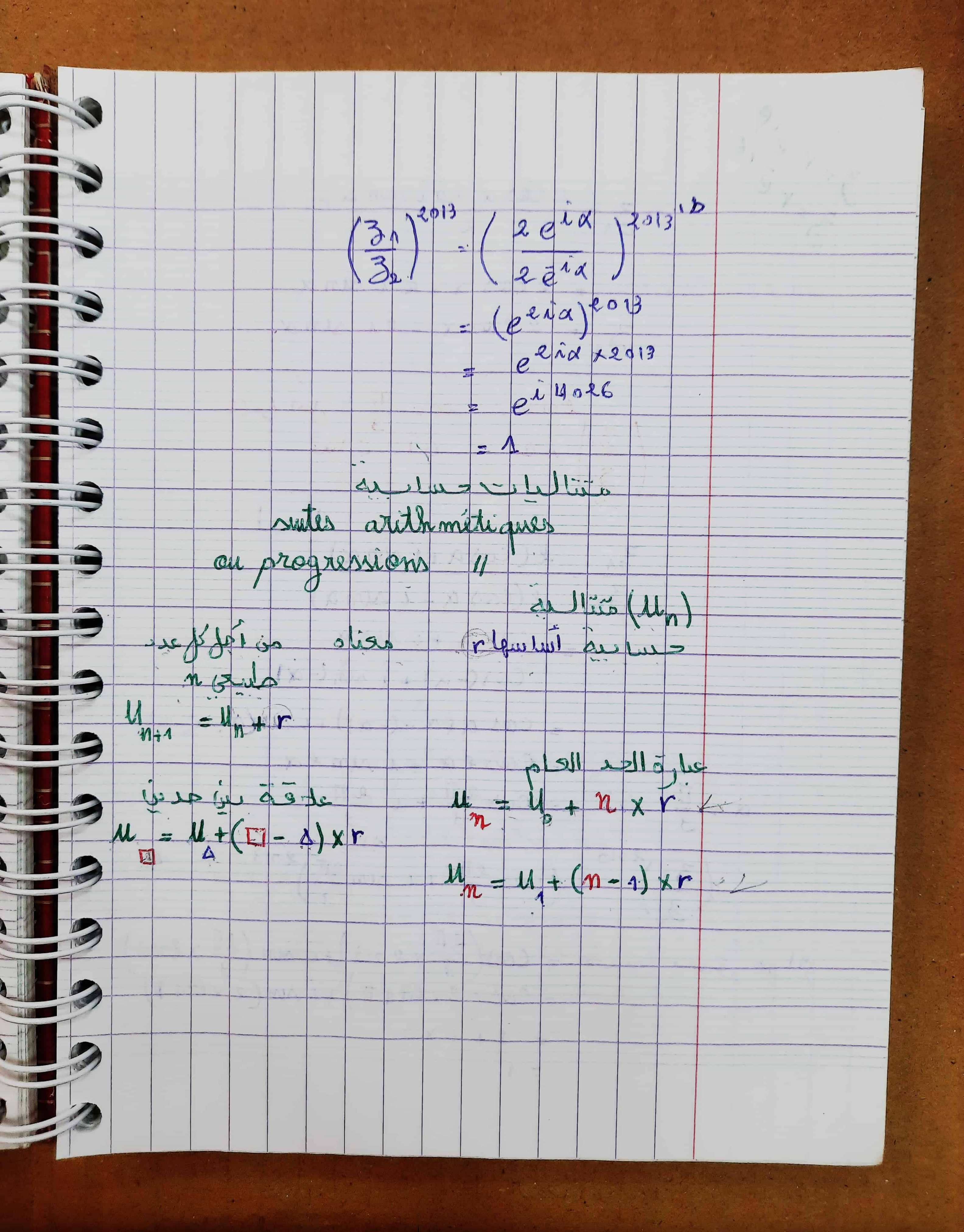
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{2013}$$

حسب دستور موافر $= \cos\left(\frac{2\pi}{3} \times 2013\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} \times 2013\right)$

$$= \cos(2 \times 671\pi) + i\sin(2 \times 671\pi)$$

$$= 1 + i \times 0$$

$$= 1$$



(z1/z2)^2013 = (2e^iα / 2e^-iα)^2013
= (e^2iα)^2013
= e^2iα x2013
= e^i4026
= 1
متتاليات حسابية
suites arithmétiques
ou progressions "
متتالية (Un)
حسابية أساسها r معناه من أجل كل عدد طبيعي n
Un+1 = Un + r
عبارة الحد العام
Un = U0 + n x r
Un = U1 + (n - 1) x r
علاقة بين حدين
U□ = UΔ + (□ - Δ) x r

خاصية 3 حدود متتابعة من م. حسابية

a, b, c حدود متتابعة من م. حسابية

يعني

$$a + c = 2b$$

b الوسط الحسابي

مجموع حدود متتابعة

$$S = \frac{\text{عدد الحدود} \left(\text{الحد الأول في المجموع} + \text{الحد الأخير في المجموع} \right)}{2}$$

عدد حدود السلسلة

$$u_a , u_{a+1} ; u_{a+2} ; \dots u_b$$

هو:

دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

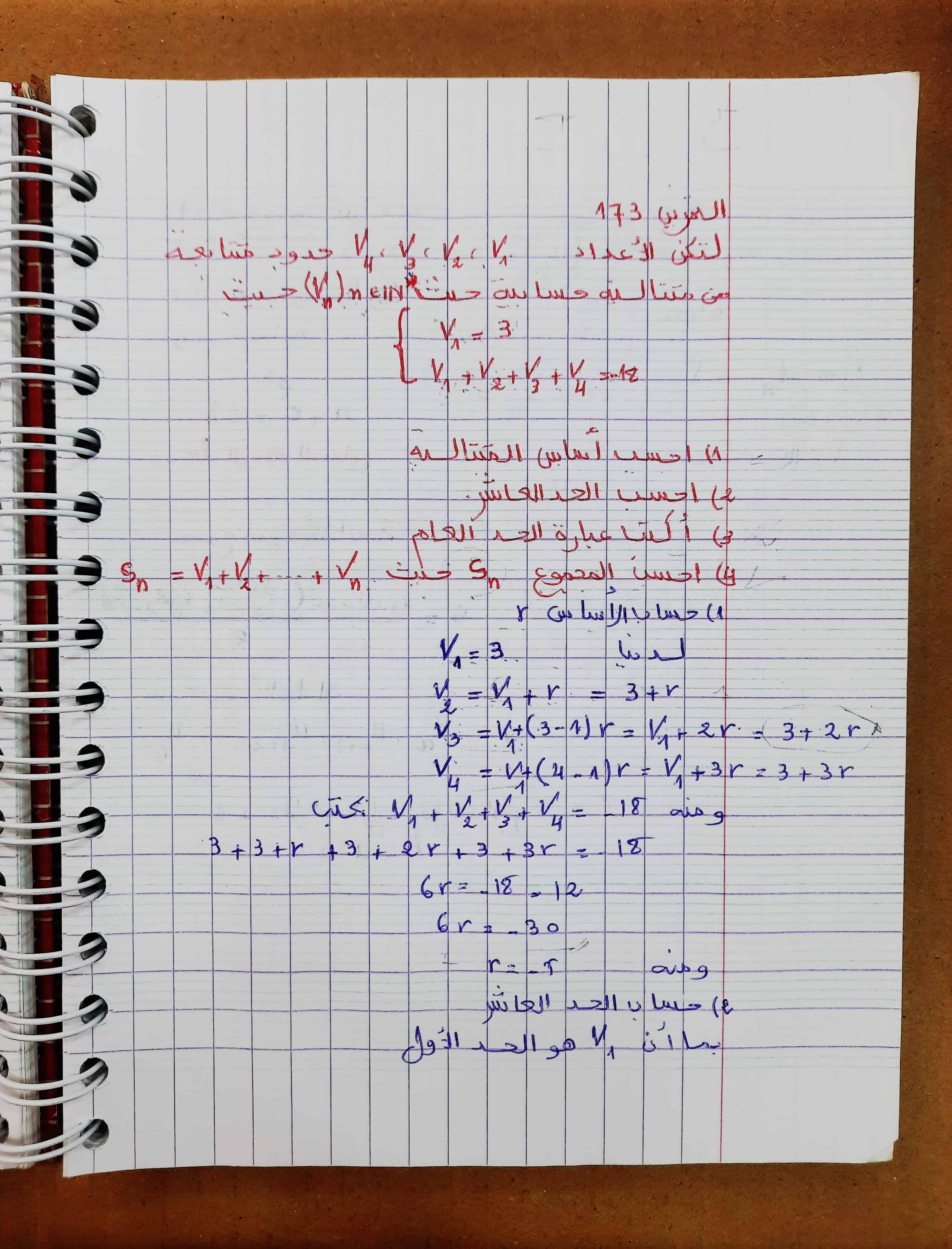
$$b - a + 1$$

(u_n) متتالية متقاربة

معناه

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

حيث $l \in \mathbb{R}$



التمرين 173

لتكن الأعداد V_1 ، V_2 ، V_3 ، V_4 حدود متتابعة من متتالية حسابية حيث $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حيث

$$\begin{cases} V_1 = 3 \\ V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = -18 \end{cases}$$

1) احسب أساس المتتالية

2) احسب الحد العاشر

3) أكتب عبارة الحد العام

4) احسب المجموع S_n حيث $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

1) حساب الأساس r

لدينا $V_1 = 3$

$V_2 = V_1 + r = 3 + r$

$V_3 = V_1 + (3-1)r = V_1 + 2r = 3 + 2r$

$V_4 = V_1 + (4-1)r = V_1 + 3r = 3 + 3r$

ومنه نكتب $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = -18$

$3 + 3 + r + 3 + 2r + 3 + 3r = -18$

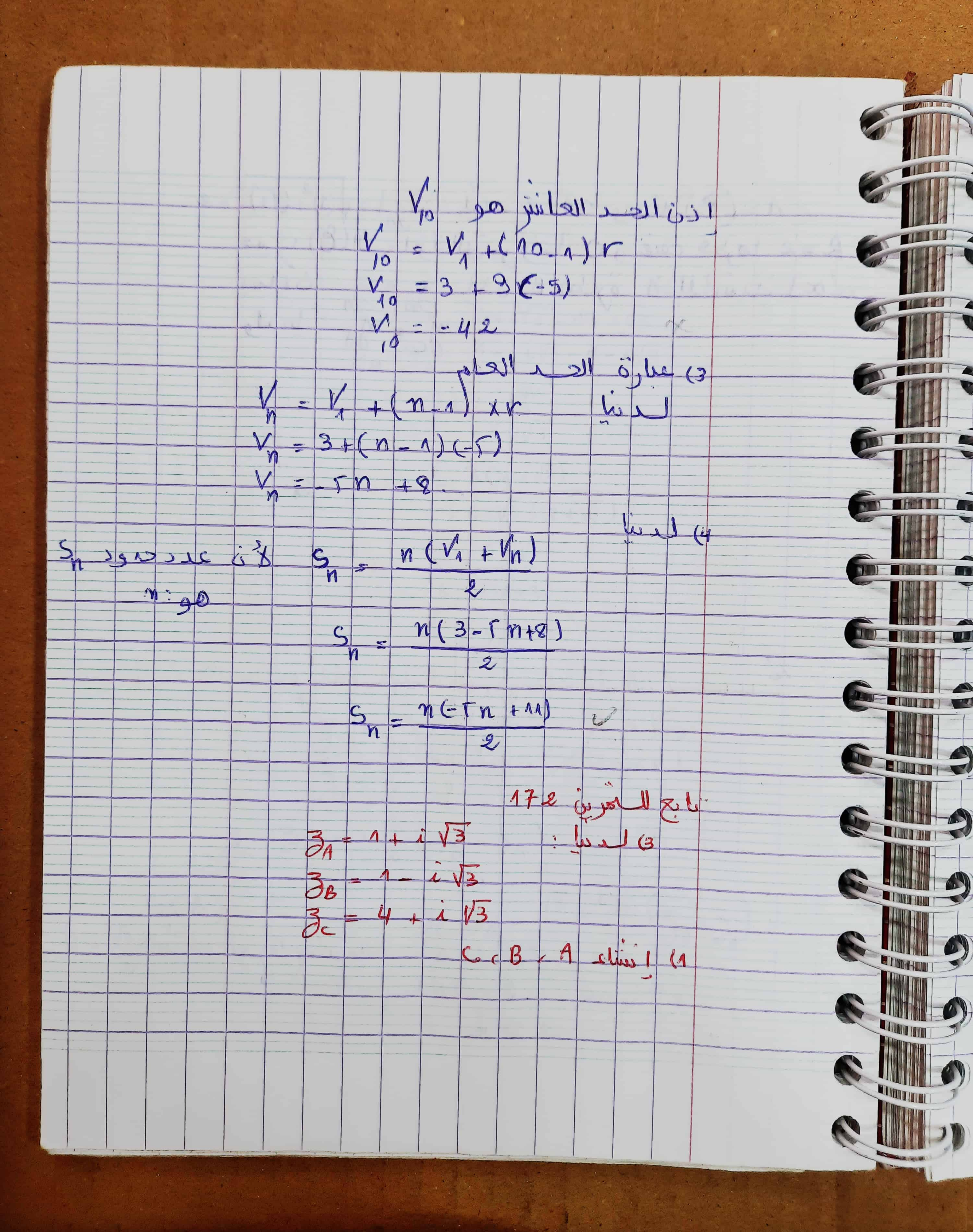
$6r = -18 - 12$

$6r = -30$

ومنه $r = -5$

2) حساب الحد العاشر

بما أن V_1 هو الحد الأول



إذن الحد العاشر هو V_{10}

$V_{10} = V_1 + (10-1) r$

$V_{10} = 3 + 9(-5)$

$V_{10} = -42$

3) عبارة الحد العام

لدينا

$V_n = V_1 + (n-1) \times r$

$V_n = 3 + (n-1)(-5)$

$V_n = -5n + 8$.

4) لدينا

$S_n = \frac{n(V_1 + V_n)}{2}$ لأن عدد حدود S_n هو: n

$S_n = \frac{n(3-5n+8)}{2}$

$S_n = \frac{n(-5n+11)}{2}$

تابع للتمرين 17 ع

3) لدينا:

$z_A = 1 + i\sqrt{3}$

$z_B = 1 - i\sqrt{3}$

$z_C = 4 + i\sqrt{3}$

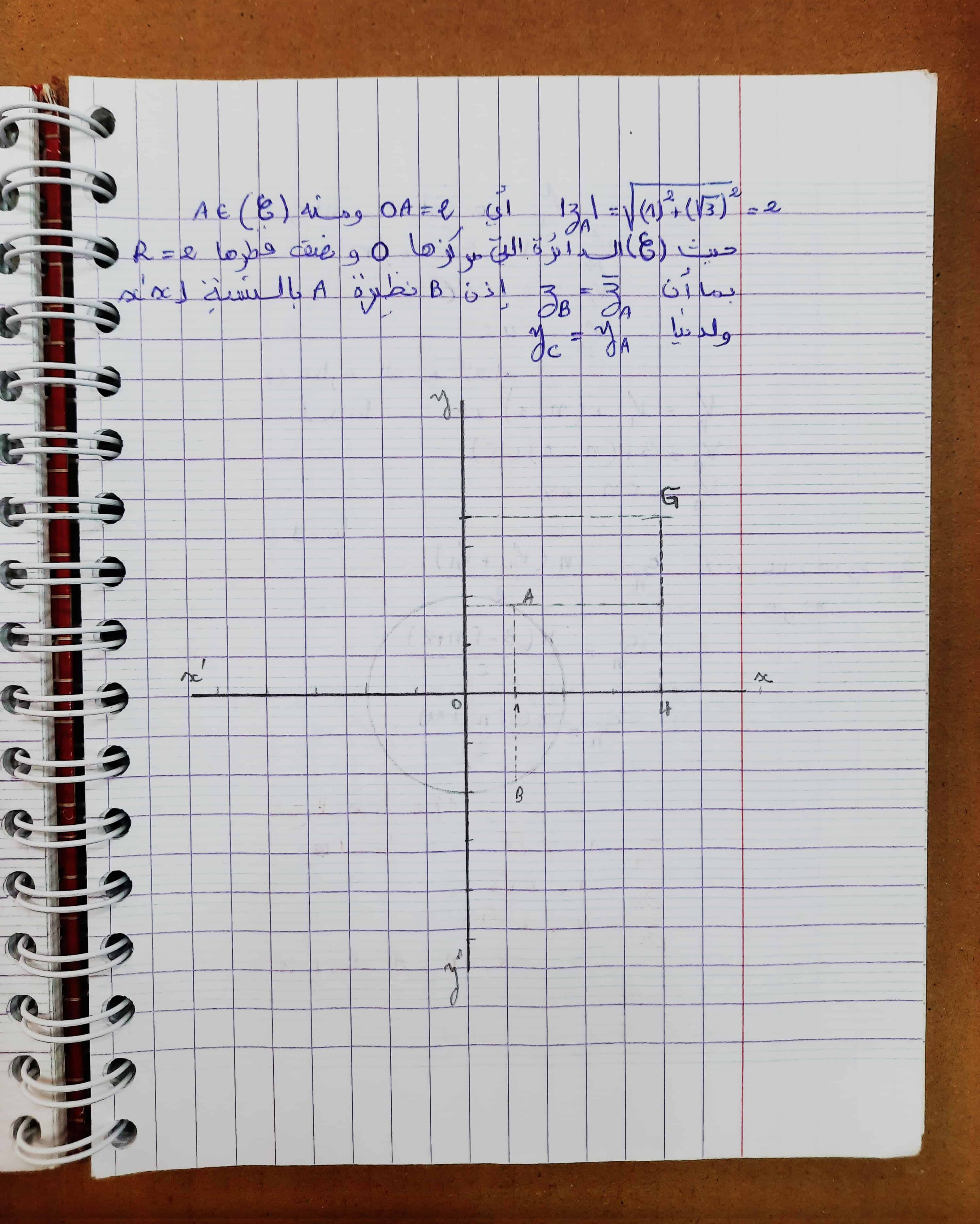
1) إنشاء A ، B ، C

$|z_A| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ أي $OA = 2$ ومنه $A \in (\mathcal{C})$

حيث $(\mathcal{C})$ الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $R = 2$

بما أن $z_B = \bar{z}_A$ إذن B نظيرة A بالنسبة لـ $x'x$

ولدينا $y_C = y_A$



ب/ كتابة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري:

لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{-2i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3(2i\sqrt{3})}{(-2i\sqrt{3})(2i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{6i\sqrt{3}}{4 \times 3}$$

$$= i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

استنتاج أن C صورة B بالتشابه المباشر الذي مركزه A

لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i\frac{\sqrt{3}}{2}$

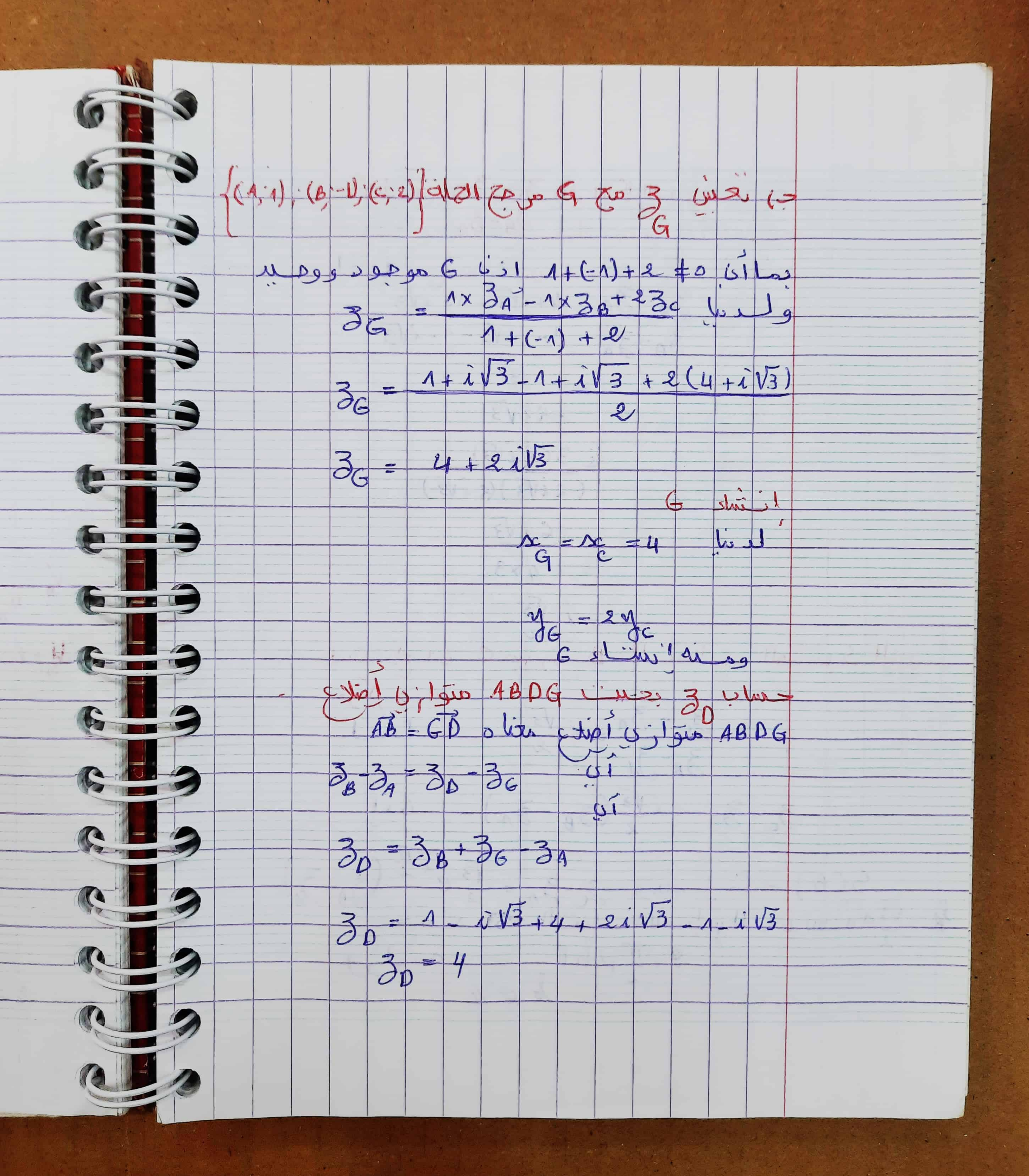
إذن $z_C - z_A = i\frac{\sqrt{3}}{2}(z_B - z_A)$

ومنه $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$ $S(B) = C$

حيث S التشابه المباشر الذي نسبته $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$



ج) تعيين z_G لاحقة G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;2)\}$

بما أن $1+(-1)+2 \neq 0$ اذن G موجود ووحيد

ولدينا: $z_G = \dfrac{1\times z_A - 1\times z_B + 2z_C}{1+(-1)+2}$

$z_G = \dfrac{1+i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} + 2(4+i\sqrt{3})}{2}$

$z_G = 4 + 2i\sqrt{3}$

إنشاء G

لدينا $x_G = x_C = 4$

$y_G = 2y_C$

ومنه إنشاء G

- حساب z_D بحيث ABDG متوازي أضلاع

ABDG متوازي أضلاع معناه $\vec{AB} = \vec{GD}$

أي

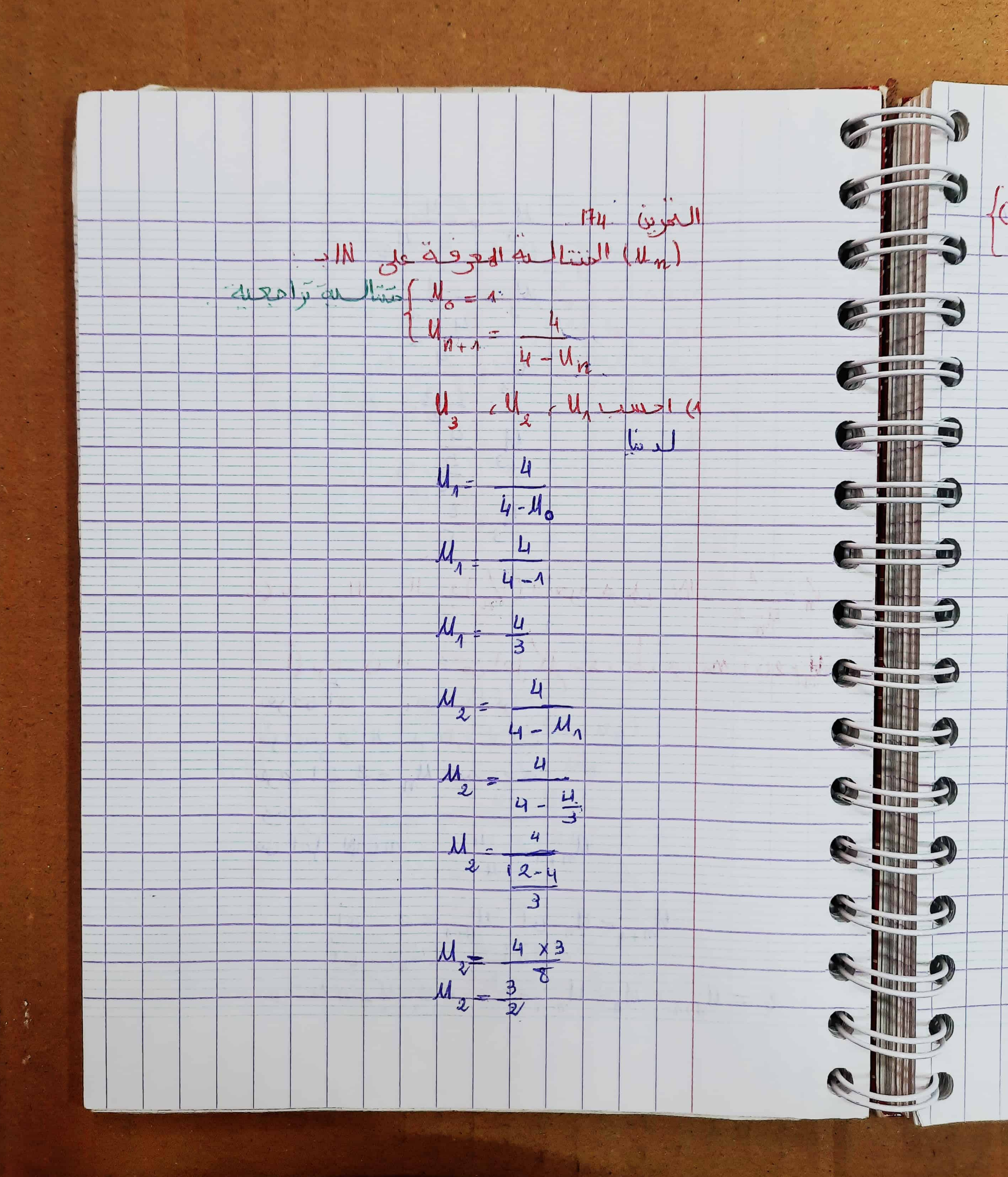
$z_B - z_A = z_D - z_G$

أي

$z_D = z_B + z_G - z_A$

$z_D = 1 - i\sqrt{3} + 4 + 2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}$

$z_D = 4$



التمرين 174

المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: (U_n)

متتالية تراجعية

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4}{4 - U_n} \end{cases}$$

1) احسب U_1، U_2، U_3

لدينا

$U_1 = \dfrac{4}{4 - U_0}$

$U_1 = \dfrac{4}{4 - 1}$

$U_1 = \dfrac{4}{3}$

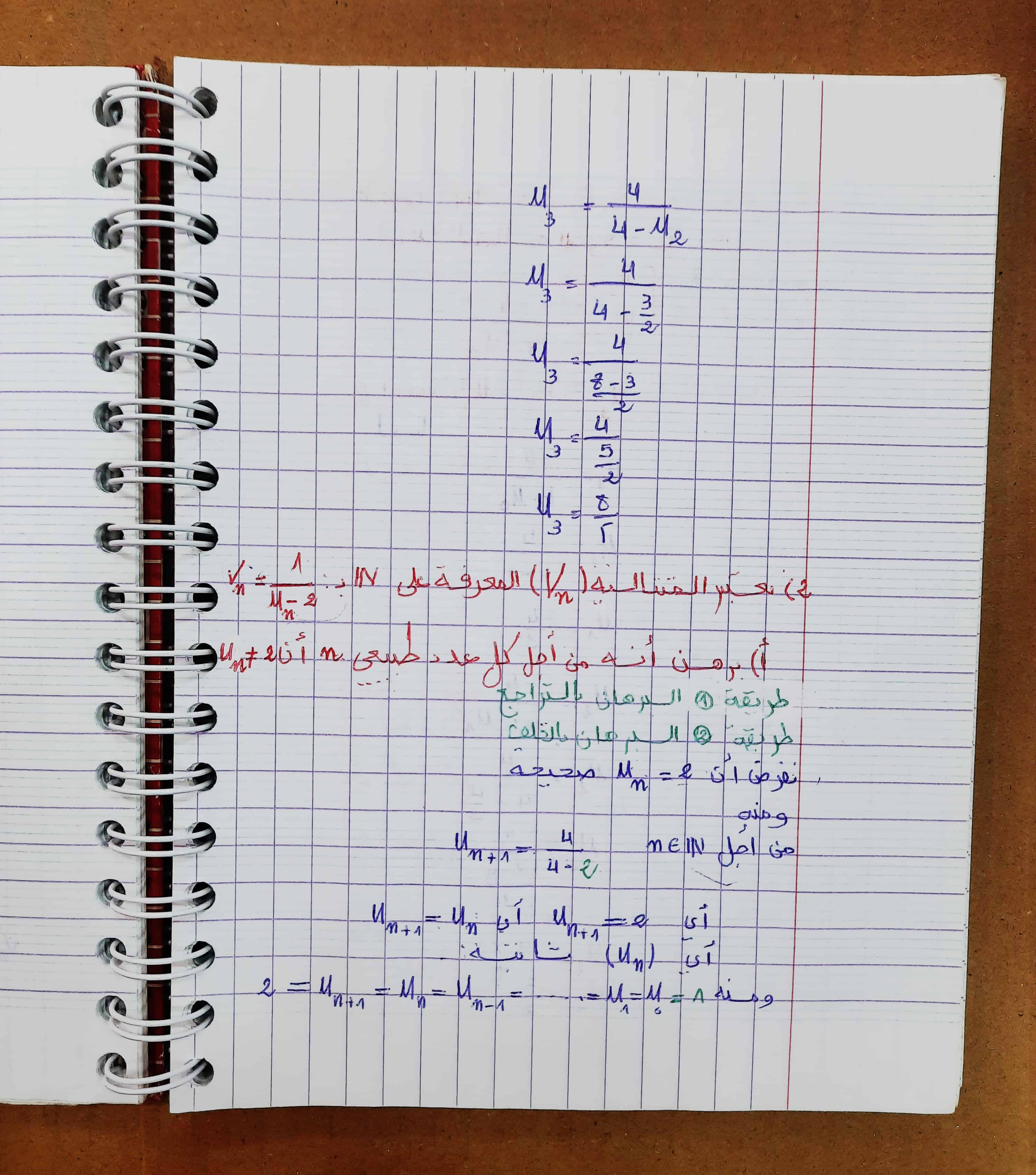
$U_2 = \dfrac{4}{4 - U_1}$

$U_2 = \dfrac{4}{4 - \frac{4}{3}}$

$U_2 = \dfrac{4}{\frac{12 - 4}{3}}$

$U_2 = \dfrac{4 \times 3}{8}$

$U_2 = \dfrac{3}{2}$



$$u_3 = \frac{4}{4 - u_2}$$

$$u_3 = \frac{4}{4 - \frac{3}{2}}$$

$$u_3 = \frac{4}{\frac{8 - 3}{2}}$$

$$u_3 = \frac{4}{\frac{5}{2}}$$

$$u_3 = \frac{8}{5}$$

2) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = \frac{1}{u_n - 2}$

أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن $u_n \neq 2$

طريقة ① البرهان بالتراجع

طريقة ② البرهان بالخلف

نفرض أن $u_n = 2$ صحيحة

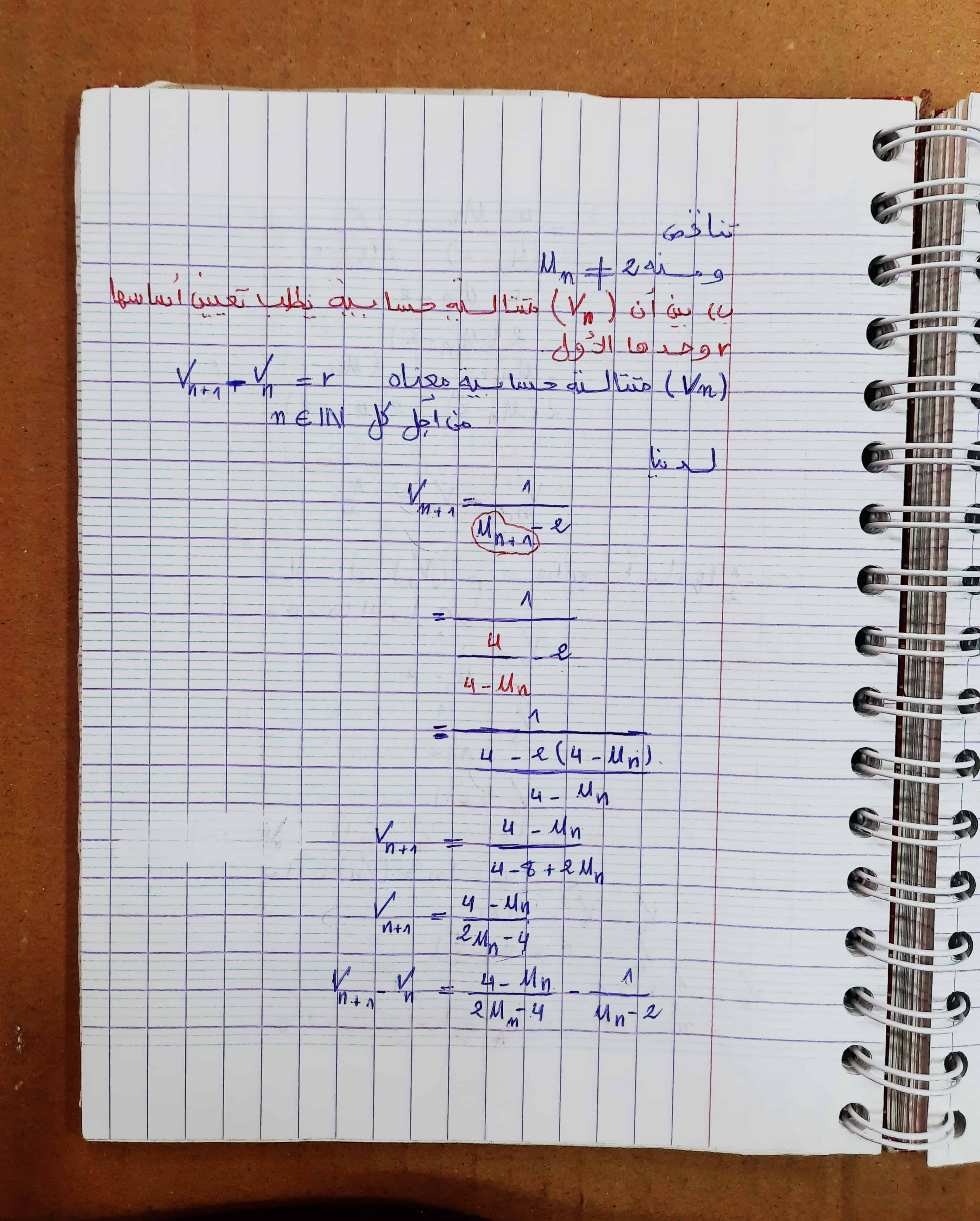
ومنه

من أجل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{4}{4 - 2}$

أي $u_{n+1} = 2$ أي $u_{n+1} = u_n$

أي (u_n) ثابتة

ومنه $1 = u_0 = u_1 = \dots = u_{n-1} = u_n = u_{n+1} = 2$



تناقض

ومنه $u_n \neq 2$

ب) بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r وحدها الأول.

(V_n) متتالية حسابية معناه $V_{n+1} - V_n = r$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا

$$V_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 2}$$

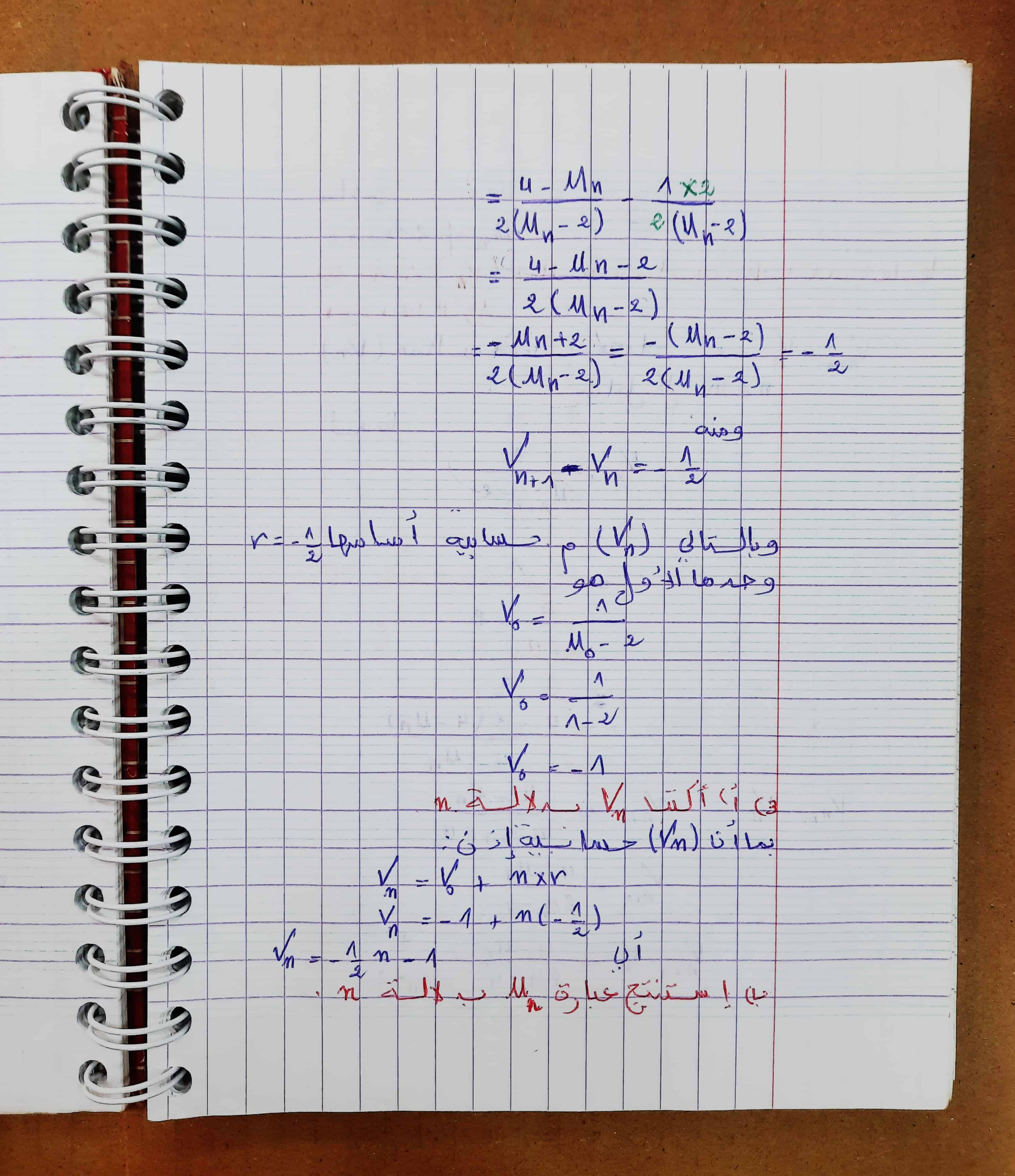
$$= \frac{1}{\frac{4}{4-u_n} - 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{4 - 2(4-u_n)}{4-u_n}}$$

$$V_{n+1} = \frac{4-u_n}{4-8+2u_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{4-u_n}{2u_n-4}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{4-u_n}{2u_n-4} - \frac{1}{u_n-2}$$



$$= \frac{4-U_n}{2(U_n-2)} - \frac{1\times 2}{2(U_n-2)}$$

$$= \frac{4-U_n-2}{2(U_n-2)}$$

$$= \frac{-U_n+2}{2(U_n-2)} = \frac{-(U_n-2)}{2(U_n-2)} = -\frac{1}{2}$$

ومنه

$$V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي (V_n) م حسابية أساسها $r = -\frac{1}{2}$

وحدها الأول هو

$$V_0 = \frac{1}{U_0-2}$$

$$V_0 = \frac{1}{1-2}$$

$$V_0 = -1$$

3) أ) أكتب V_n بدلالة n.

بما أن (V_n) حسابية إذن:

$$V_n = V_0 + n \times r$$

$$V_n = -1 + n\left(-\frac{1}{2}\right)$$

أي

$$V_n = -\frac{1}{2}n - 1$$

ب) إستنتج عبارة U_n بدلالة n.

بما أن $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$ إذن $U_n - 2 = \frac{1}{V_n}$

$$U_n = \frac{1}{V_n} + 2$$

أي

$$U_n = \frac{1}{-\frac{1}{2}n - 1} + 2$$

$$U_n = \frac{1}{-\frac{1}{2}n - 1} + \frac{2(-\frac{1}{2}n - 1)}{-\frac{1}{2}n - 1}$$

$$U_n = \frac{1 - n - 2}{-\frac{1}{2}n - 1}$$

$$U_n = \frac{-n - 1}{-\frac{1}{2}n - 1}$$

$$U_n = \frac{n + 1}{\frac{1}{2}n + 1}$$

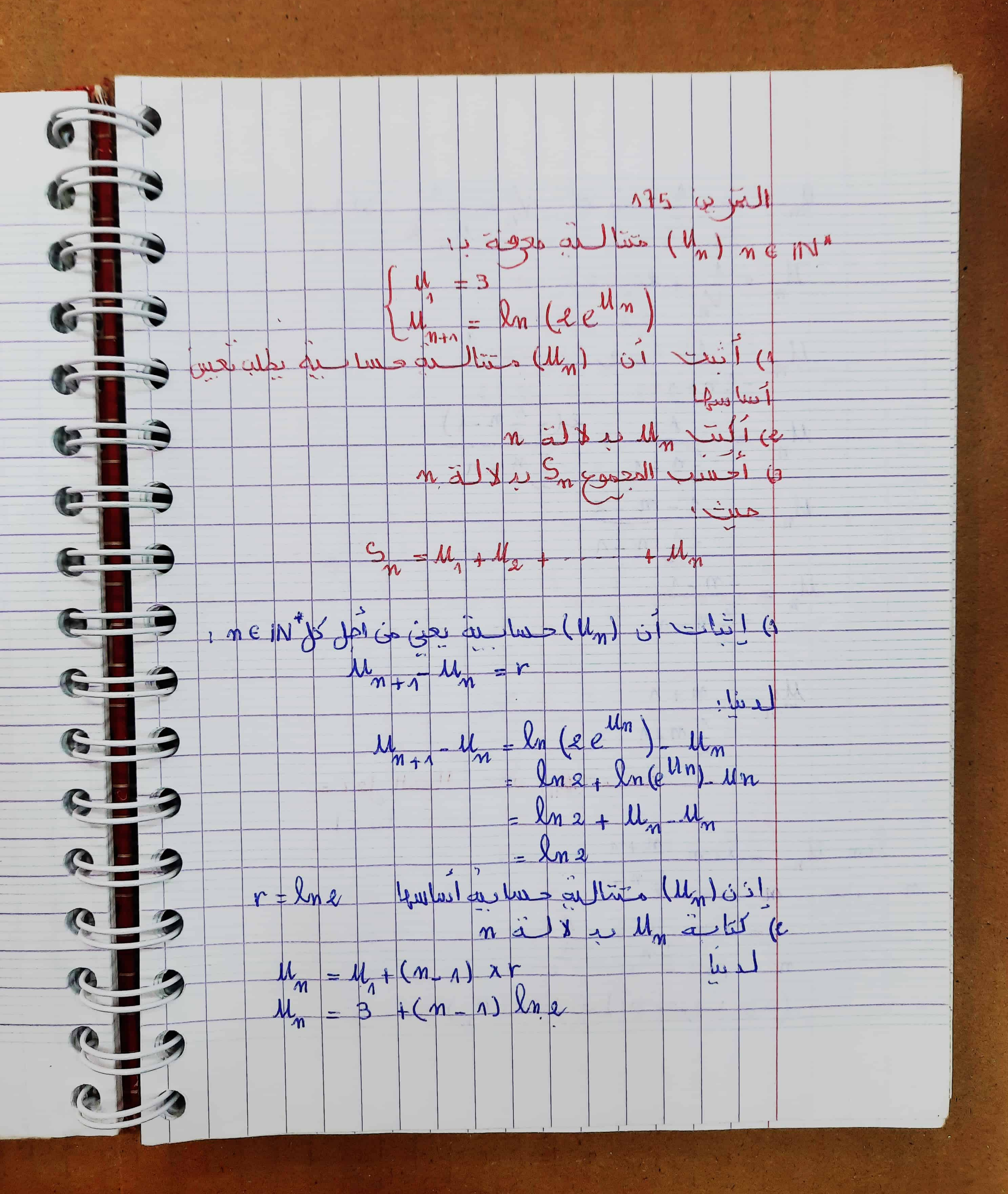
ج) هل المتتالية (U_n) متقاربة

لدينا:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n + 1}{\frac{1}{2}n + 1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\frac{1}{2}n} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

ومنه (U_n) متقاربة (أي تقترب من 2).



التمرين 175

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية معرفة بـ:

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \ln\left(2e^{U_n}\right) \end{cases}$$

1) أثبت أن (U_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها

2) أكتب U_n بدلالة n

3) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث:

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

1) إثبات أن (U_n) حسابية يعني من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ،

$$U_{n+1} - U_n = r$$

لدينا:

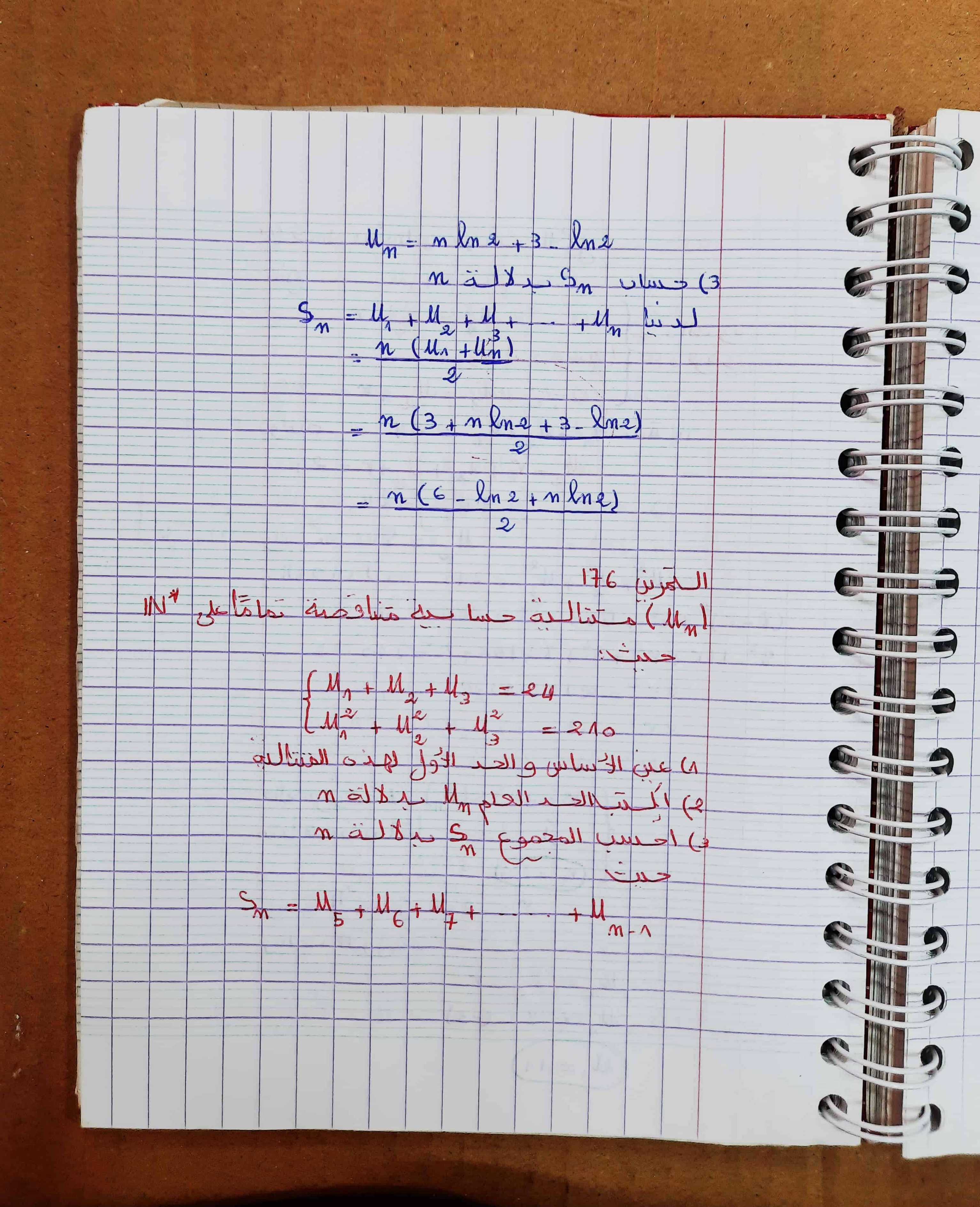
$$U_{n+1} - U_n = \ln\left(2e^{U_n}\right) - U_n$$
$$= \ln 2 + \ln\left(e^{U_n}\right) - U_n$$
$$= \ln 2 + U_n - U_n$$
$$= \ln 2$$

إذن (U_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln 2$

2) كتابة U_n بدلالة n

لدينا

$$U_n = U_1 + (n-1) \times r$$
$$U_n = 3 + (n-1)\ln 2$$



$$u_n = n\ln 2 + 3 - \ln 2$$

3) حساب S_n بدلالة n

لدينا $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

$$= \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

$$= \frac{n(3 + n\ln 2 + 3 - \ln 2)}{2}$$

$$= \frac{n(6 - \ln 2 + n\ln 2)}{2}$$

التمرين 176

(u_n) متتالية حسابية متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

حيث:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases}$$

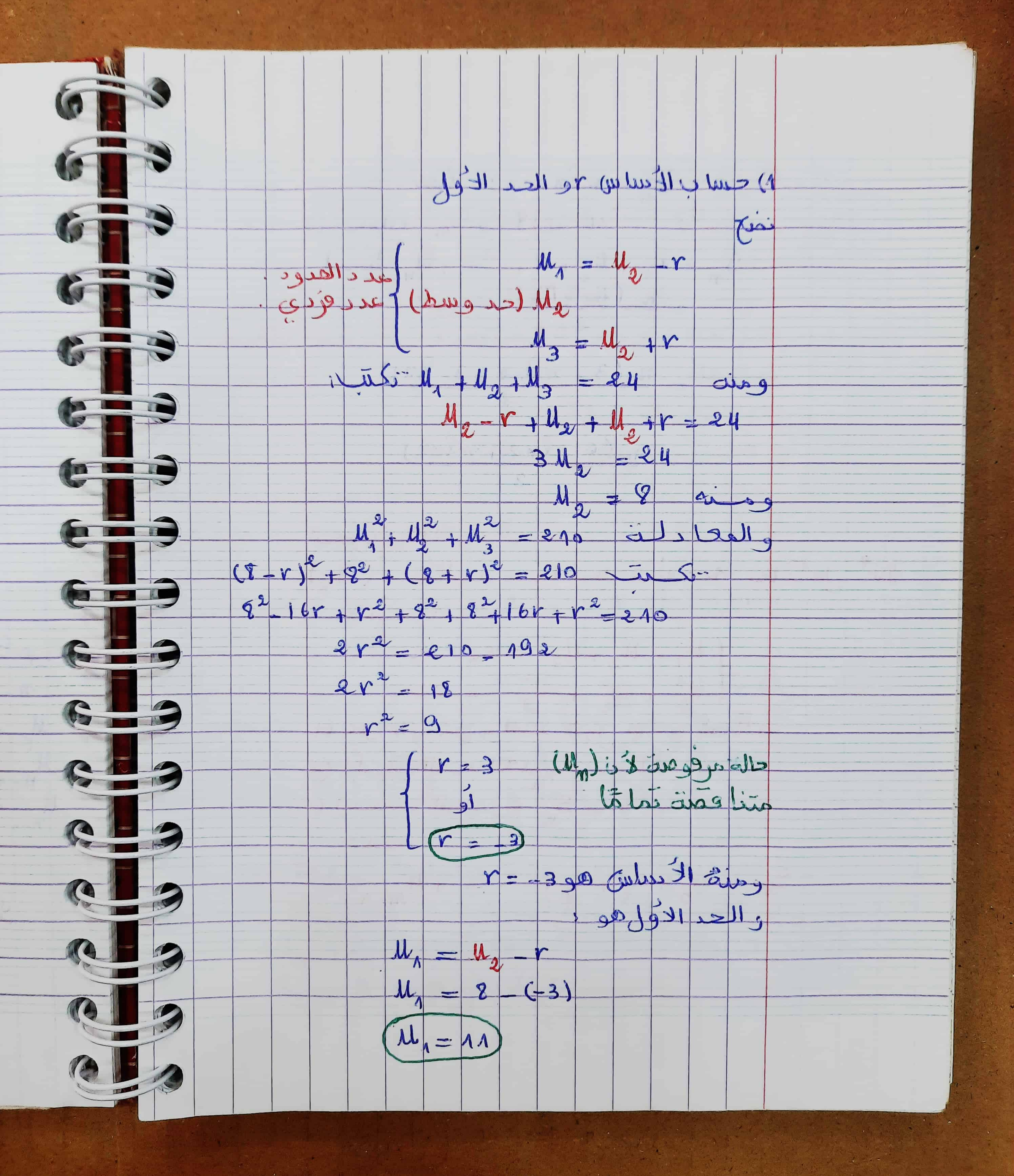
1) عين الأساس والحد الأول لهذه المتتالية

2) أكتب الحد العام u_n بدلالة n

3) احسب المجموع S_n بدلالة n

حيث

$$S_n = u_5 + u_6 + u_7 + \dots + u_{n-1}$$



1) حساب الأساس r و الحد الأول

نضع

$$\begin{cases} u_1 = u_2 - r \\ u_2 \ (\text{حد وسط}) \\ u_3 = u_2 + r \end{cases}$$

عدد الحدود عدد فردي.

ومنه نكتب: $u_1 + u_2 + u_3 = 24$

$$u_2 - r + u_2 + u_2 + r = 24$$

$$3u_2 = 24$$

ومنه $u_2 = 8$

والمعادلة $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210$

نكتب $(8-r)^2 + 8^2 + (8+r)^2 = 210$

$$8^2 - 16r + r^2 + 8^2 + 8^2 + 16r + r^2 = 210$$

$$2r^2 = 210 - 192$$

$$2r^2 = 18$$

$$r^2 = 9$$

$$\begin{cases} r = 3 \\ \text{أو} \\ r = -3 \end{cases}$$

$r = 3$ حالة مرفوضة لأن (u_n) متناقصة تماما

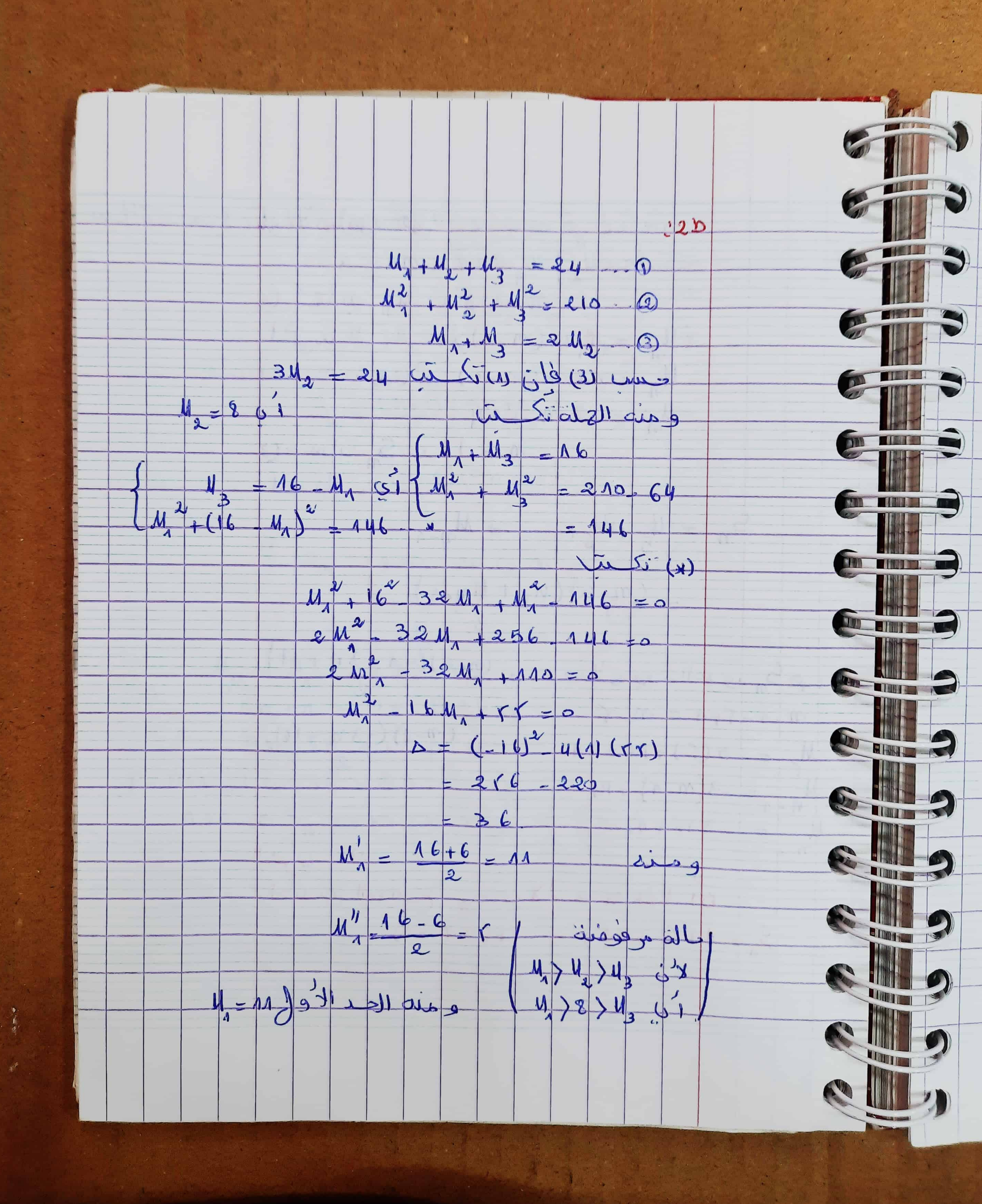
ومنه الأساس هو $r = -3$

و الحد الأول هو:

$$u_1 = u_2 - r$$

$$u_1 = 8 - (-3)$$

$$u_1 = 11$$



حل 2:

$u_1+u_2+u_3=24 \ldots (1)$

$u_1^2+u_2^2+u_3^2=210 \ldots (2)$

$u_1+u_3=2u_2 \ldots (3)$

حسب (3) فإن (1) تكتب $3u_2=24$

أي $u_2=8$

ومنه الجملة تكتب

$\begin{cases} u_1+u_3=16 \\ u_1^2+u_3^2=210-64 \\ \qquad =146 \end{cases}$ أي $\begin{cases} u_3=16-u_1 \\ u_1^2+(16-u_1)^2=146 \ldots (*) \end{cases}$

(*) تكتب

$u_1^2+16^2-32u_1+u_1^2-146=0$

$2u_1^2-32u_1+256-146=0$

$2u_1^2-32u_1+110=0$

$u_1^2-16u_1+55=0$

$\Delta=(-16)^2-4(1)(55)$

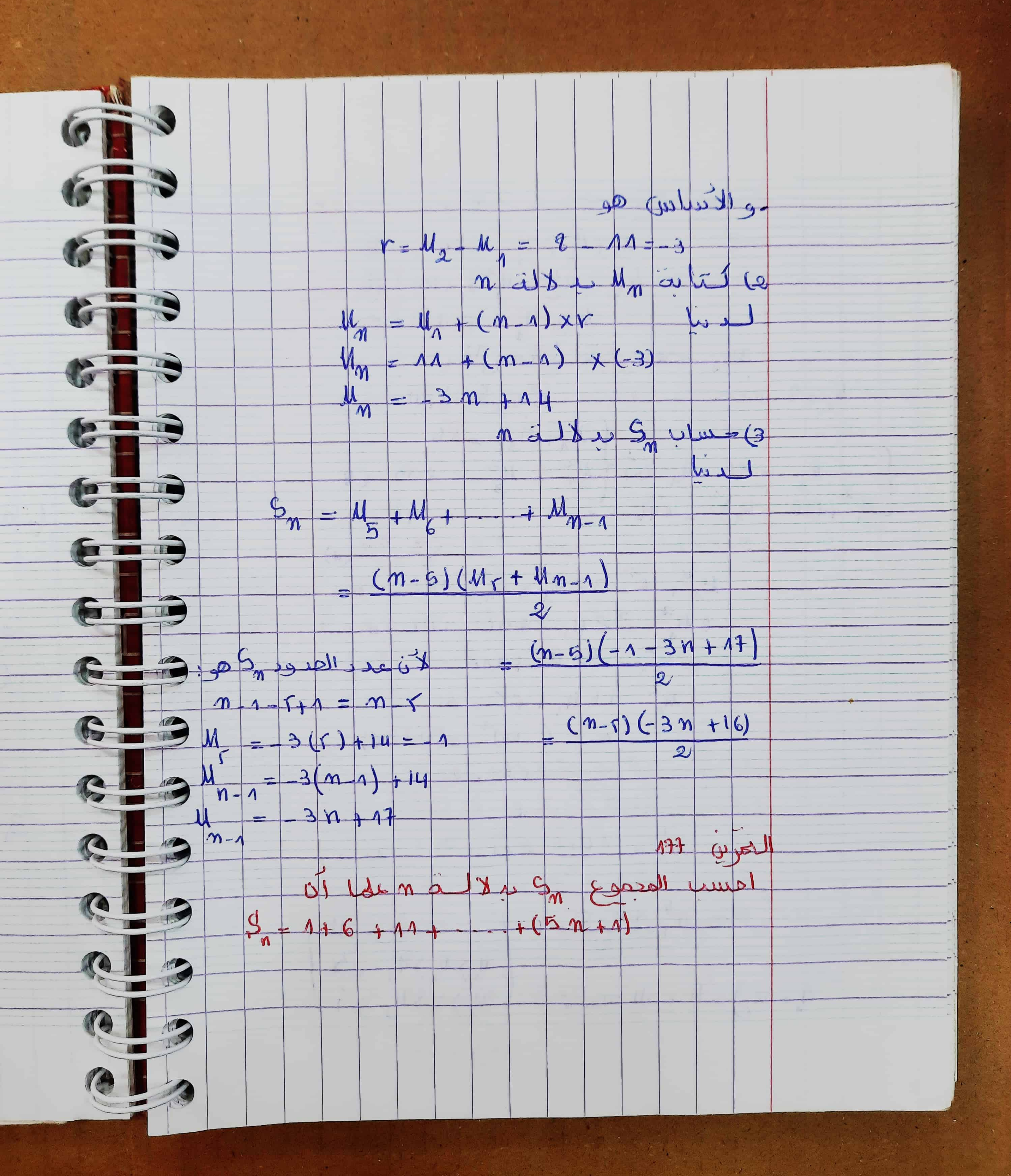
$=256-220$

$=36$

ومنه $u_1'=\frac{16+6}{2}=11$

$u_1''=\frac{16-6}{2}=5$ حالة مرفوضة لأن $u_1>u_2>u_3$ أي $u_1>8>u_3$

ومنه الحد الأول $u_1=11$



و الأساس هو

$r = u_2 - u_1 = 8 - 11 = -3$

2) كتابة u_n بدلالة n

لدينا

$u_n = u_1 + (n-1) \times r$

$u_n = 11 + (n-1) \times (-3)$

$u_n = -3n + 14$

3) حساب S_n بدلالة n

لدينا

$S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_{n-1}$

$= \frac{(n-5)(u_5 + u_{n-1})}{2}$

$= \frac{(n-5)(-1 - 3n + 17)}{2}$

$= \frac{(n-5)(-3n + 16)}{2}$

لأن عدد الحدود S_n هو:

$n - 1 - 5 + 1 = n - 5$

$u_5 = -3(5) + 14 = -1$

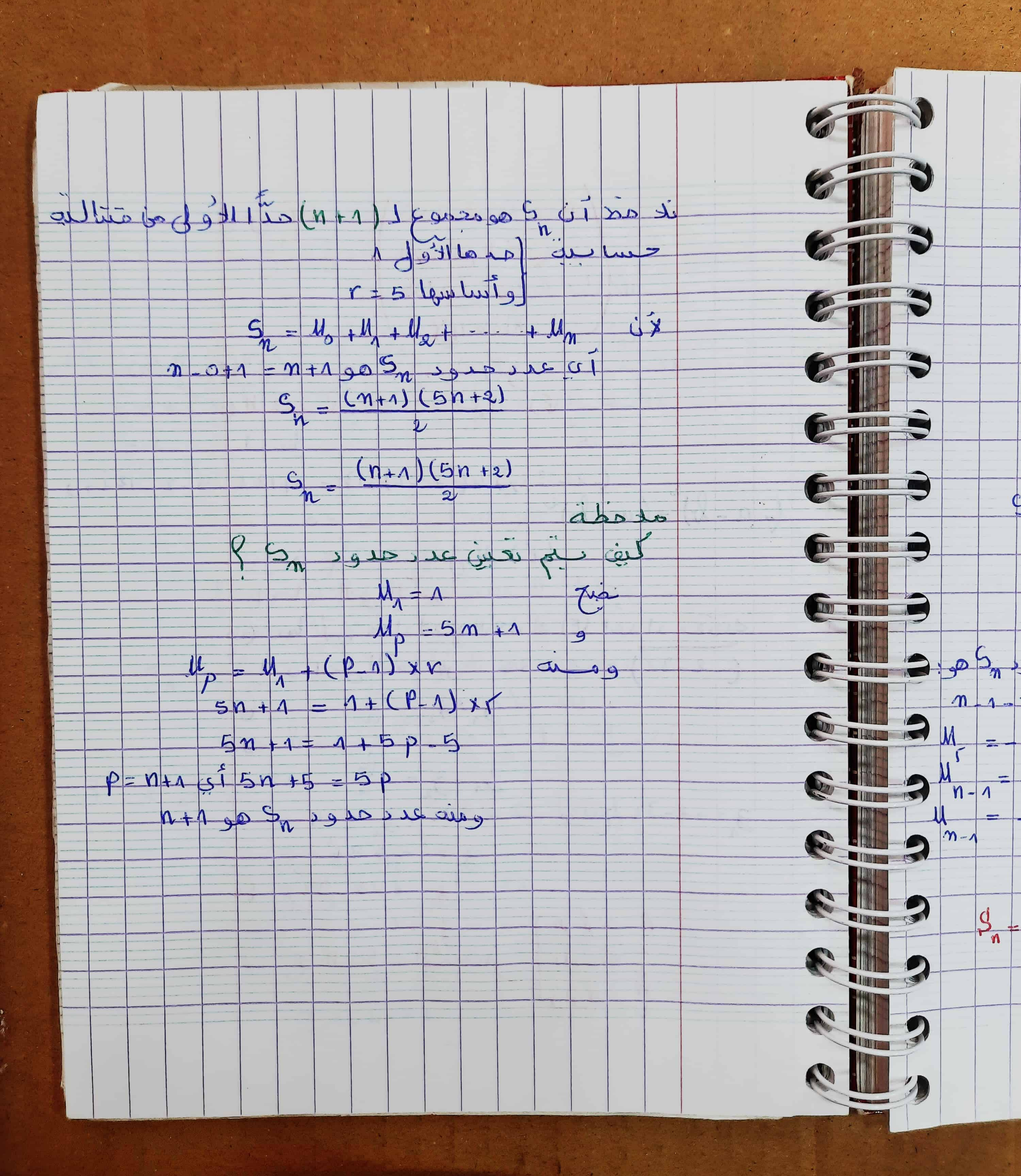
$u_{n-1} = -3(n-1) + 14$

$u_{n-1} = -3n + 17$

التمرين 177

احسب المجموع S_n بدلالة n علما أن

$S_n = 1 + 6 + 11 + \dots + (5n + 1)$



نلاحظ أن S_n هو مجموع لـ $(n+1)$ حداً الأولى من متتالية حسابية

حدها الأول 1

وأساسها $r = 5$

لأن $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

أي عدد حدود S_n هو $n+1$ ، $n-0+1 = n+1$

$$S_n = \frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$

ملاحظة

كيف يتم تعيين عدد حدود S_n ؟

نضع $u_1 = 1$

و $u_p = 5n+1$

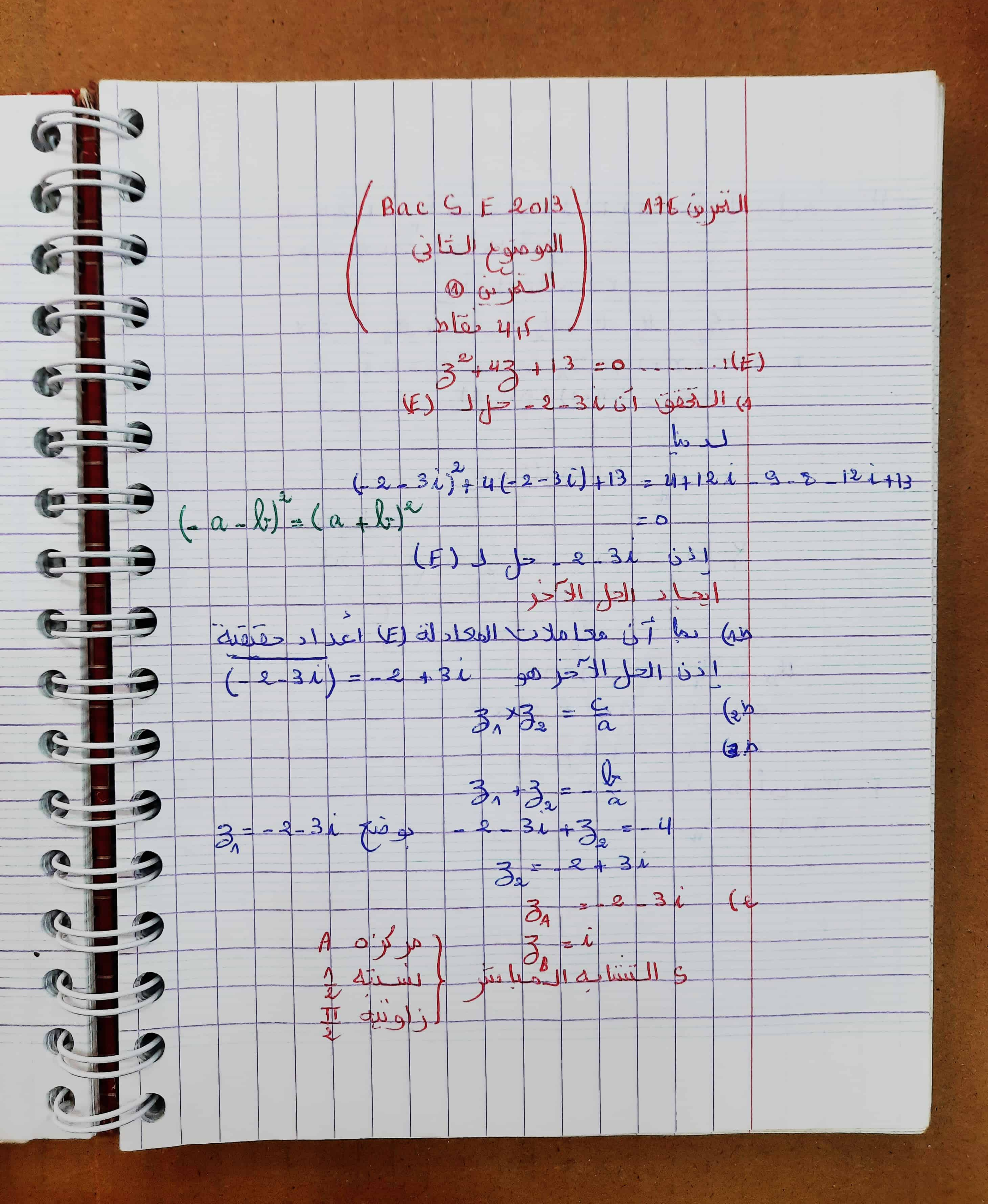
ومنه $u_p = u_1 + (p-1)\times r$

$$5n+1 = 1+(p-1)\times r$$

$$5n+1 = 1+5p-5$$

$5n+5 = 5p$ أي $p = n+1$

ومنه عدد حدود S_n هو $n+1$



التمرين 174

Bac S.E 2013
الموضوع الثاني
التمرين ①
4,5 نقاط

$z^2+4z+13=0 \quad \ldots (E)$

1) التحقق أن $-2-3i$ حل لـ (E)

لدينا

$(-2-3i)^2+4(-2-3i)+13 = 4+12i-9-8-12i+13$
$=0$

$(-a-b)^2=(a+b)^2$

إذن $-2-3i$ حل لـ (E)

إيجاد الحل الآخر

ط1) بما أن معاملات المعادلة (E) أعداد حقيقية

إذن الحل الآخر هو $\overline{(-2-3i)} = -2+3i$

ط2) $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

ط3)

$z_1+z_2=-\frac{b}{a}$

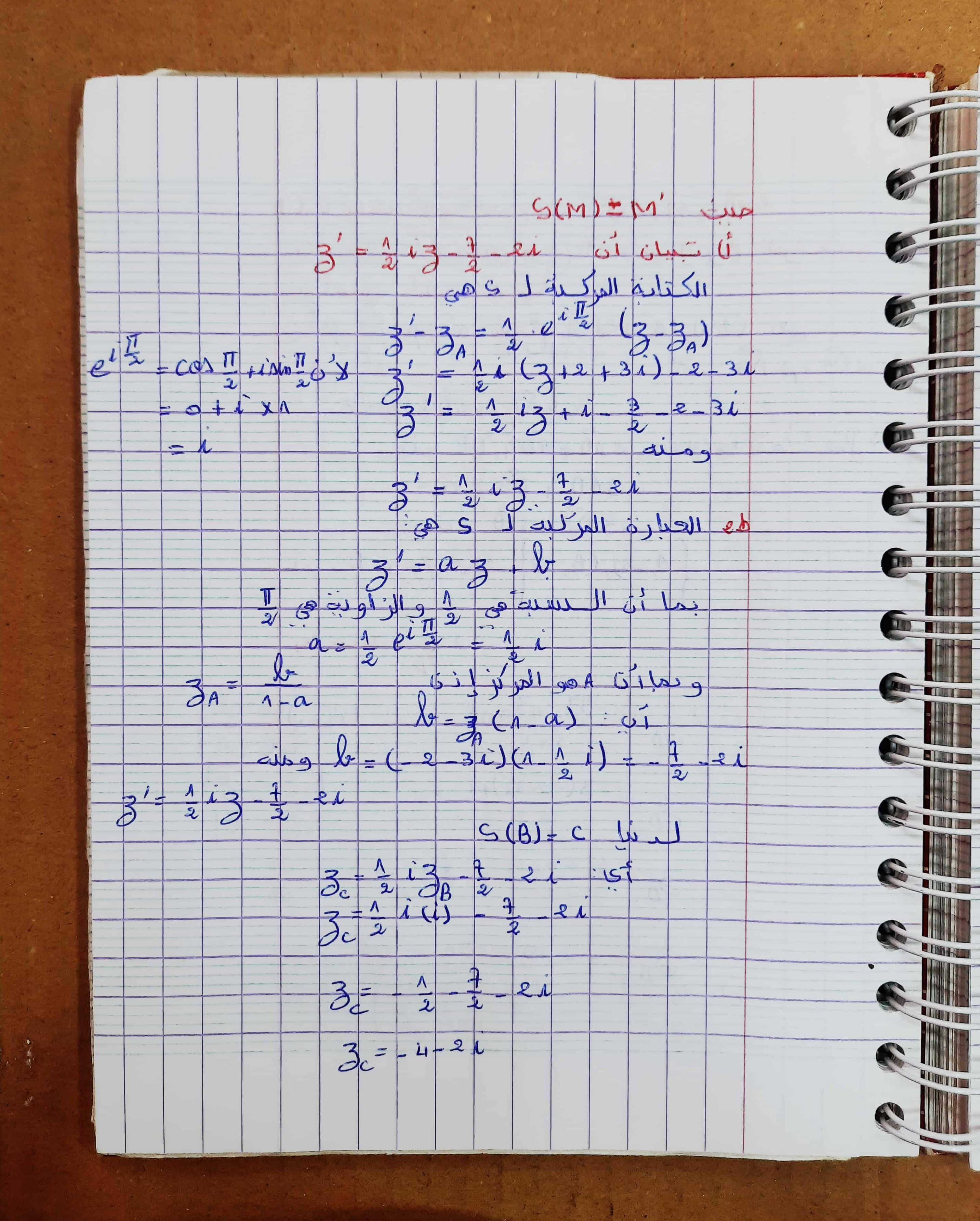
بوضع $z_1=-2-3i$ $\quad -2-3i+z_2=-4$

$z_2=-2+3i$

2) $z_A=-2-3i$

$z_B=i$

S التشابه المباشر: مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$، زاويته $\frac{\pi}{2}$



حيث $S(M) = M'$

أ) تبيان أن $z' = \frac{1}{2} i z - \frac{7}{2} - 2i$

الكتابة المركبة لـ S هي

$$z' - z_A = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_A)$$

$$z' = \frac{1}{2} i (z + 2 + 3i) - 2 - 3i$$

لأن $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \times 1 = i$

$$z' = \frac{1}{2} i z + i - \frac{3}{2} - 2 - 3i$$

ومنه

$$z' = \frac{1}{2} i z - \frac{7}{2} - 2i$$

ب) العبارة المركبة لـ S هي:

$$z' = az + b$$

بما أن النسبة هي $\frac{1}{2}$ والزاوية هي $\frac{\pi}{2}$

$$a = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} i$$

وبما أن A هو المركز إذن $z_A = \frac{b}{1-a}$

أي: $b = z_A (1 - a)$

$b = (-2 - 3i)(1 - \frac{1}{2} i) = -\frac{7}{2} - 2i$ ومنه

$$z' = \frac{1}{2} i z - \frac{7}{2} - 2i$$

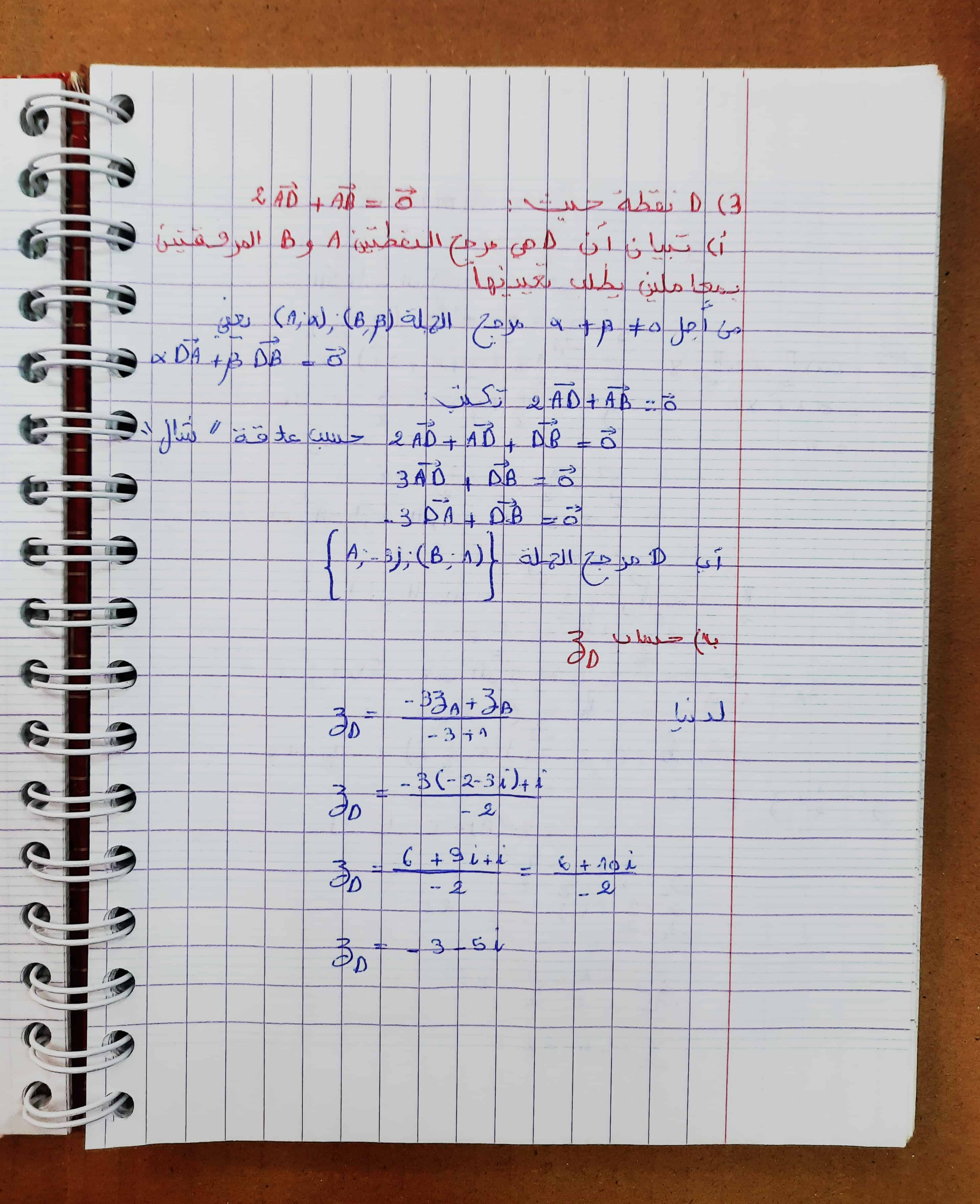
لدينا $S(B) = C$

أي: $z_C = \frac{1}{2} i z_B - \frac{7}{2} - 2i$

$$z_C = \frac{1}{2} i (i) - \frac{7}{2} - 2i$$

$$z_C = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} - 2i$$

$$z_C = -4 - 2i$$



3) D نقطة حيث: $2\vec{AD}+\vec{AB}=\vec{0}$

أ) تبيان أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينها

من أجل $\alpha+\beta\neq 0$ مرجح الجملة $(A;\alpha);(B;\beta)$ يعني

$\alpha\vec{DA}+\beta\vec{DB}=\vec{0}$

تكتب: $2\vec{AD}+\vec{AB}=\vec{0}$

$2\vec{AD}+\vec{AD}+\vec{DB}=\vec{0}$ حسب علاقة "شال"

$3\vec{AD}+\vec{DB}=\vec{0}$

$-3\vec{DA}+\vec{DB}=\vec{0}$

أي D مرجح الجملة $\{(A;-3);(B;1)\}$

ب) حساب z_D

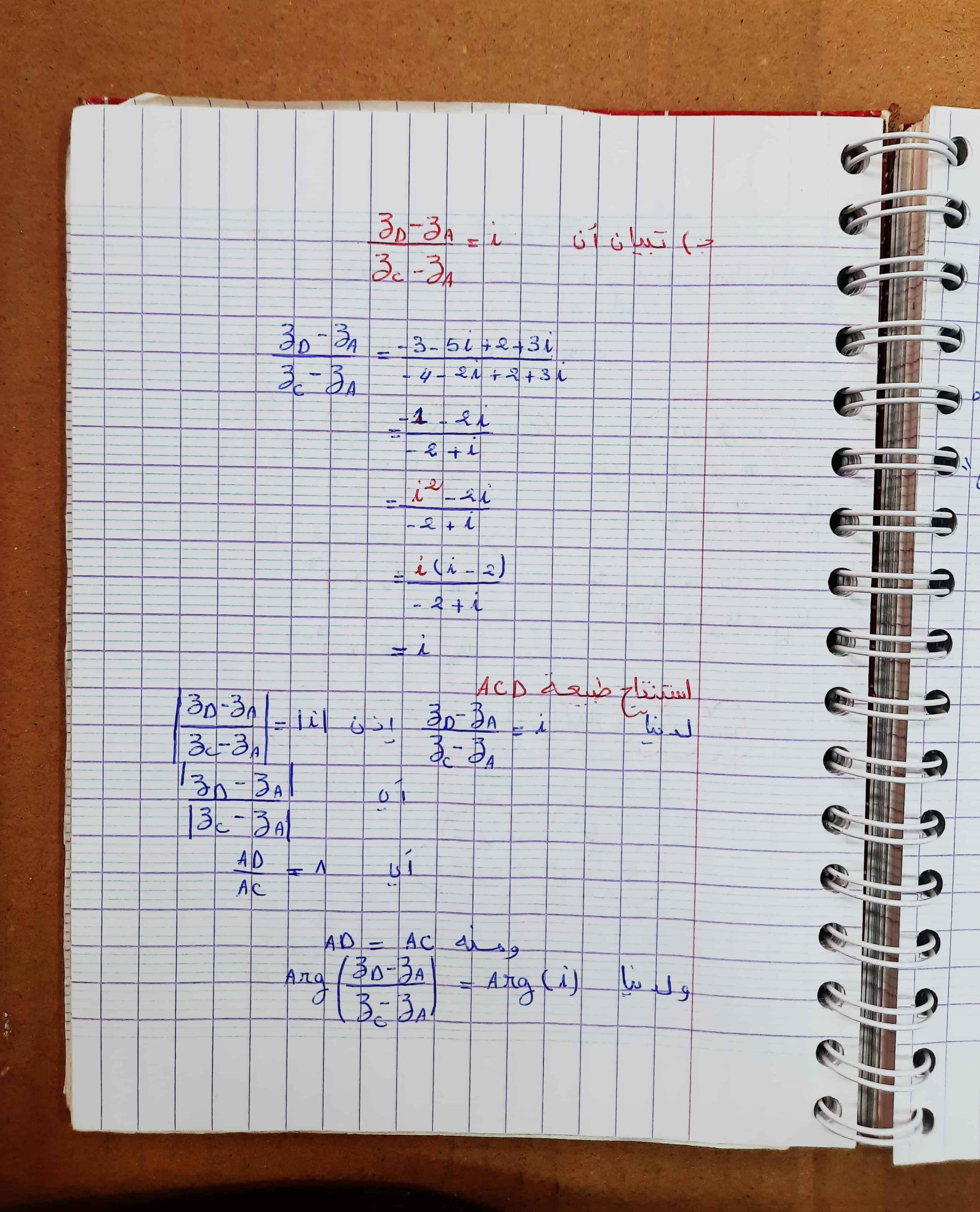
لدينا

$$z_D=\frac{-3z_A+z_B}{-3+1}$$

$$z_D=\frac{-3(-2-3i)+i}{-2}$$

$$z_D=\frac{6+9i+i}{-2}=\frac{6+10i}{-2}$$

$$z_D=-3-5i$$



ج) تبيان أن $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-3-5i+2+3i}{-4-2i+2+3i}$$

$$= \frac{-1-2i}{-2+i}$$

$$= \frac{i^2-2i}{-2+i}$$

$$= \frac{i(i-2)}{-2+i}$$

$$= i$$

استنتاج طبيعة ACD

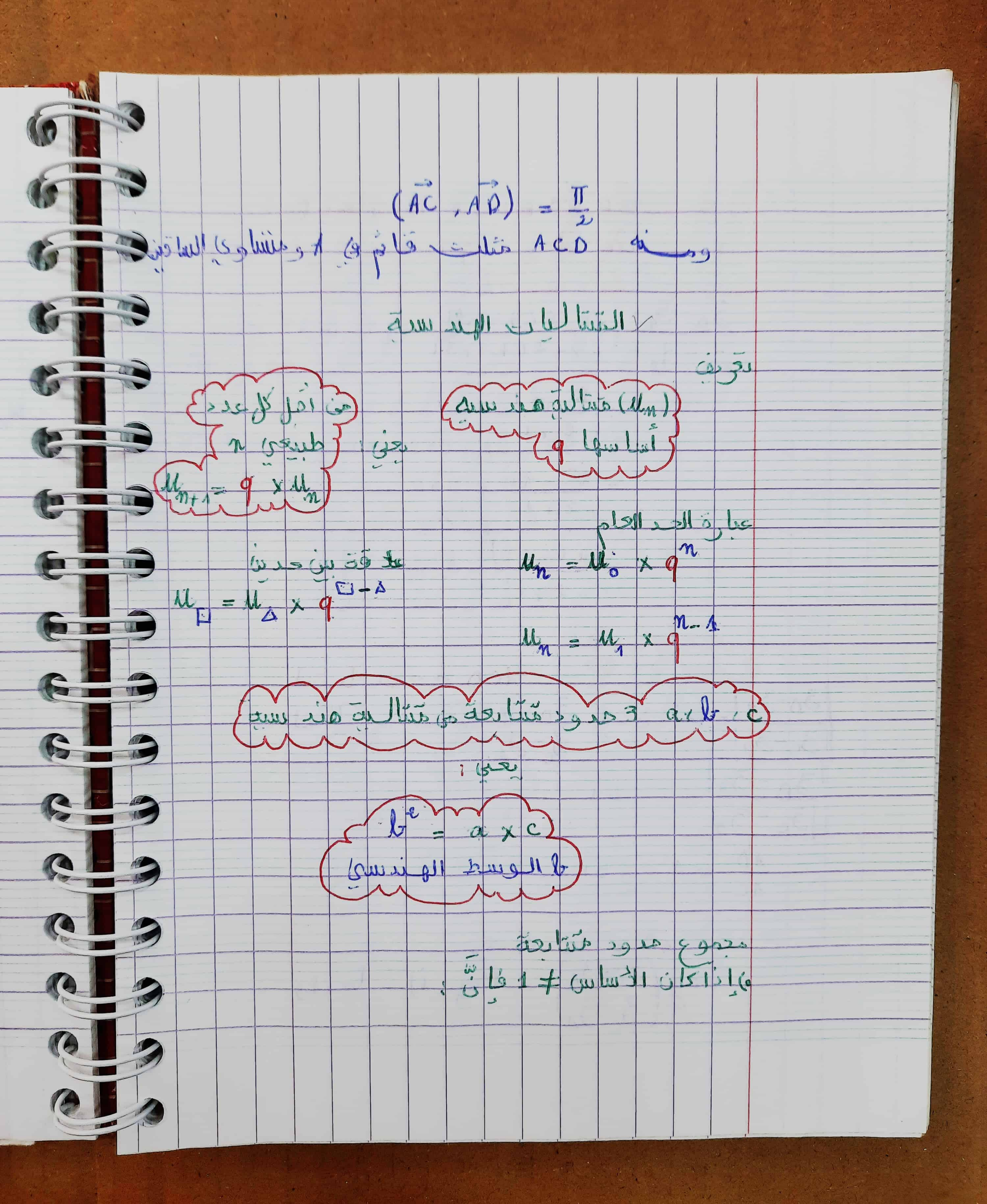
لدينا $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ إذن $\left|\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right| = |i|$

أي $\frac{|z_D - z_A|}{|z_C - z_A|}$

أي $\frac{AD}{AC} = 1$

ومنه $AD = AC$

ولدينا $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(i)$



$$(\vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه ACD مثلث قائم في A ومتساوي الساقين

المتتاليات الهندسية

تعريف

(u_n) متتالية هندسية أساسها q

يعني : من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

عبارة الحد العام

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

علاقة بين حدين

$$u_\square = u_\triangle \times q^{\square - \triangle}$$

a ، b ، c 3 حدود متتابعة من متتالية هندسية

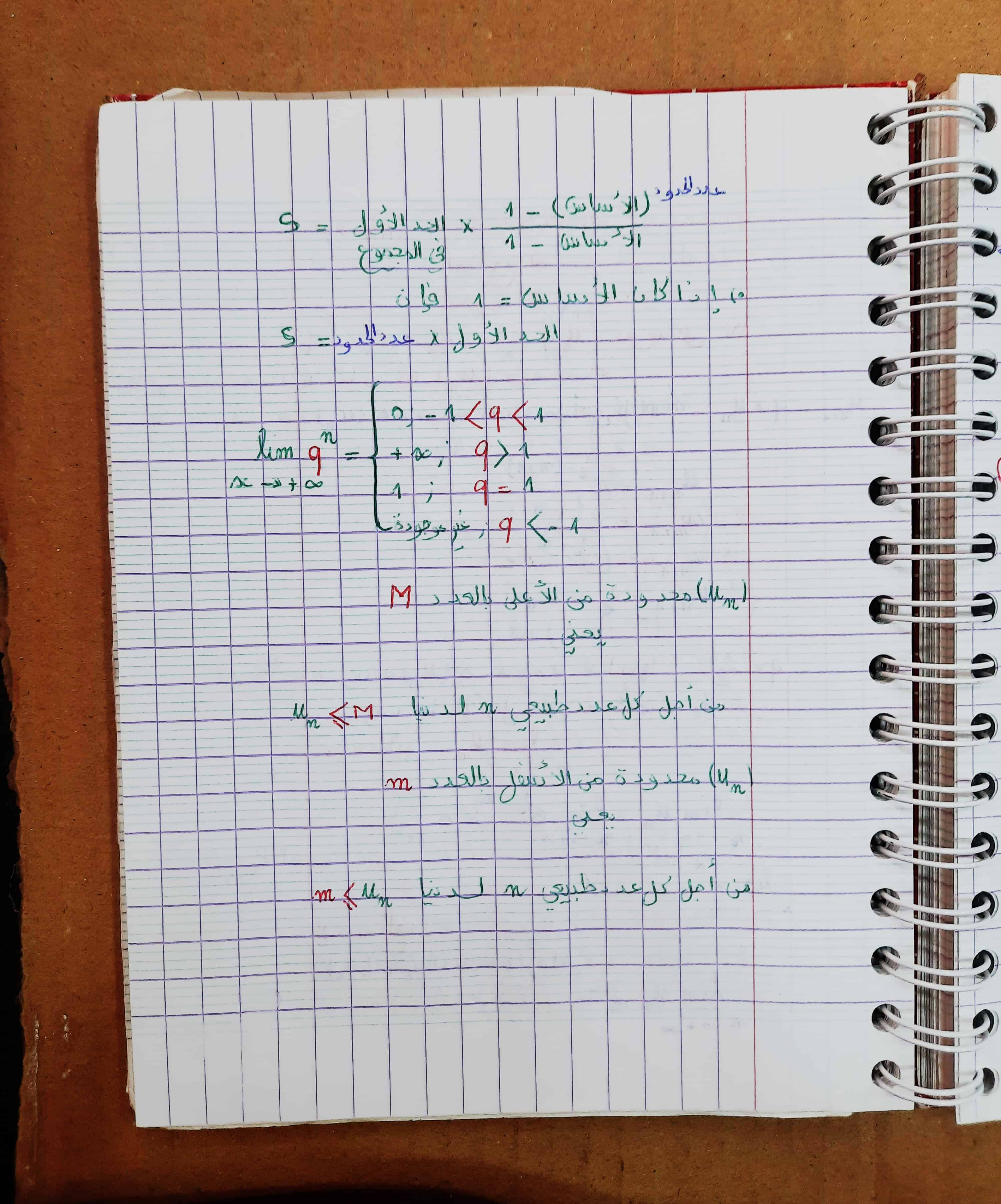
يعني :

$$b^2 = a \times c$$

b الوسط الهندسي

مجموع حدود متتابعة

إذا كان الأساس $\neq 1$ فإن :



$$S = \text{الحد الأول في المجموع} \times \frac{1 - (\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}$$

• إذا كان الأساس $= 1$ فإن

$$S = \text{الحد الأول} \times \text{عدد الحدود}$$

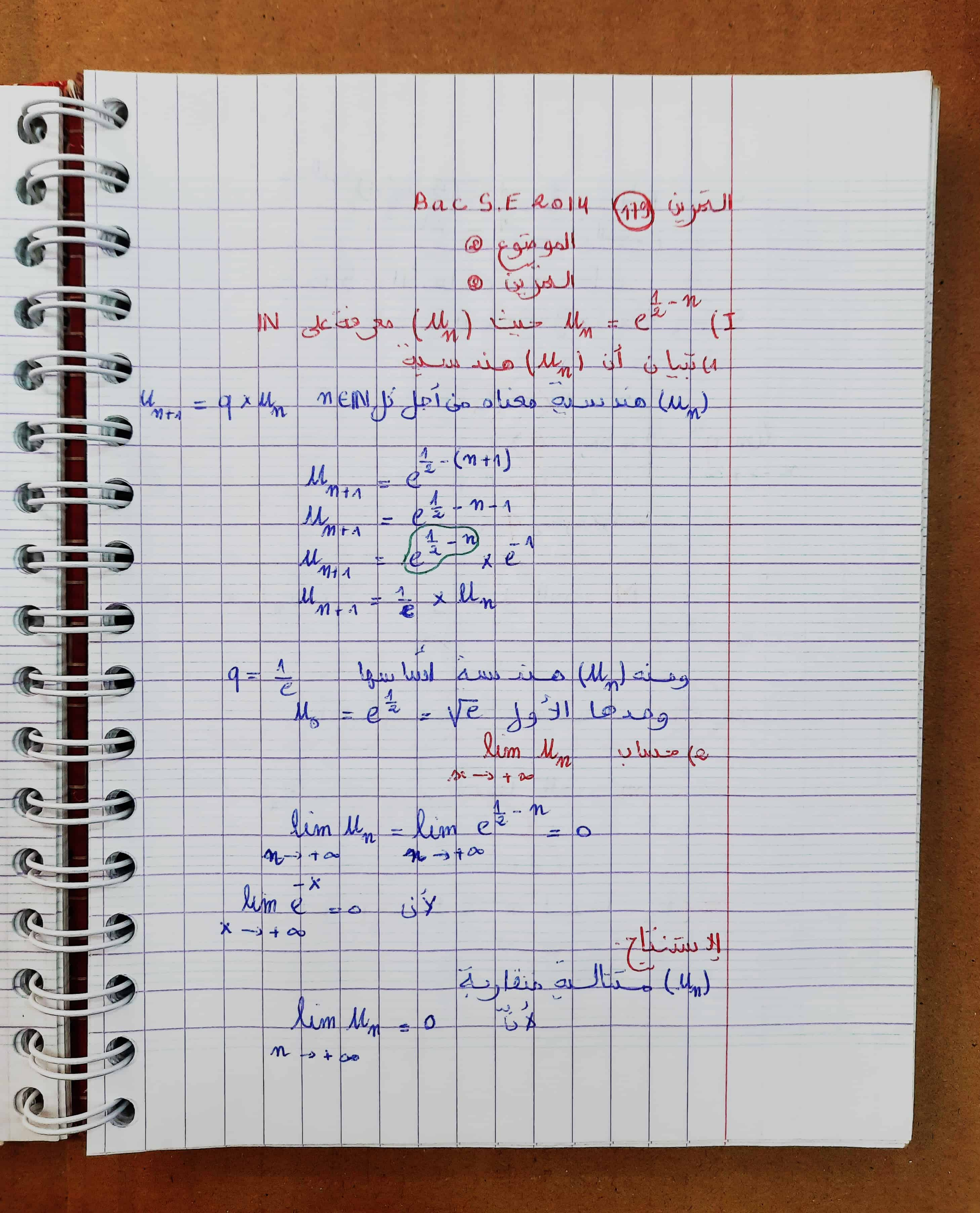
$$\lim_{x \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 \ ; & -1 < q < 1 \\ +\infty \ ; & q > 1 \\ 1 \ ; & q = 1 \\ \text{غير موجودة} \ ; & q < -1 \end{cases}$$

(u_n) محدودة من الأعلى بالعدد M يعني

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n \leq M$

(u_n) محدودة من الأسفل بالعدد m يعني

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $m \leq u_n$



Bac S.E 2014 التمرين 179

الموضوع 2

التمرين 1

I) (u_n) حيث $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ معرفة على $\mathbb{N}$

1) تبيان أن (u_n) هندسية

(u_n) هندسية معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = q \times u_n$

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)}$$

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-n-1}$$

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-n} \times e^{-1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{e} \times u_n$$

ومنه (u_n) هندسة أساسها $q = \frac{1}{e}$

وحدها الأول $u_0 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

2) حساب $\lim_{x \to +\infty} u_n$

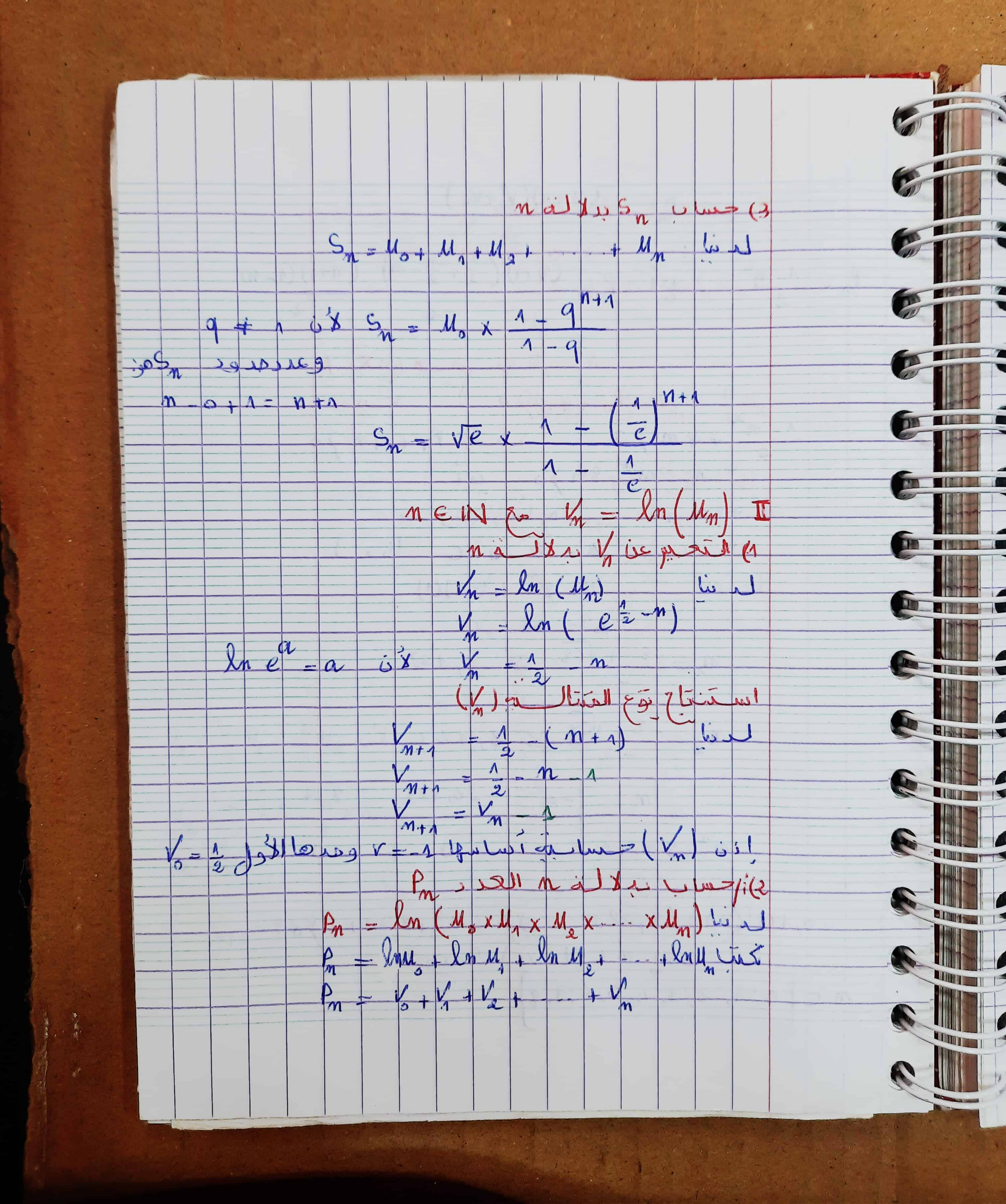
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = 0$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

الاستنتاج:

(u_n) متتالية متقاربة

لأن $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$



3) حساب S_n بدلالة n

لدينا $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ لأن $q \neq 1$

و عدد حدود S_n هو $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = \sqrt{e} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}}$$

II $V_n = \ln(u_n)$ مع $n \in \mathbb{N}$

1) التعبير عن V_n بدلالة n

لدينا $V_n = \ln(u_n)$

$V_n = \ln\left(e^{\frac{1}{2} - n}\right)$

$V_n = \frac{1}{2} - n$ لأن $\ln e^a = a$

استنتاج نوع المتتالية (V_n)

لدينا $V_{n+1} = \frac{1}{2} - (n+1)$

$V_{n+1} = \frac{1}{2} - n - 1$

$V_{n+1} = V_n - 1$

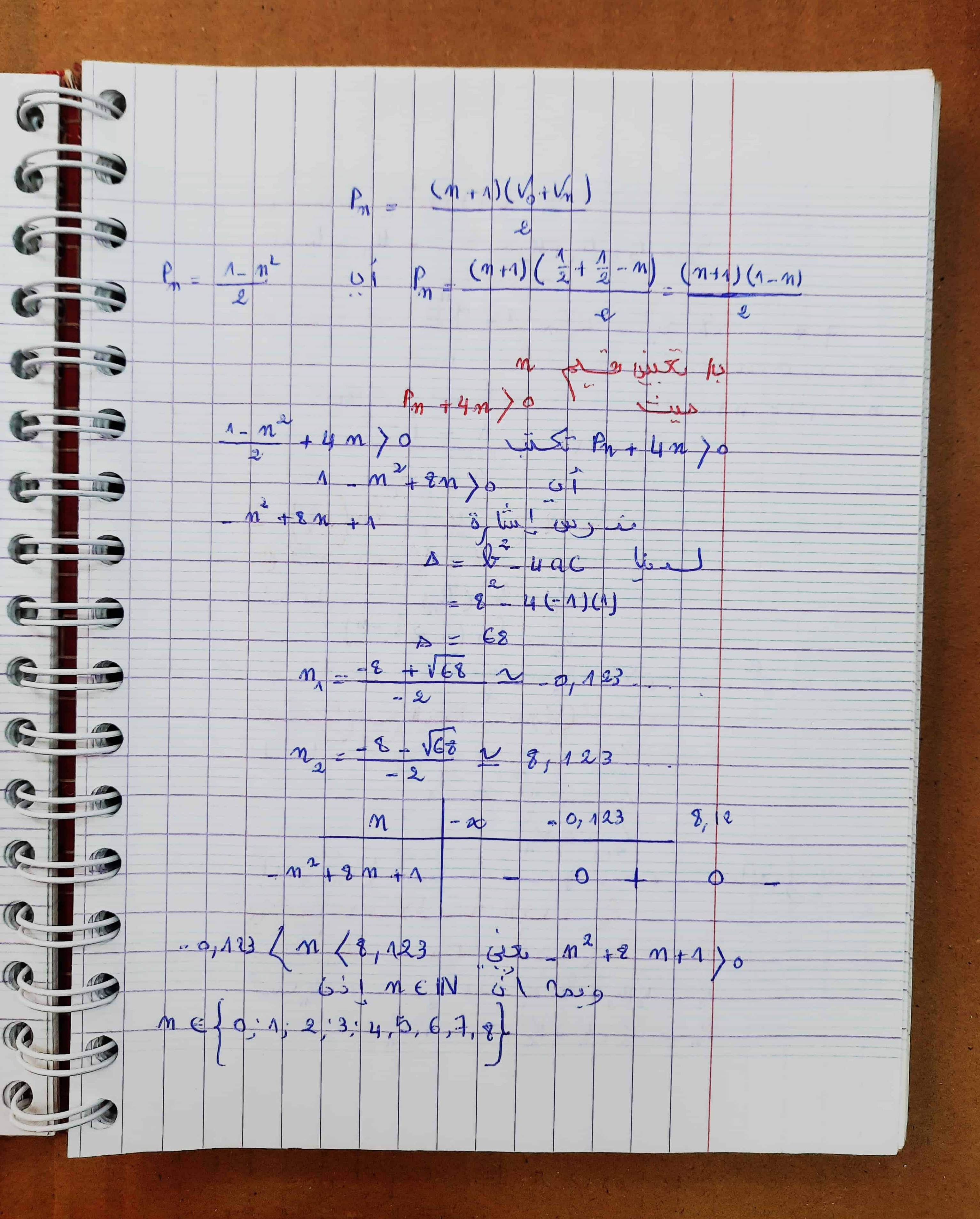
إذن (V_n) حسابية أساسها $r = -1$ وحدها الأول $V_0 = \frac{1}{2}$

2) أ) حساب بدلالة n العدد P_n

لدينا $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$

نكتب $P_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_n$

$P_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$



$$P_n = \frac{(n+1)(V_0+V_n)}{2}$$

أي $P_n = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n\right)}{2} = \frac{(n+1)(1-n)}{2}$

$$P_n = \frac{1-n^2}{2}$$

ب/ تعيين قيم n حيث $P_n + 4n > 0$

نكتب $P_n + 4n > 0$

$$\frac{1-n^2}{2} + 4n > 0$$

أي $1 - n^2 + 8n > 0$

ندرس إشارة $-n^2 + 8n + 1$

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 8^2 - 4(-1)(1)$

$\Delta = 68$

$$n_1 = \frac{-8+\sqrt{68}}{-2} \simeq -0,123$$

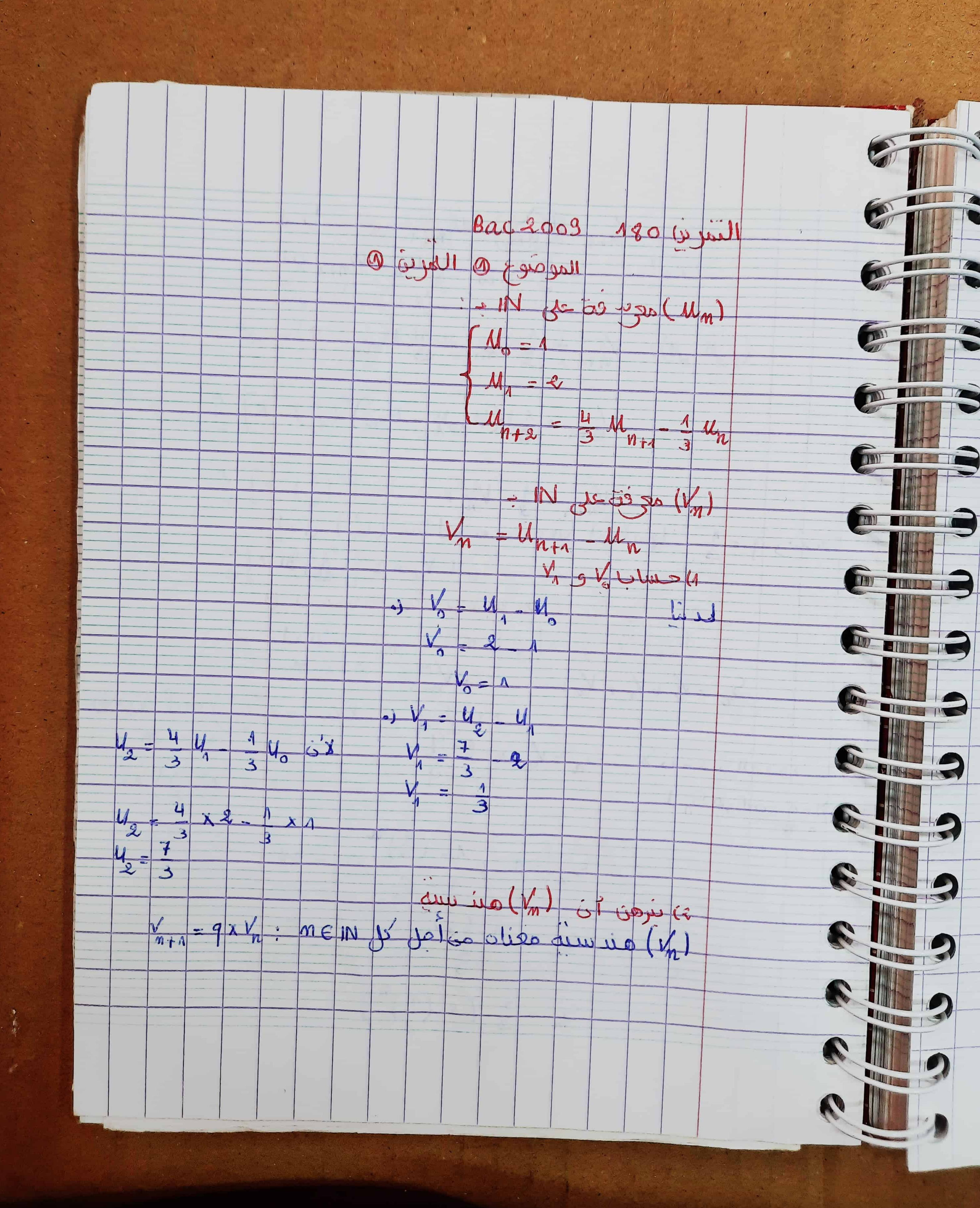
$$n_2 = \frac{-8-\sqrt{68}}{-2} \simeq 8,123$$

n	$-\infty$		$-0,123$		$8,12$	
$-n^2+8n+1$		$-$	0	$+$	0	$-$

$-n^2 + 8n + 1 > 0$ يعني $-0,123 < n < 8,123$

وبما أن $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$n \in \{0; 1; 2; 3; 4, 5, 6, 7, 8\}$$



التمرين 180 Bac 2009

الموضوع ① التمرين ①

(U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 2 \\ U_{n+2} = \frac{4}{3} U_{n+1} - \frac{1}{3} U_n \end{cases}$$

(V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$V_n = U_{n+1} - U_n$$

1) حساب V_0 و V_1

لدينا: $V_0 = U_1 - U_0$

$V_0 = 2 - 1$

$V_0 = 1$

و $V_1 = U_2 - U_1$

$V_1 = \frac{7}{3} - 2$

$V_1 = \frac{1}{3}$

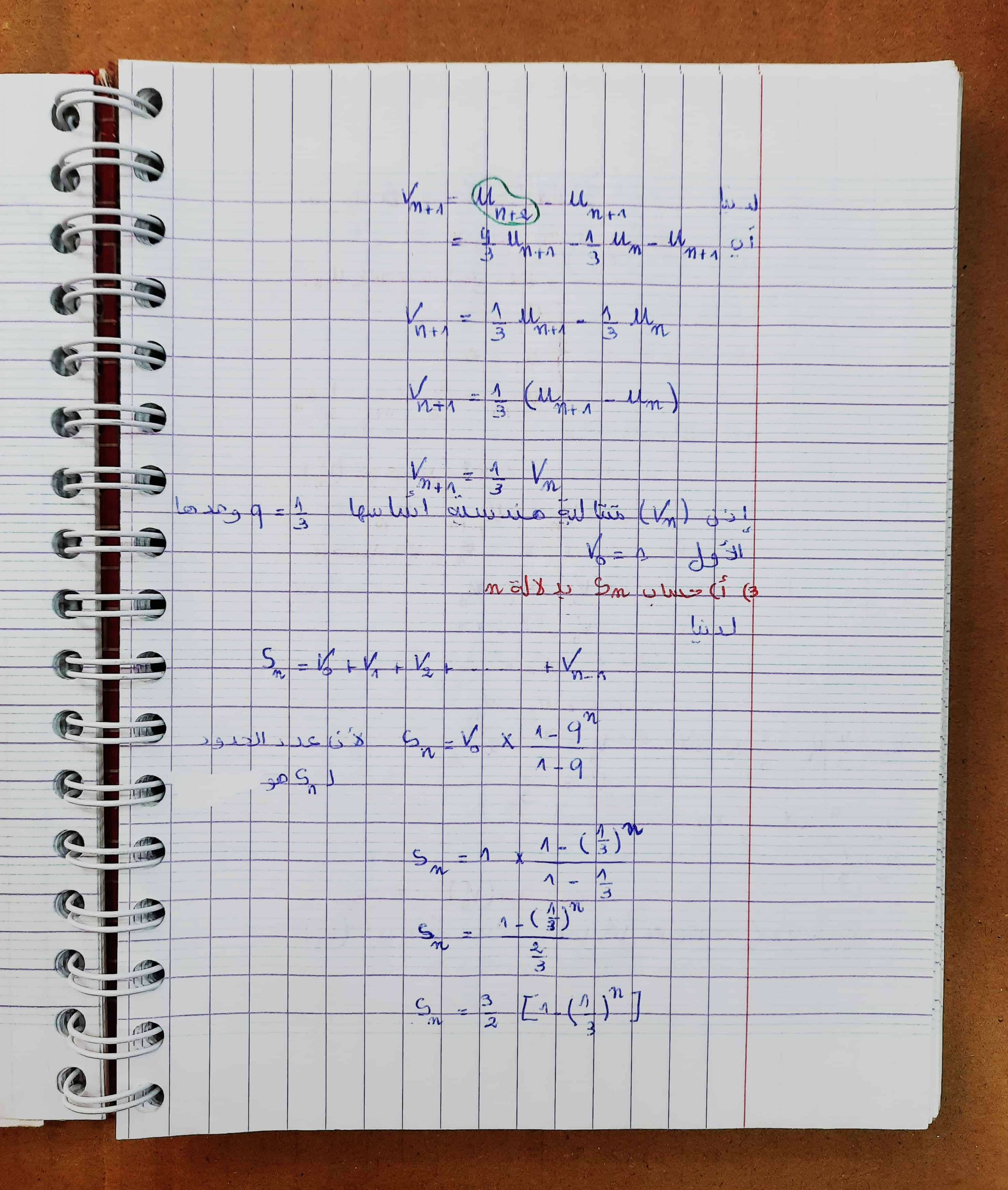
لأن $U_2 = \frac{4}{3} U_1 - \frac{1}{3} U_0$

$U_2 = \frac{4}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 1$

$U_2 = \frac{7}{3}$

2) نبرهن أن (V_n) هندسية

(V_n) هندسية معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} = q \times V_n$



لدينا

$$V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1}$$

أي

$$= \frac{4}{3}U_{n+1} - \frac{1}{3}U_n - U_{n+1}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}U_{n+1} - \frac{1}{3}U_n$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}\left(U_{n+1} - U_n\right)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $V_0 = 1$

3) أ) حساب S_n بدلالة n

لدينا

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$$

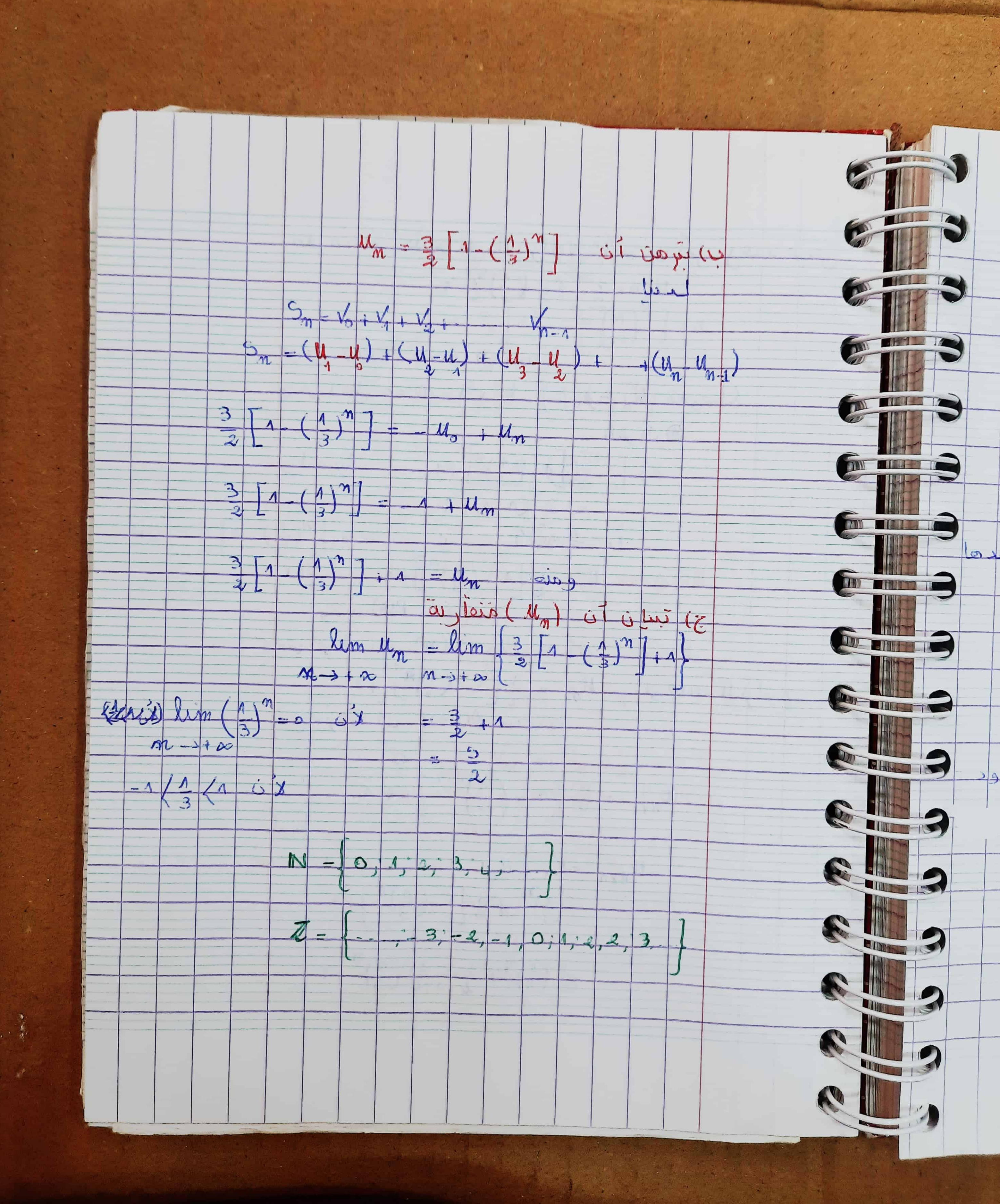
$$S_n = V_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

لأن عدد الحدود لـ S_n هو

$$S_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

$$S_n = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$



ب) نبرهن أن $u_n = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

الحل

$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots V_{n-1}$

$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1})$

$\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = -u_0 + u_n$

$\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = -1 + u_n$

ومنه $\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + 1 = u_n$

ج) تبيان أن (u_n) متقاربة

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left\{\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + 1\right\}$

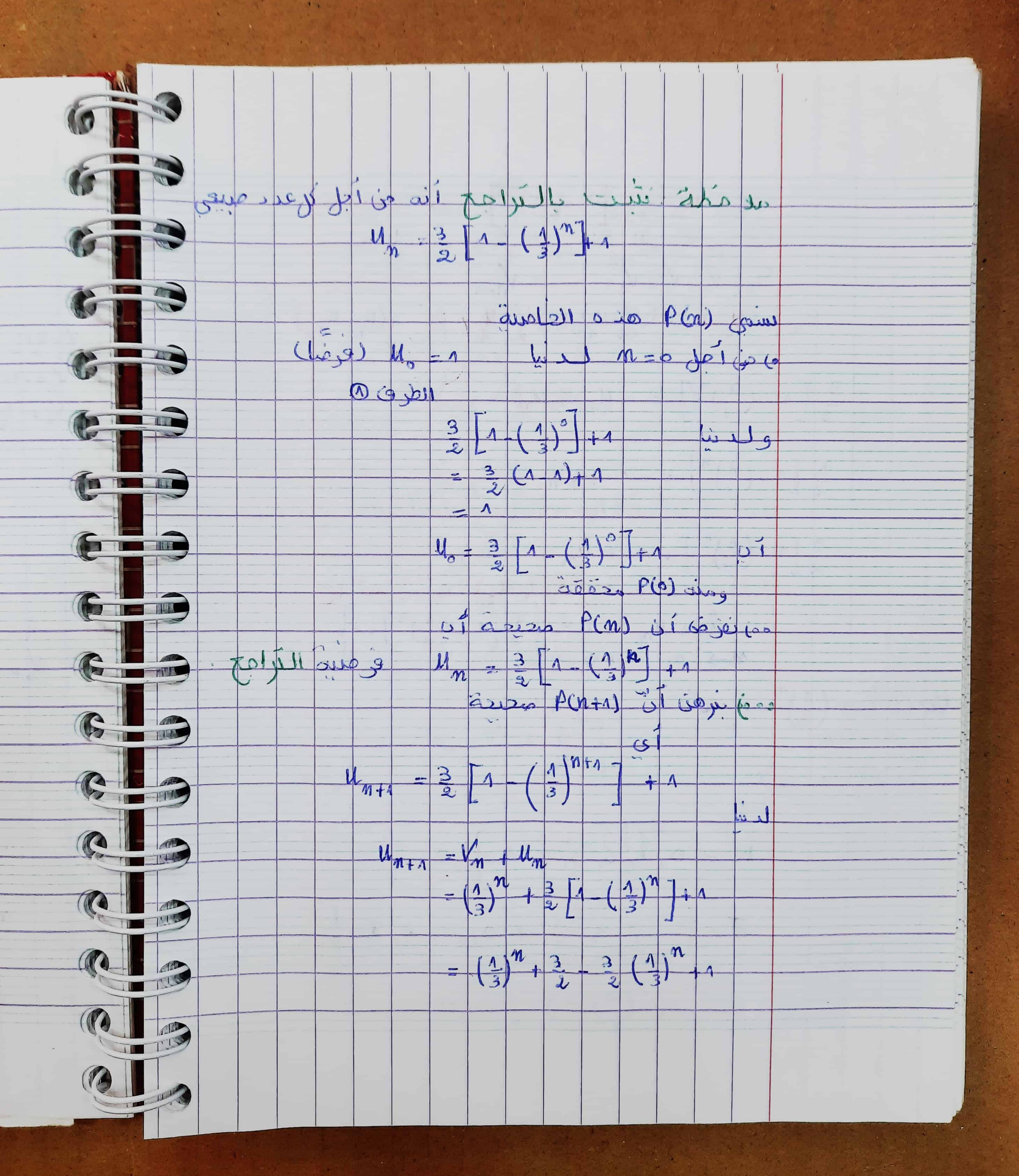
لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ $\qquad = \frac{3}{2} + 1$

$= \frac{5}{2}$

لأن $-1 < \frac{1}{3} < 1$

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2, -1, 0; 1; 2, 2, 3 \dots\}$



نثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي

$$u_n = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+1$$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

1) من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 1$ (فرضاً)

الطرف ①

ولدينا

$$\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^0\right]+1$$
$$= \frac{3}{2}(1-1)+1$$
$$= 1$$

أي

$$u_0 = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^0\right]+1$$

ومنه $P(0)$ محققة

2) نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي

$$u_n = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+1$$

فرضية التراجع

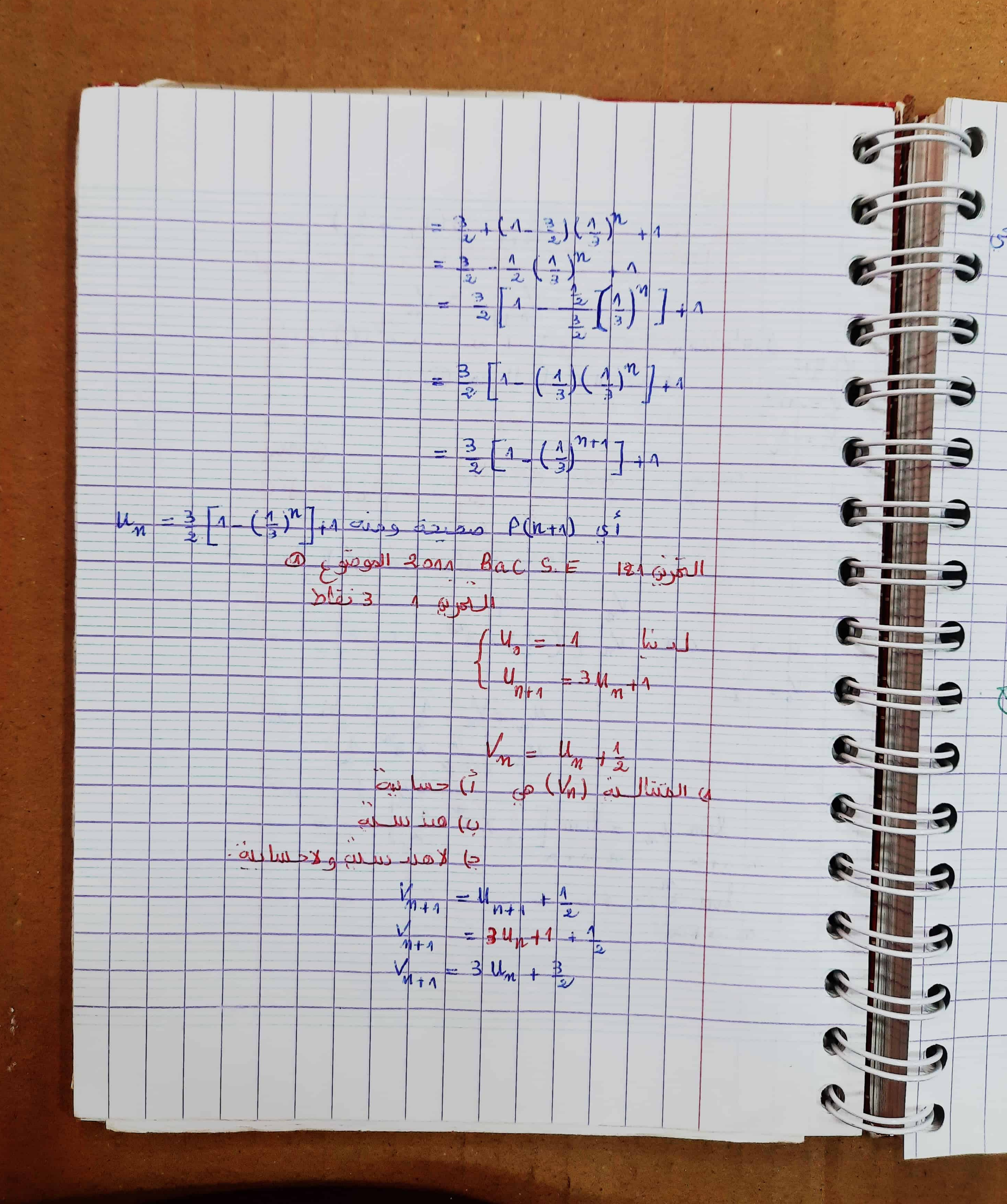
3) نبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة

أي

$$u_{n+1} = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]+1$$

لدينا

$$u_{n+1} = v_n + u_n$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+1$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1$$



$$= \frac{3}{2} + \left(1 - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + 1$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + 1$$

$$= \frac{3}{2}\left[1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right] + 1$$

$$= \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right] + 1$$

$$= \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + 1$$

أي $P(n+1)$ صحيحة ومنه $U_n = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right] + 1$

التمرين 121 Bac S.E 2011 الموضوع ①

التمرين 1 3 نقاط

لدينا $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = 3U_n + 1 \end{cases}$

$$V_n = U_n + \frac{1}{2}$$

1) المتتالية (V_n) هي أ) حسابية

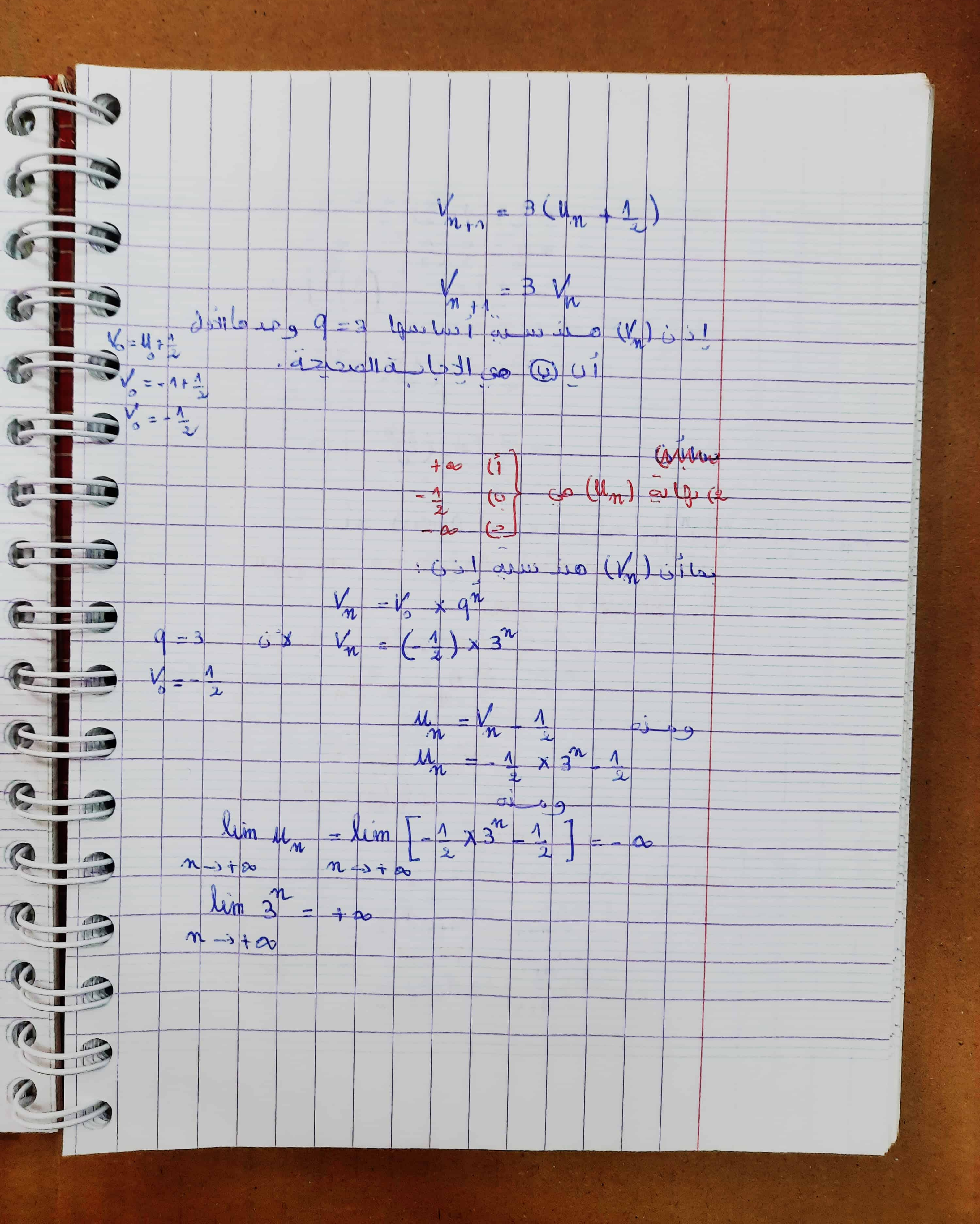
ب) هندسية

ج) لا هندسية ولا حسابية.

$$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{2}$$

$$V_{n+1} = 3U_n + 1 + \frac{1}{2}$$

$$V_{n+1} = 3U_n + \frac{3}{2}$$



$$V_{n+1} = 3\left(U_n + \frac{1}{2}\right)$$

$$V_{n+1} = 3V_n$$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $V_0 = U_0 + \frac{1}{2}$

$V_0 = -1 + \frac{1}{2}$

$V_0 = -\frac{1}{2}$

أي أن (ب) هي الإجابة الصحيحة.

مسألة

2) نهاية (U_n) هي
- أ) $+\infty$
- ب) $-\frac{1}{2}$
- ج) $-\infty$

بما أن (V_n) متتالية هندسية إذن:

$$V_n = V_0 \times q^n$$

$$V_n = \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3^n \quad \text{مع} \quad q = 3, \quad V_0 = -\frac{1}{2}$$

ومنه

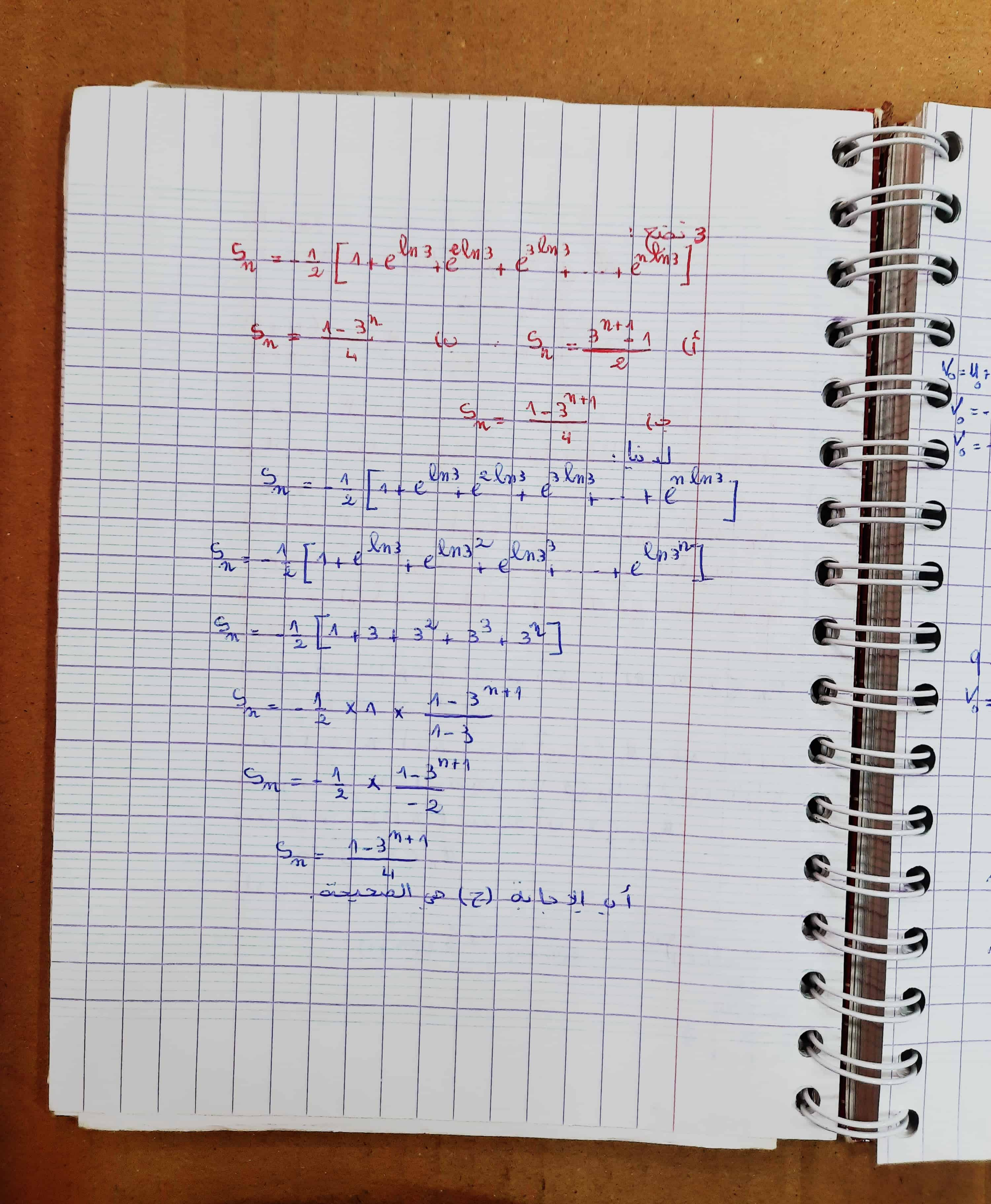
$$U_n = V_n - \frac{1}{2}$$

$$U_n = -\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$$

ومنه

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}\right] = -\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$$



3 نضع :

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}\right]$$

أ) $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$. ب) $S_n = \frac{1 - 3^{n}}{4}$

ج) $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

لدينا :

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}\right]$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{\ln 3^2} + e^{\ln 3^3} + \dots + e^{\ln 3^n}\right]$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^n\right]$$

$$S_n = -\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3}$$

$$S_n = -\frac{1}{2} \times \frac{1 - 3^{n+1}}{-2}$$

$$S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$$

أي الإجابة (ج) هي الصحيحة .

التمرين

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$$\begin{cases} U_1 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع أن (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3

2) أدرس إتجاه تغير المتتالية مستنتجا أنها متقاربة واحسب نهايتها

3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بـ $V_n = n(3 - U_n)$

برهن أن (V_n) هندسية ، حدد عناصرها

4) عبر عن (V_n) و (U_n) بدلالة n ثم احسب نهايتها (U_n)

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n \leqslant 3$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

أ) من أجل $n = 1$ لدينا $U_1 = -1$ أي $U_1 \leqslant 3$ ومنه $P(1)$ محققة

ب) نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $U_n \leqslant 3$ (فرضية التراجع)

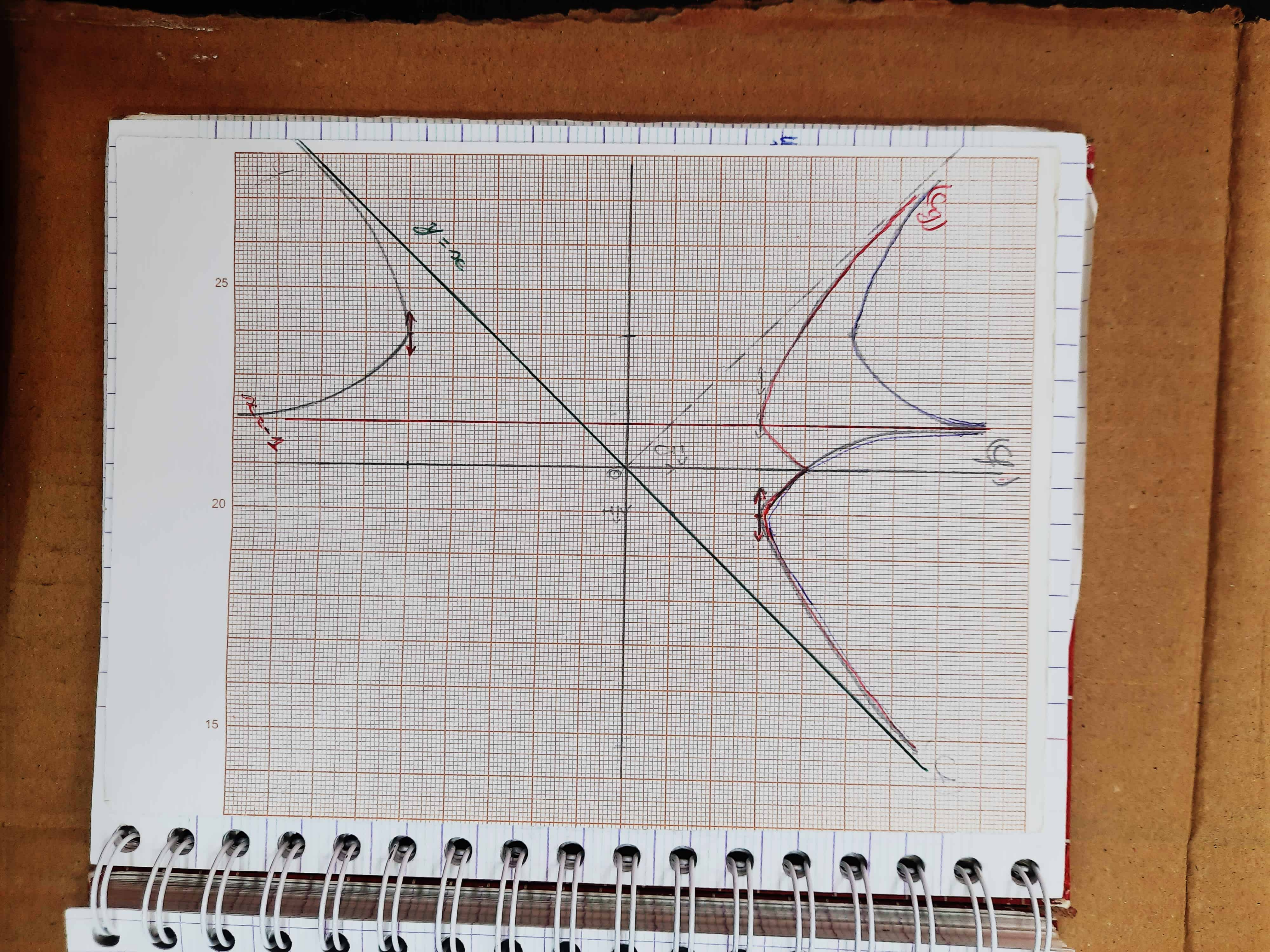
جـ) نبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي $U_{n+1} \leqslant 3$

بما أن $U_n \leqslant 3$

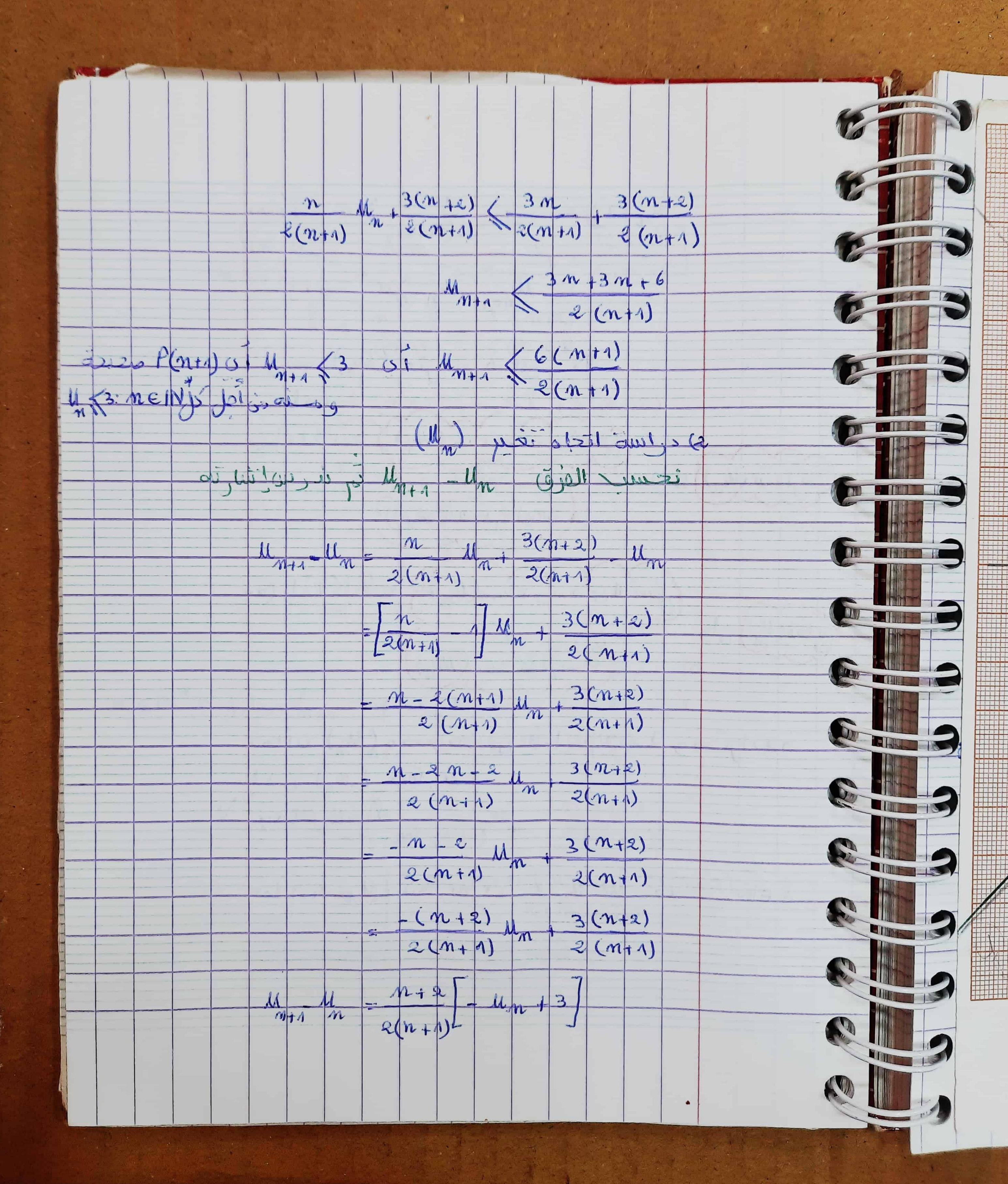
إذن :

$$\frac{n}{2(n+1)} U_n \leqslant \frac{3n}{2(n+1)}$$

لأن $\frac{n}{2(n+1)} \geqslant 0$ وبعد ضرب الطرفين في $\frac{n}{2(n+1)}$



(Cf)
(Cg)
y = x
x = -1
25
20
15



$$\frac{n}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)} \leq \frac{3n}{2(n+1)}+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$u_{n+1} \leq \frac{3n+3n+6}{2(n+1)}$$

أي $u_{n+1} \leq \frac{6(n+1)}{2(n+1)}$ أي $u_{n+1} \leq 3$ أي $P(n+1)$ صحيحة

ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 3$

2) دراسة اتجاه تغير (u_n)

نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n$ ثم ندرس إشارته

$$u_{n+1}-u_n = \frac{n}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}-u_n$$

$$= \left[\frac{n}{2(n+1)}-1\right]u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

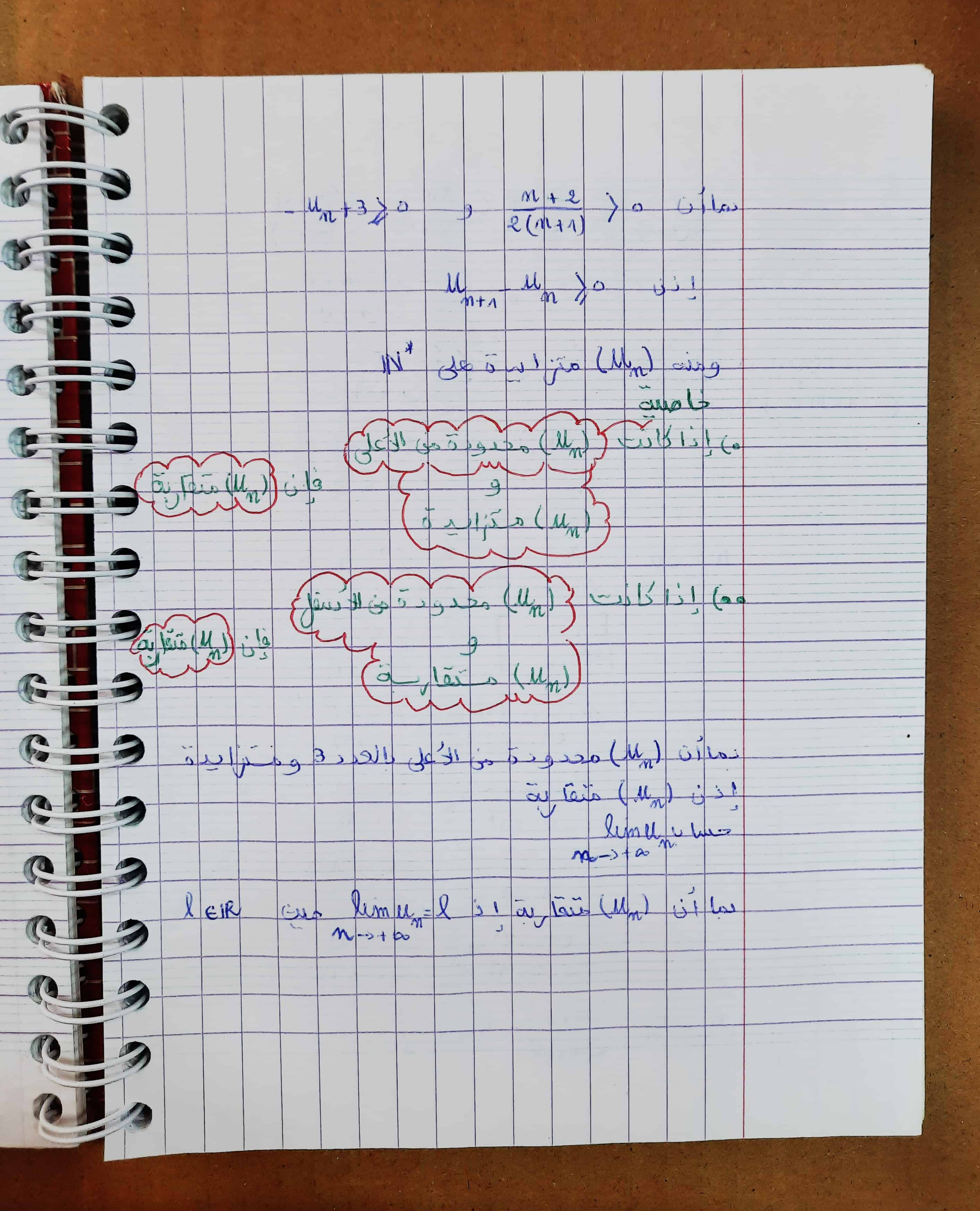
$$= \frac{n-2(n+1)}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{n-2n-2}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{-n-2}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{-(n+2)}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{n+2}{2(n+1)}\left[-u_n+3\right]$$



بما أن $\frac{n+2}{2(n+1)} > 0$ و $-u_n+3 \geq 0$

إذن $u_{n+1} - u_n \geq 0$

ومنه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$

خاصية

1) إذا كانت (u_n) محدودة من الأعلى و (u_n) متزايدة فإن (u_n) متقاربة

2) إذا كانت (u_n) محدودة من الأسفل و (u_n) متقاربة فإن (u_n) متقاربة

بما أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3 ومتزايدة

إذن (u_n) متقاربة

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

بما أن (u_n) متقاربة إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ حيث $l \in \mathbb{R}$

[illegible]

$$\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \right]$$

$$\ell = \frac{n}{2(n+1)} \ell + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$2(n+1)\ell = n\ell + 3(n+2)$$

$$2(n+1)\ell - n\ell = 3(n+2)$$

$$[2n + 2 - n]\ell = 3(n+2)$$

$$(n+2)\ell = 3(n+2)$$

$$\ell = 3$$

ومنه $\lim_{n \to +\infty} U_n = 3$

③ نبرهن أن (V_n) هندسية

(V_n) هندسية معناه $V_{n+1} = q \times V_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

$$V_{n+1} = (n+1)(3 - U_{n+1})$$

$$V_{n+1} = (n+1)\left[3 - \frac{n}{2(n+1)} U_n - \frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{3 \times 2(n+1) - n U_n - 3(n+2)}{2(n+1)}\right]$$

$$= \frac{6n + 6 - 3n - 6 - n U_n}{2}$$

$$V_{n+1} = \frac{3n - n U_n}{2}$$

$$V_{n+1} = \frac{n(3 - U_n)}{2}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول

$$V_1 = 1(3 - U_1) = 3 - (-1) = 4$$

4) كتابة V_n بدلالة n

بما أن (V_n) هندسية إذن $V_n = V_1 \times q^{n-1}$

$$V_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

كتابة U_n بدلالة n

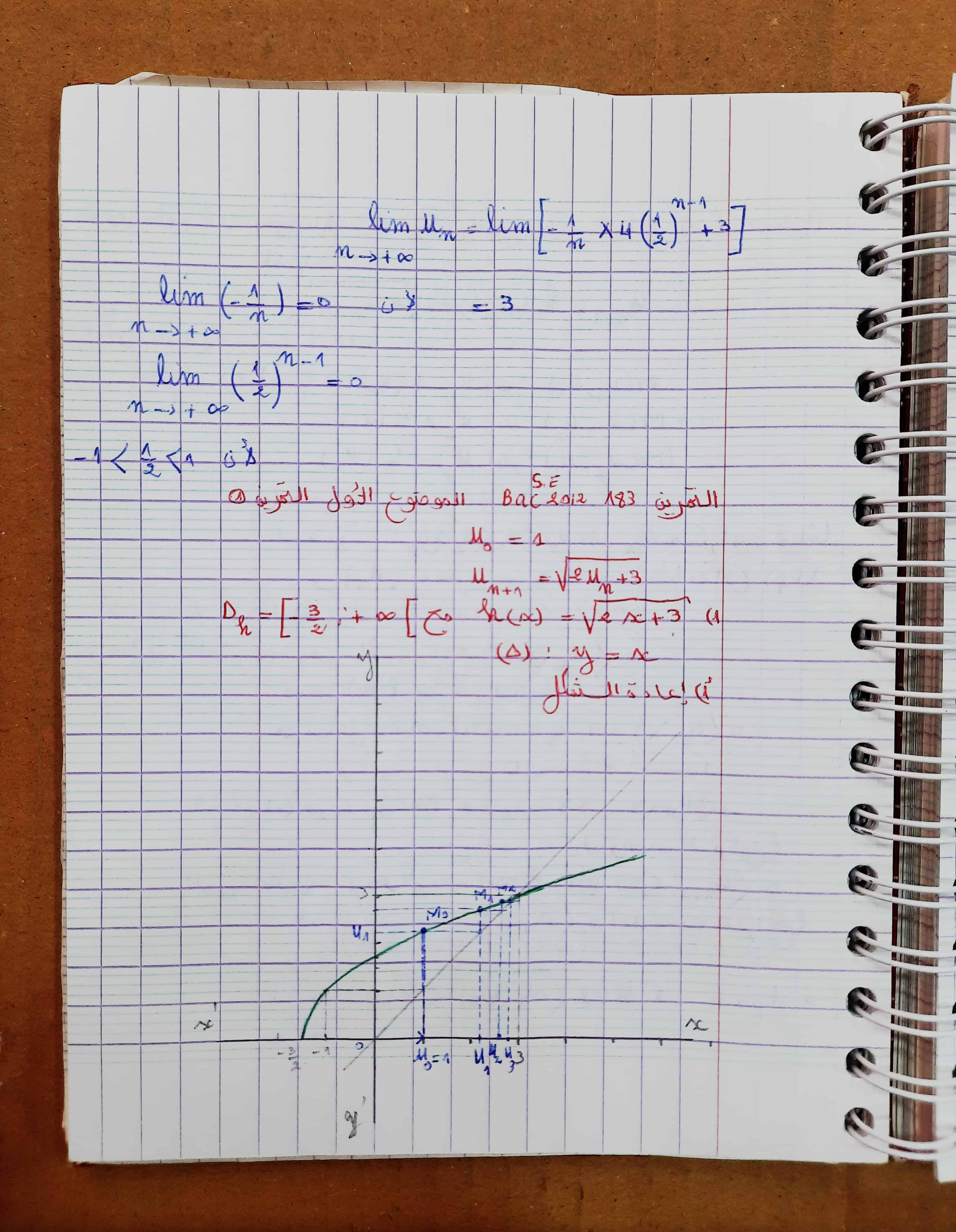
بما أن $V_n = n(3 - U_n)$

إذن $\frac{V_n}{n} = 3 - U_n$ لأن $n \in IN^*$

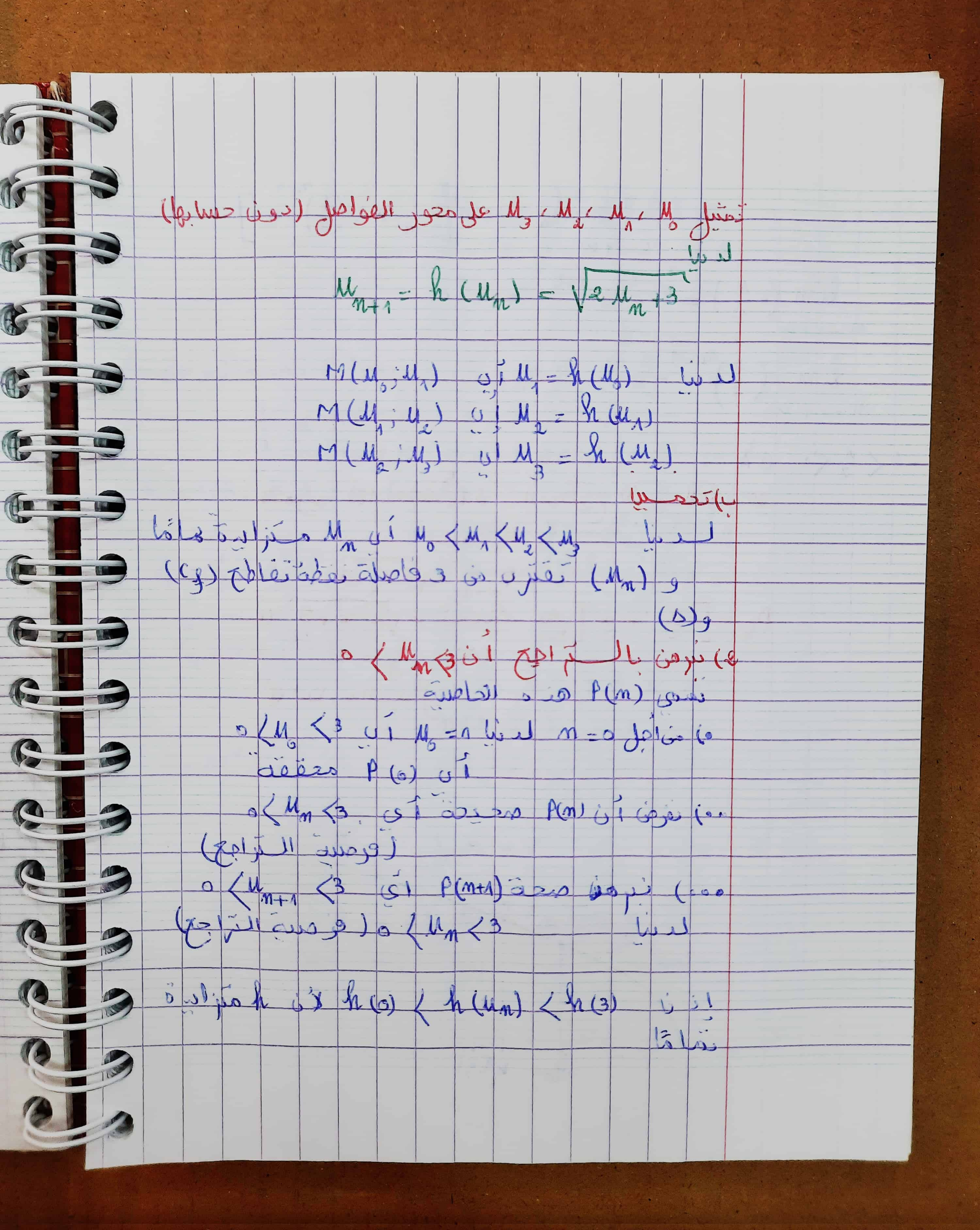
$$U_n = -\frac{1}{n} V_n + 3$$

$$U_n = -\frac{1}{n} \times 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3$$

حساب: $\lim_{n \to +\infty} U_n$



$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim \left[-\frac{1}{n} \times 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3 \right]$
$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$
$= 3$
$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$
$-1 < \frac{1}{2} < 1$
التمرين 183 Bac 2012 S.E الموضوع الأول التمرين ①
$u_0 = 1$
$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$
(1 $h(x) = \sqrt{2x+3}$ ومنه $D_h = \left[-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$
$(\Delta) : y = x$
أ) إعادة الشكل
y
x'
x
y'
$-\frac{3}{2}$
-1
0
3
u_1
M_0
M_1
$u_0 = 1$
u_1
u_2
u_3



تمثيل u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 على محور الفواصل (دون حسابها)

لدينا

$$u_{n+1} = h(u_n) = \sqrt{2u_n+3}$$

لدينا $u_1 = h(u_0)$ أي $M(u_0 ; u_1)$

$u_2 = h(u_1)$ أي $M(u_1 ; u_2)$

$u_3 = h(u_2)$ أي $M(u_2 ; u_3)$

ب) تخمين

لدينا $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ أي u_n متزايدة تماما

و (u_n) تقترب من 3 فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ)

ج) نبرهن بالتراجع أن $0 < u_n < 3$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

i) من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 1$ أي $0 < u_0 < 3$

أي $P(0)$ محققة

ii) نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $0 < u_n < 3$

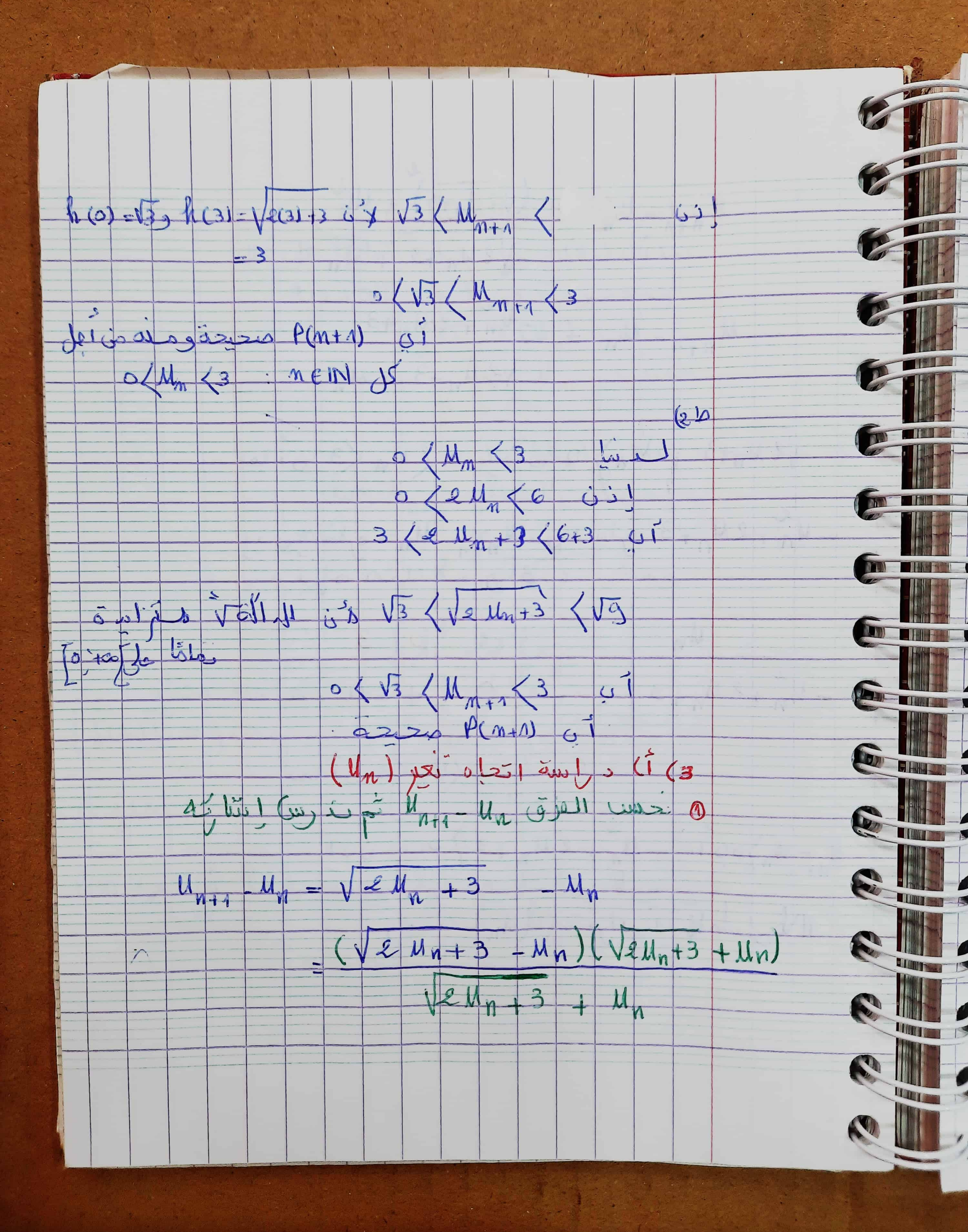
(فرضية التراجع)

iii) نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 < u_{n+1} < 3$

لدينا $0 < u_n < 3$ (فرضية التراجع)

إذن $h(0) < h(u_n) < h(3)$ لأن h متزايدة

تماما



إذن $\sqrt{3} < u_{n+1} <$ أي $h(0)=\sqrt{3}$ و $h(3)=\sqrt{2(3)+3}$
$=3$

$$0 < \sqrt{3} < u_{n+1} < 3$$

أي $P(n+1)$ صحيحة ومنه من أجل
كل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 3$

ط2)

لدينا $0 < u_n < 3$

إذن $0 < 2u_n < 6$

أي $3 < 2u_n + 3 < 6+3$

لأن $\sqrt{3} < \sqrt{2u_n+3} < \sqrt{9}$ الدالة $\sqrt{}$ متزايدة
تماما على $[0;+\infty[$

أي $0 < \sqrt{3} < u_{n+1} < 3$

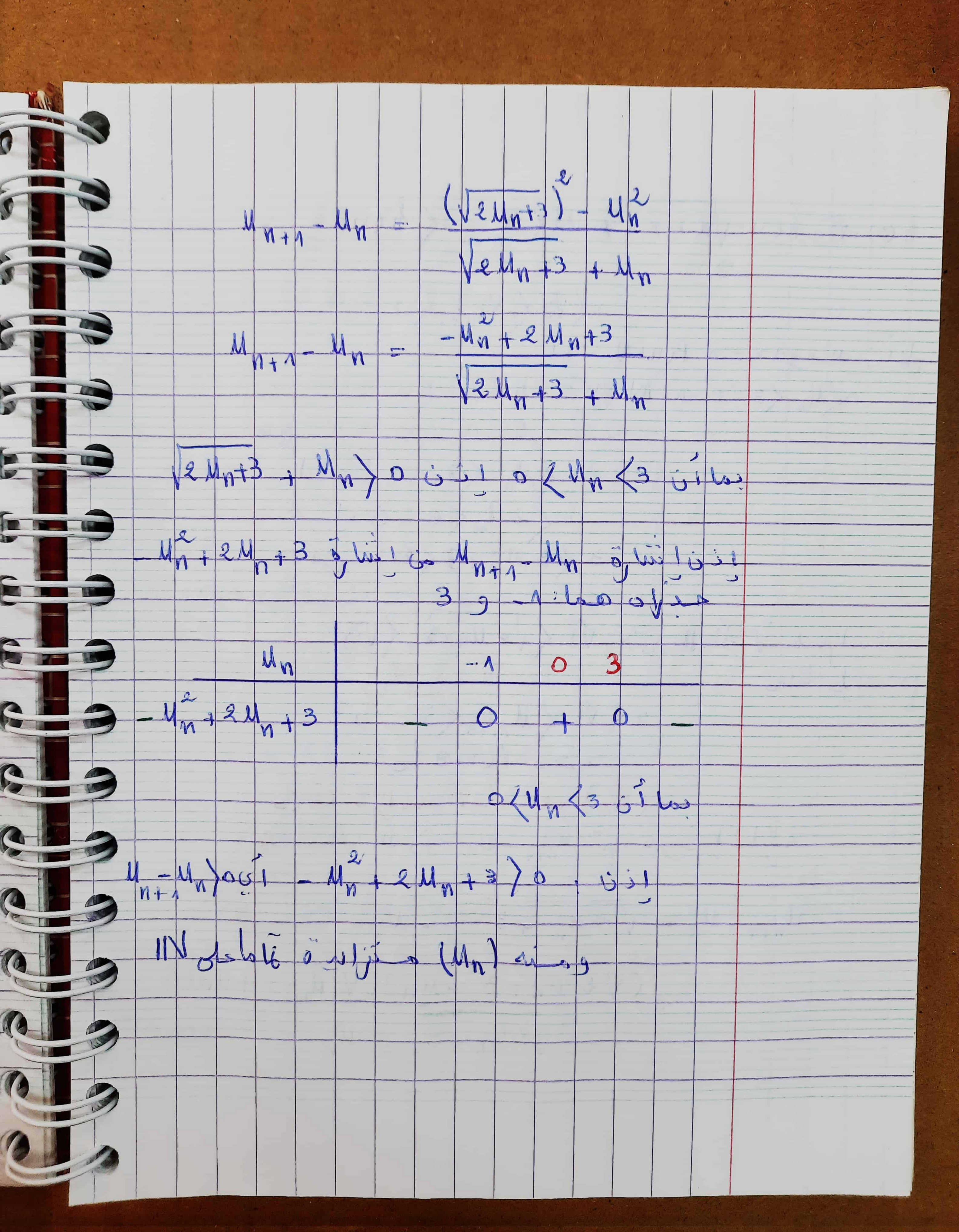
أي $P(n+1)$ صحيحة.

3) أ) دراسة اتجاه تغير (u_n)

① نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ ثم ندرس إشارته

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2u_n+3} - u_n\right)\left(\sqrt{2u_n+3} + u_n\right)}{\sqrt{2u_n+3} + u_n}$$



$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{2u_n+3}\right)^2 - u_n^2}{\sqrt{2u_n+3} + u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n+3} + u_n}$$

بما أن $0 < u_n < 3$ فإن $\sqrt{2u_n+3} + u_n > 0$

إذن إشارة $u_{n+1} - u_n$ من إشارة $-u_n^2 + 2u_n + 3$

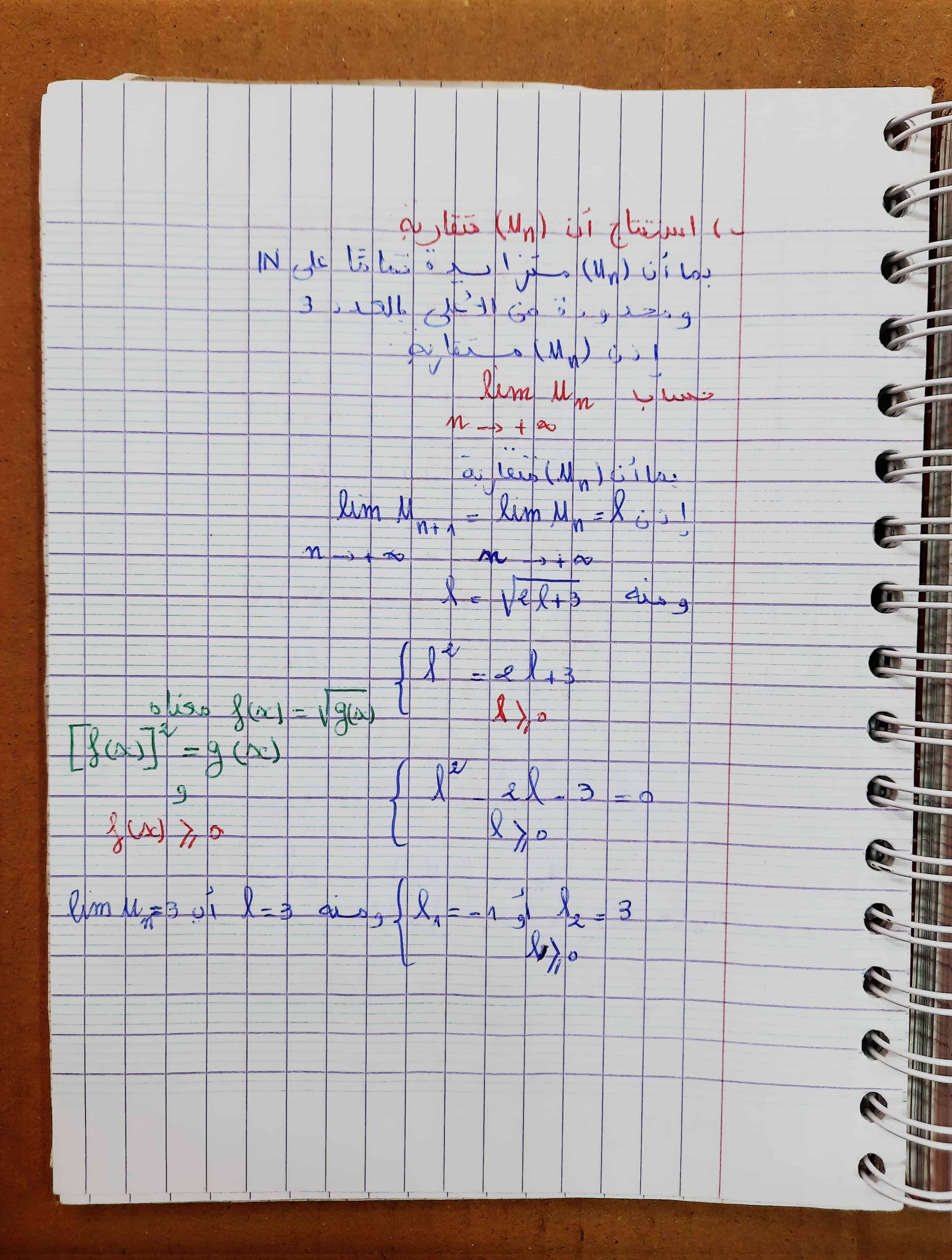
جذراه هما: -1 و 3

u_n		-1		0		3	
$-u_n^2+2u_n+3$	$-$	0		$+$		0	$-$

بما أن $0 < u_n < 3$

إذن $-u_n^2 + 2u_n + 3 > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$



ب) استنتاج أن (u_n) متقاربة

بما أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ومحدودة من الأعلى بالعدد 3

إذن (u_n) متقاربة.

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

بما أن (u_n) متقاربة

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

ومنه $l = \sqrt{2l+3}$

$$\begin{cases} l^2 = 2l+3 \\ l \geq 0 \end{cases}$$

$f(x) = \sqrt{g(x)}$ معناه

$[f(x)]^2 = g(x)$

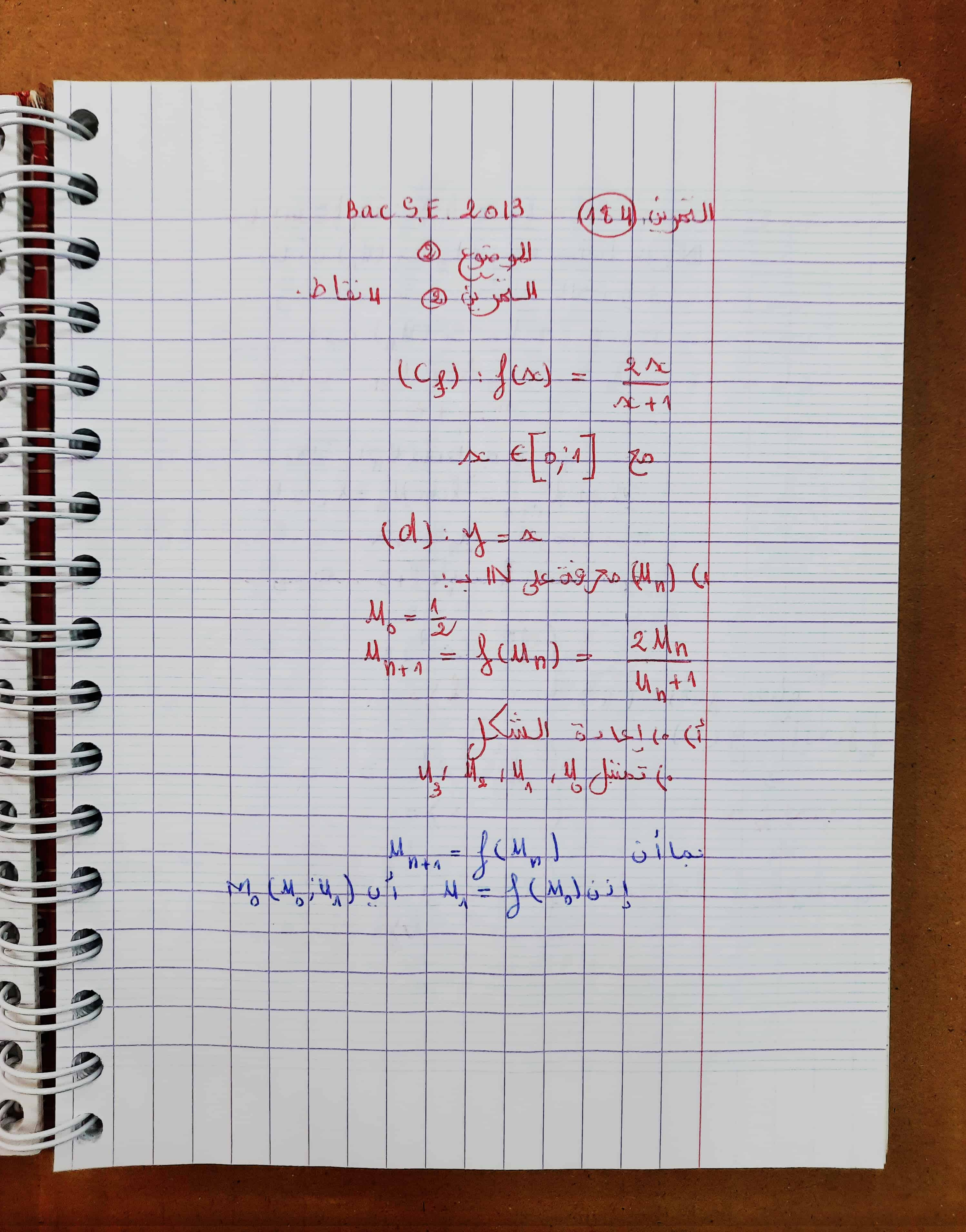
و

$f(x) \geq 0$

$$\begin{cases} l^2 - 2l - 3 = 0 \\ l \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_1 = -1 \text{ أو } l_2 = 3 \\ l \geq 0 \end{cases}$$

ومنه $l = 3$ أي $\lim u_n = 3$



التمرين (184) Bac S.E. 2013

الموضوع ②

التمرين ② 4 نقاط.

$$(C_f) : f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

مع $x \in [0;1]$

$$(d) : y = x$$

1) (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$u_0 = \frac{1}{2}$$

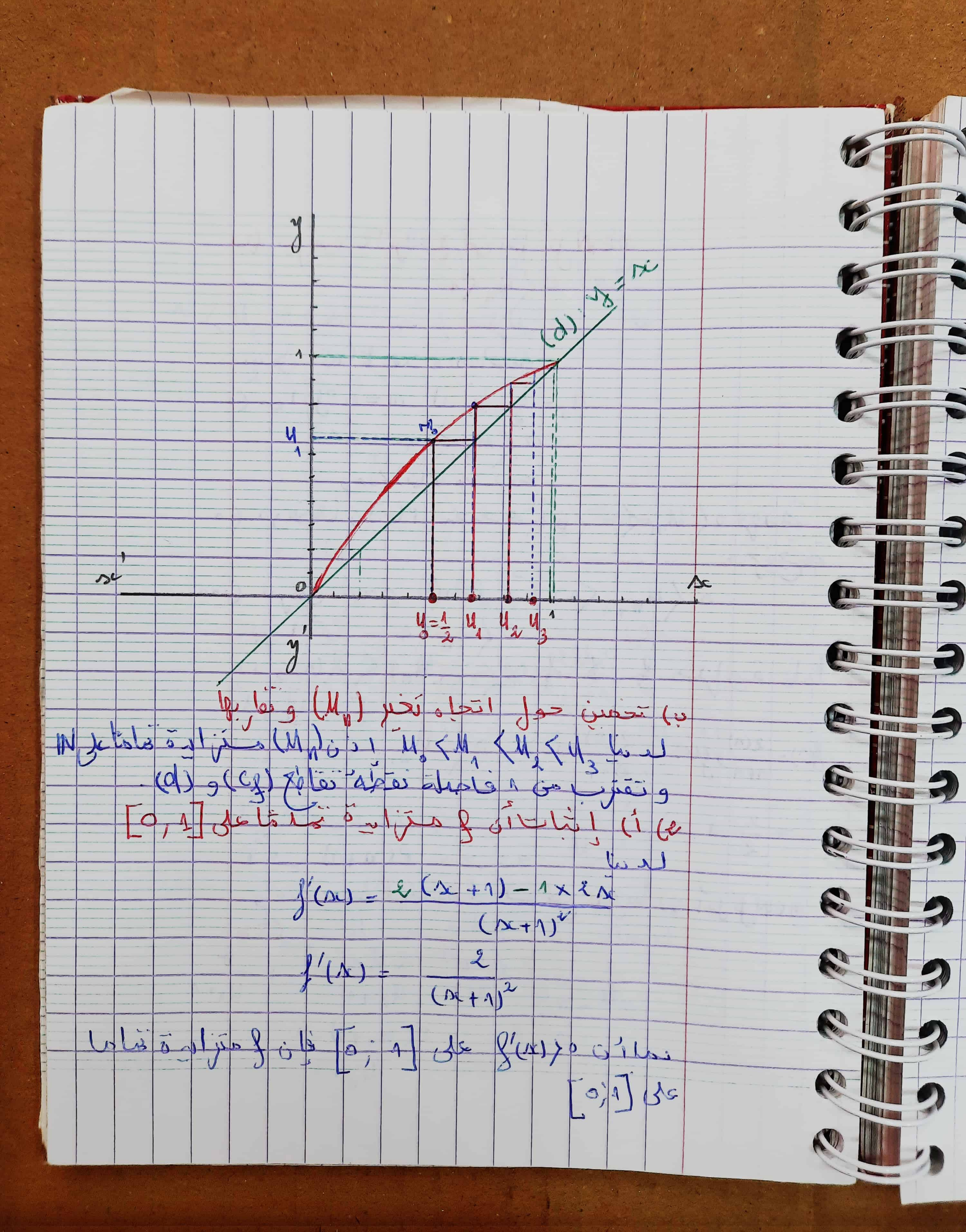
$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n}{u_n+1}$$

أ) إعادة الشكل

ب) تمثيل u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3

نعلم أن $u_{n+1} = f(u_n)$

إذن $u_1 = f(u_0)$ أي $M_0(u_0;u_1)$


y
$y = x$
(d)
1
u_1
M_0
x'
0
x
$u_0 = \frac{1}{2}$
u_1
u_2
u_3
1
y'
ب) تخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها
لدينا $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ إذن (u_n) متزايدة تماما على IN
وتقترب من 1 فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (d).
ج) أ) إثبات أن f متزايدة تماما على $[0,1]$
لدينا
$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 1 \times 2x}{(x+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$
نلاحظ أن $f'(x) > 0$ على $[0;1]$ فإن f متزايدة تماما
على $[0;1]$

ب) نبرهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$
$0 < u_n < 1$

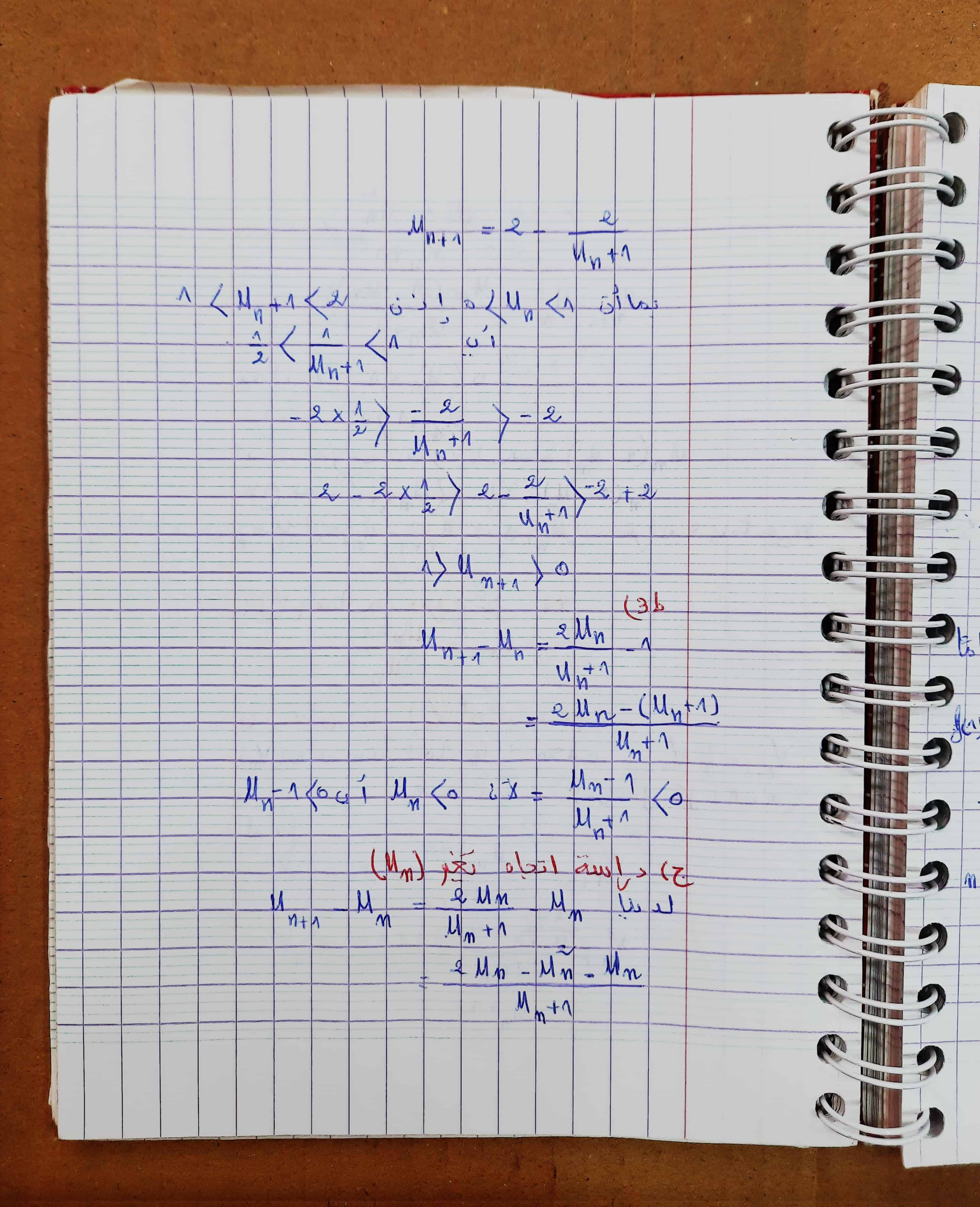
نسمي $P(n)$ هذه الخاصية
• من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = \frac{1}{2}$
أي $0 < u_0 < 1$
ومنه $P(0)$ محققة
•• نفرض أن $P(n)$ صحيحة أن $0 < u_n < 1$ فرضية التراجع
••• نبرهن صحة $P(n+1)$ أي: $0 < u_{n+1} < 1$
بما أن $0 < u_n < 1$
إذن $f(0) < f(u_n) < f(1)$ لأن f متزايدة تماما على $[0;1]$
أي $0 < u_{n+1} < 1$ لأن $f(0) = \frac{2(0)}{0+1} = 0$ و $f(1) = \frac{2(1)}{1+1}$
$= \frac{2}{2} = 1$

أي $P(n+1)$ صحيحة.
ومنه حسب مبدأ التراجع لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ط2)

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1} = a + \frac{b}{u_n+1}$$

$$= \frac{2(u_n+1) - 2}{u_n+1}$$



$$u_{n+1} = 2 - \frac{2}{u_n+1}$$

بما أن $0 < u_n < 1$ فإن $1 < u_n+1 < 2$

أي $\frac{1}{2} < \frac{1}{u_n+1} < 1$

$$-2\times\frac{1}{2} > \frac{-2}{u_n+1} > -2$$

$$2 - 2\times\frac{1}{2} > 2 - \frac{2}{u_n+1} > -2+2$$

$$1 > u_{n+1} > 0$$

(3b

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n+1} - 1$$

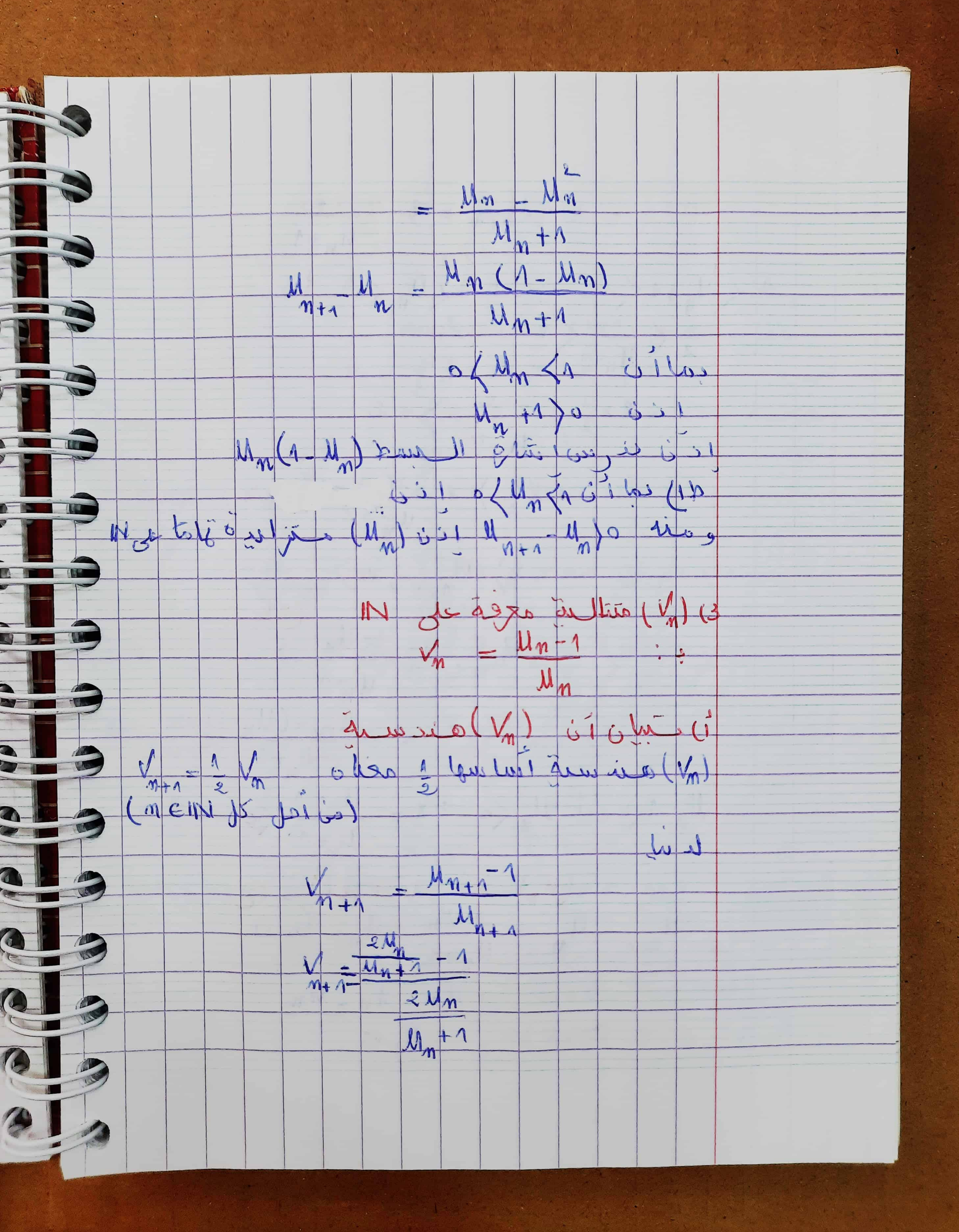
$$= \frac{2u_n - (u_n+1)}{u_n+1}$$

إذن $= \frac{u_n - 1}{u_n+1} < 0$ لأن $u_n < 0$ أي $u_n - 1 < 0$

ج) دراسة اتجاه تغير (u_n)

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n+1} - u_n$

$$= \frac{2u_n - u_n^2 - u_n}{u_n+1}$$



$$= \frac{u_n - u_n^2}{u_n + 1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - u_n)}{u_n + 1}$$

بما أن $0 < u_n < 1$

إذن $u_n + 1 > 0$

إذن ندرس إشارة البسط $u_n(1 - u_n)$

لدينا $0 < u_n < 1$ إذن [illegible]

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

3) (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$

ب: $V_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

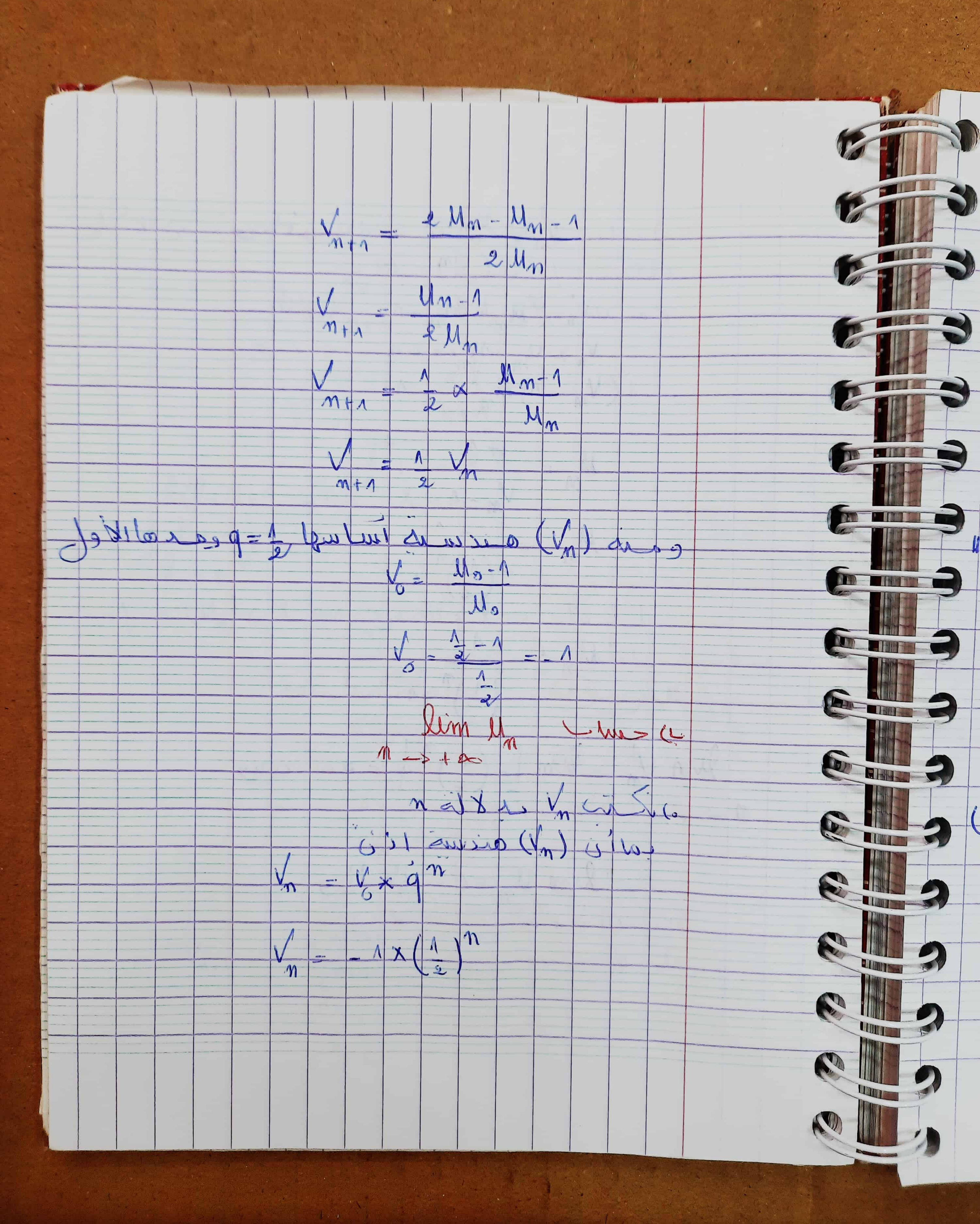
أ) تبيان أن (V_n) هندسية

(V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$ (من أجل كل $n \in \mathbb{N}$)

لدينا

$$V_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}$$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{2u_n}{u_n + 1} - 1}{\frac{2u_n}{u_n + 1}}$$



$$V_{n+1} = \frac{2U_n - U_n - 1}{2U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n - 1}{2U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{U_n - 1}{U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

ومنه (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0}$$

$$V_0 = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = -1$$

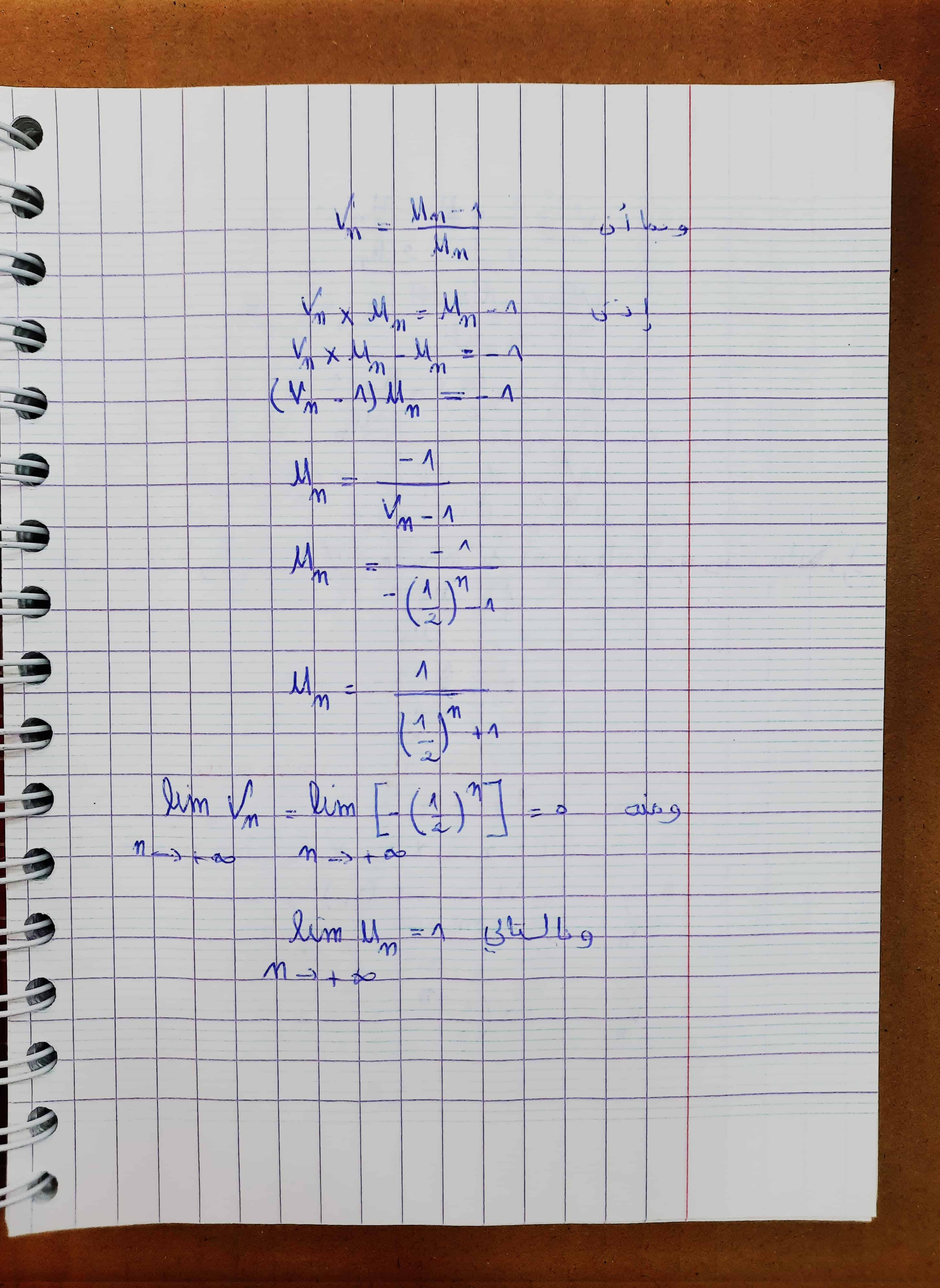
ج) حساب $\lim_{n \to +\infty} U_n$

ـ) نكتب V_n بدلالة n

بما أن (V_n) هندسية إذن

$$V_n = V_0 \times q^n$$

$$V_n = -1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$



وبما أن $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n}$

إذن $V_n \times U_n = U_n - 1$

$V_n \times U_n - U_n = -1$

$(V_n - 1) U_n = -1$

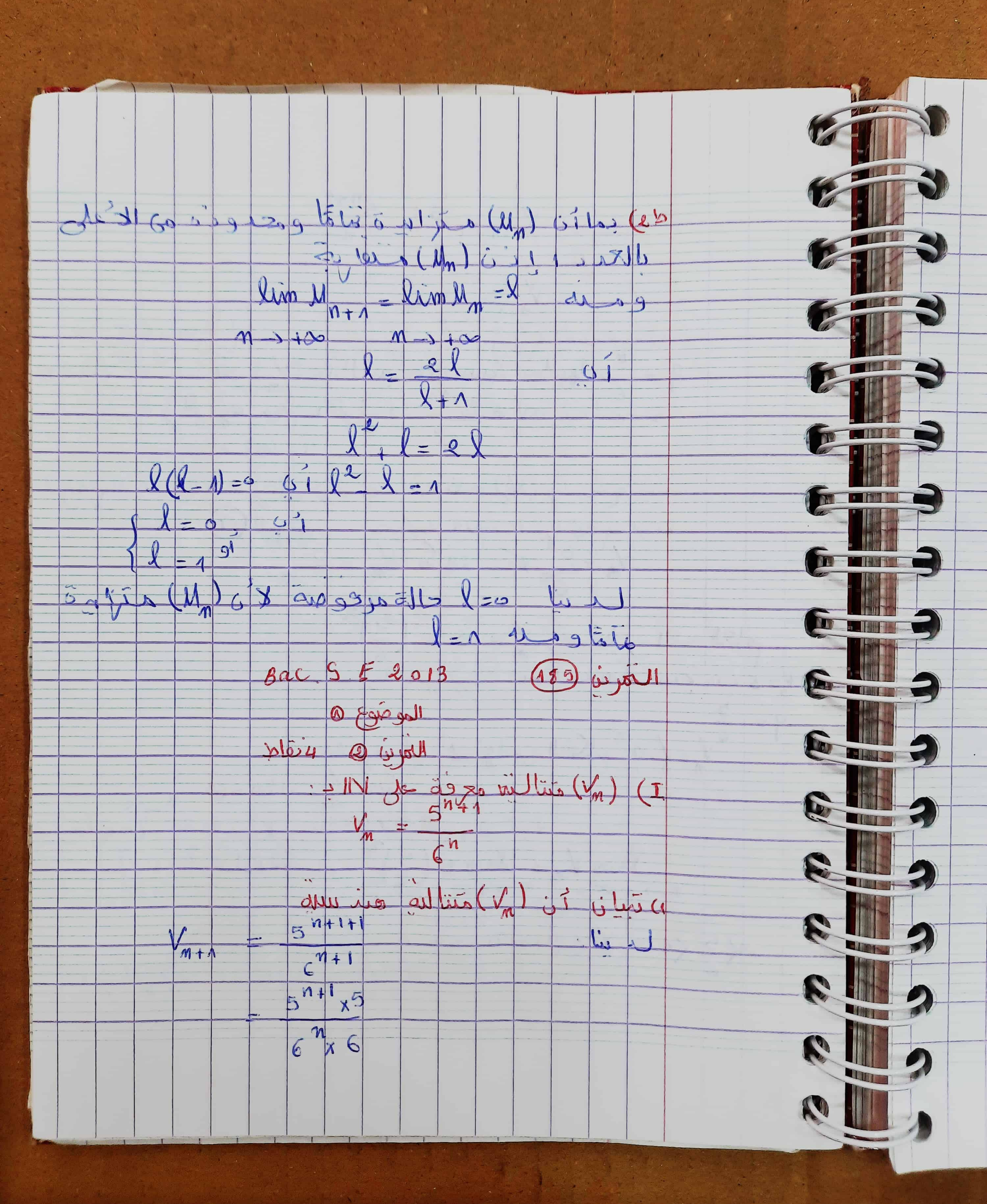
$U_n = \dfrac{-1}{V_n - 1}$

$U_n = \dfrac{-1}{-\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

$U_n = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$



ط2) بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 إذن (u_n) متقاربة

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$

أي $l = \frac{2l}{l+1}$

$$l^2 + l = 2l$$

أي $l^2 - l = 0$ أي $l(l-1)=0$

أي $\begin{cases} l = 0 \\ l = 1 \end{cases}$ أو

لدينا $l=0$ حالة مرفوضة لأن (u_n) متزايدة تماما ومنه $l=1$

التمرين 185 Bac S E 2013

الموضوع 1

التمرين 2 4 نقاط

I) (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

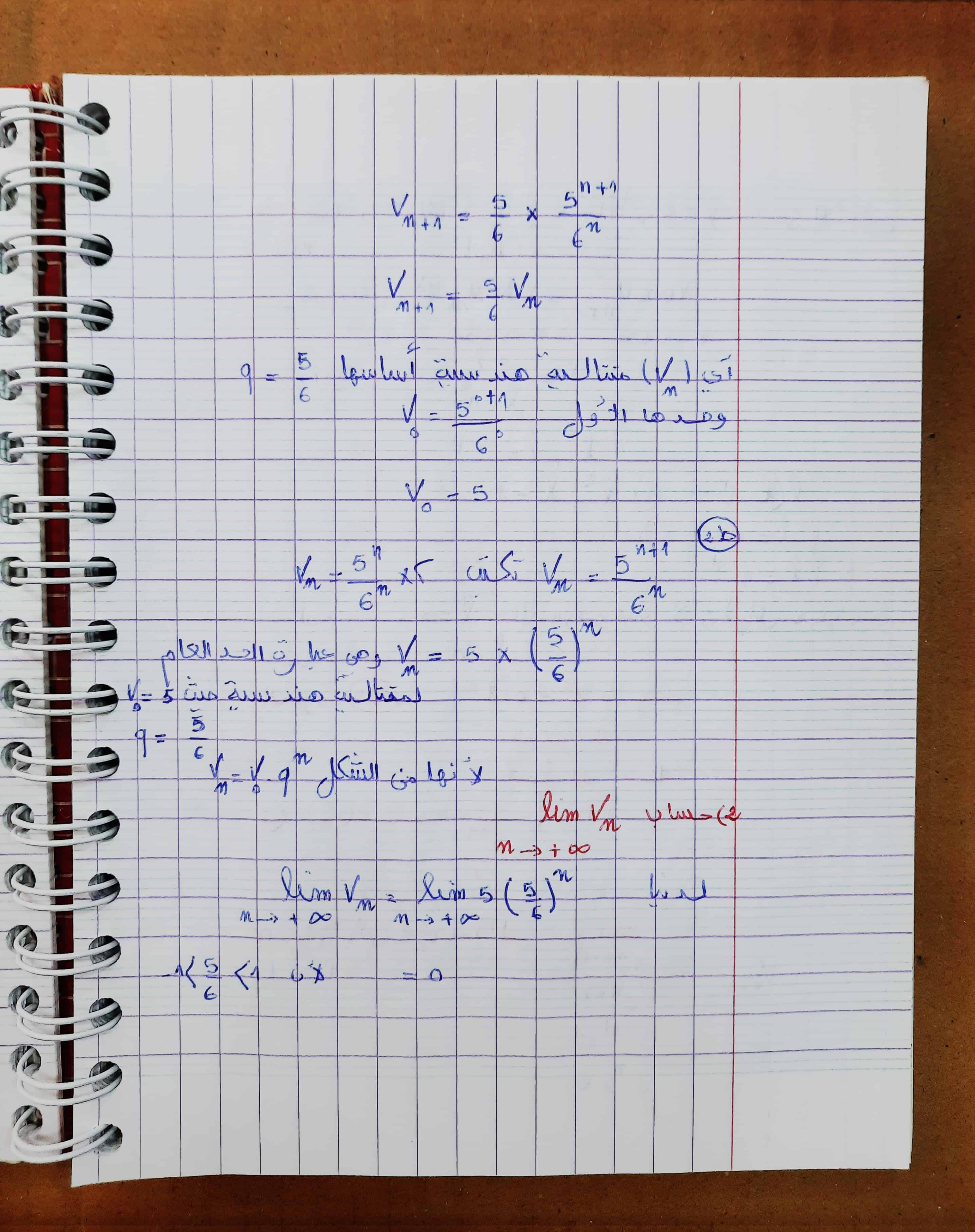
$$V_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

1) تبيان أن (V_n) متتالية هندسية

لدينا:

$$V_{n+1} = \frac{5^{n+1+1}}{6^{n+1}}$$

$$= \frac{5^{n+1}\times 5}{6^n \times 6}$$



$$V_{n+1} = \frac{5}{6} \times \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

$$V_{n+1} = \frac{5}{6} V_n$$

أي (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{5}{6}$

وحدها الأول $V_0 = \frac{5^{0+1}}{6^0}$

$$V_0 = 5$$

(2ط) $V_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$ تكتب $V_n = \frac{5^n}{6^n} \times 5$

$V_n = 5 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$ وهي عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حيث $V_0 = 5$

$q = \frac{5}{6}$

لأنها من الشكل $V_n = V_0 . q^n$

2) حساب $\lim_{n \to +\infty} V_n$

لدينا $\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} 5 \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$= 0$ لأن $-1 < \frac{5}{6} < 1$

II

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6} \end{cases}$$

1) نبرهن بالتراجع أن $1 \leq u_n \leq 6$ من أجل كل عدد طبيعي n $(n \in \mathbb{N})$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

• من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ أي أن $1 \leq u_0 \leq 6$

أي أن $P(0)$ محققة

•• نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي أن $1 \leq u_n \leq 6$ (فرضية التراجع)

••• نبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي أن $1 \leq u_{n+1} \leq 6$

بما أن

$$1 \leq u_n \leq 6$$

إذن

$$5 \leq 5u_n \leq 30$$

أي

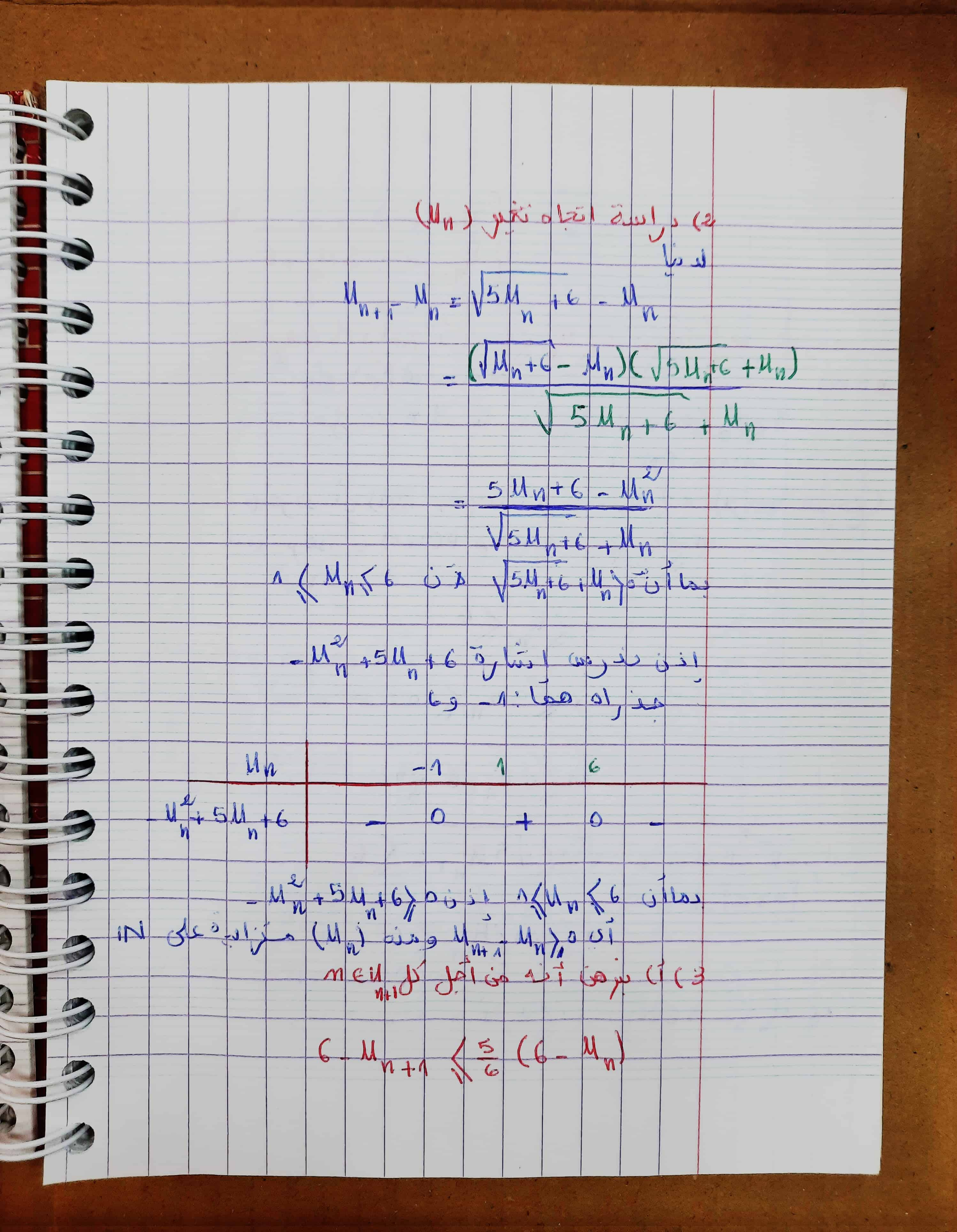
$$11 \leq 5u_n + 6 \leq 36$$

$$\sqrt{11} \leq \sqrt{5u_n + 6} \leq 6$$ لأن الدالة "$\sqrt{}$" متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

أي $1 \leq \sqrt{11} \leq u_{n+1} \leq 6$

أي أن $P(n+1)$ صحيحة

ومنه حسب مبدأ التراجع: من أجل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n \leq 6$



2) دراسة اتجاه تغير (u_n)

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{5u_n+6} - u_n$$

$$= \frac{(\sqrt{u_n+6} - u_n)(\sqrt{5u_n+6} + u_n)}{\sqrt{5u_n+6} + u_n}$$

$$= \frac{5u_n+6-u_n^2}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$$

بما أن $\sqrt{5u_n+6}+u_n > 0$ لأن $1 \leq u_n < 6$

إذن ندرس إشارة $-u_n^2+5u_n+6$

جذراه هما: -1 و 6

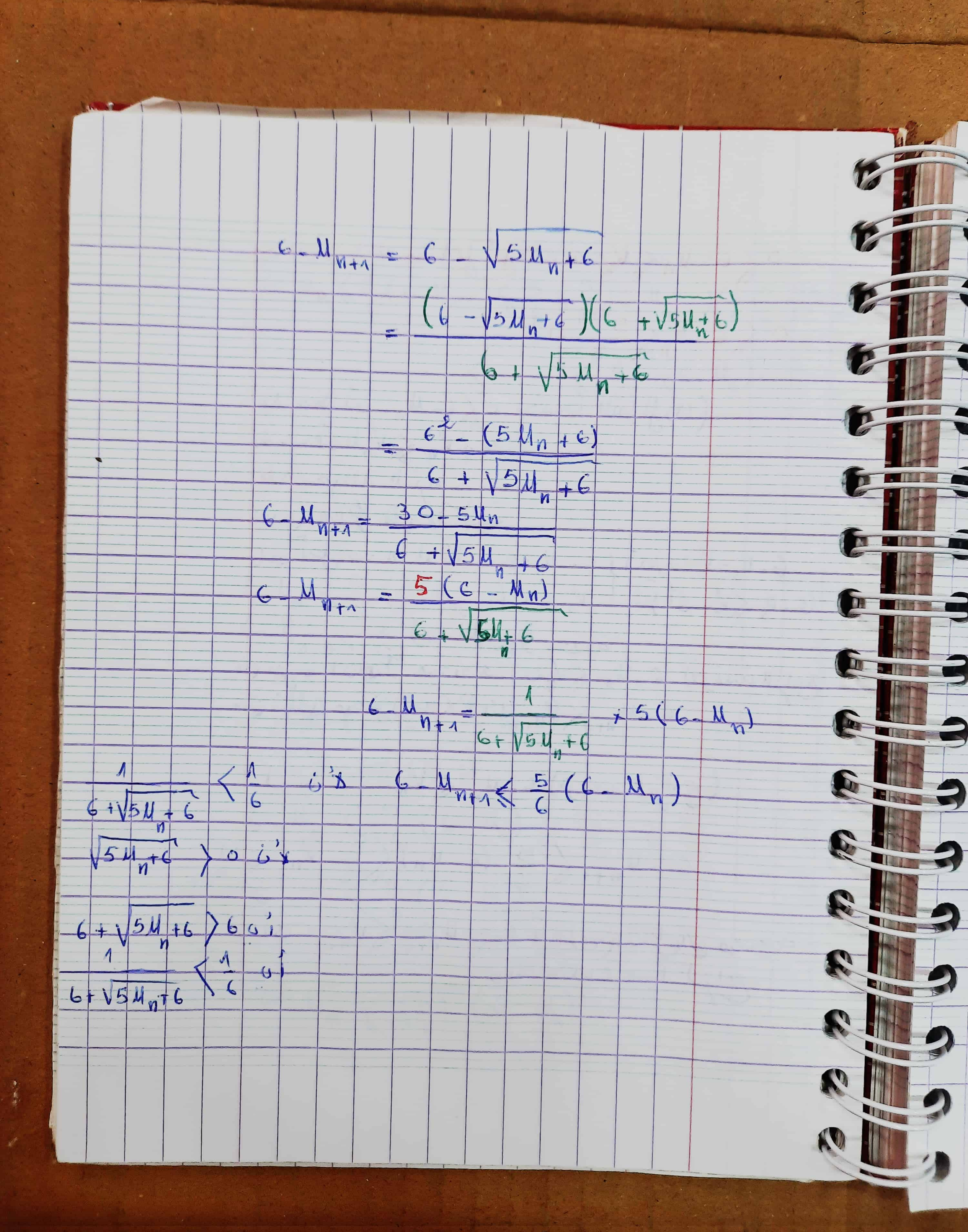
u_n		-1		1		6	
$-u_n^2+5u_n+6$	$-$	0		$+$		0	$-$

بما أن $1 \leq u_n < 6$ إذن $-u_n^2+5u_n+6 \geq 0$

أي $u_{n+1}-u_n \geq 0$ ومنه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

3) أ) نبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6-u_n)$$



$$6 - u_{n+1} = 6 - \sqrt{5u_n+6}$$

$$= \frac{\left(6 - \sqrt{5u_n+6}\right)\left(6 + \sqrt{5u_n+6}\right)}{6 + \sqrt{5u_n+6}}$$

$$= \frac{6^2 - (5u_n+6)}{6 + \sqrt{5u_n+6}}$$

$$6 - u_{n+1} = \frac{30 - 5u_n}{6 + \sqrt{5u_n+6}}$$

$$6 - u_{n+1} = \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n+6}}$$

$$6 - u_{n+1} = \frac{1}{6 + \sqrt{5u_n+6}} \times 5(6 - u_n)$$

$$\frac{1}{6 + \sqrt{5u_n+6}} < \frac{1}{6} \qquad 6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$$

$$\sqrt{5u_n+6} > 0$$

$$6 + \sqrt{5u_n+6} > 6$$

$$\frac{1}{6 + \sqrt{5u_n+6}} < \frac{1}{6}$$

ب) تبيان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$

(أو $0 \leq 6 - u_n \leq \frac{5^{n+1}}{6^n}$)

نلاحظ أن $6 - u_n > 0$ (حسب السؤال (1))

نثبت أن $6 - u_n \leq v_n$

ط1) طريقة التراجع

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

•) من أجل $n = 0$ لدينا $\begin{cases} 6 - u_0 = 5 \\ v_0 = 5 \end{cases}$ أي $6 - u_0 = v_0$ (أي $6 - u_0 \leq v_0$)

أي $P(0)$ محققة

•• نفرض أن $P(n)$ محققة أي $6 - u_n \leq v_n$ (فرضية التراجع)

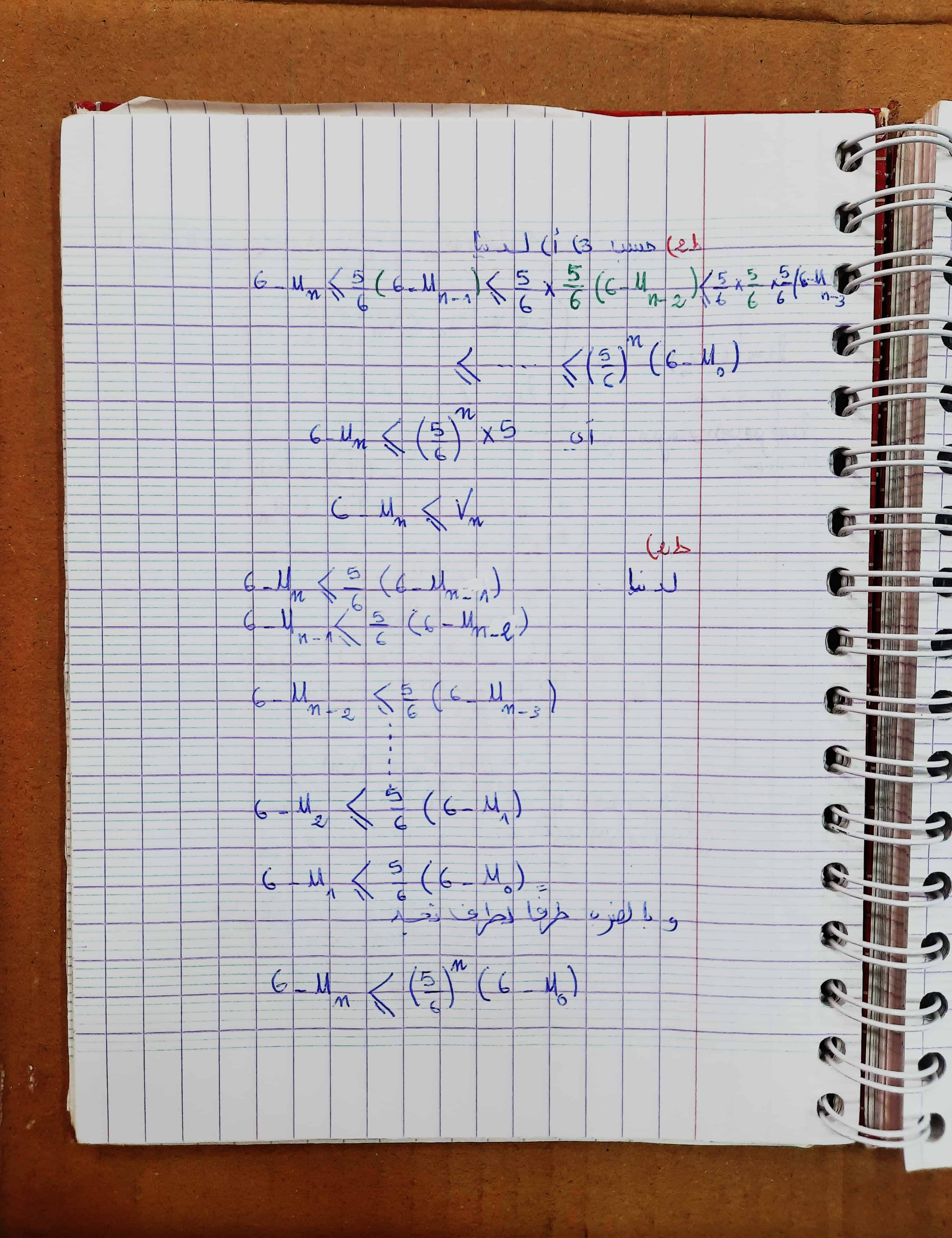
••• نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $6 - u_{n+1} \leq v_{n+1}$

لدينا $6 - u_n \leq v_n$ (فرضية التراجع)

إذن: $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n) \leq \frac{5}{6} v_n$

أي $6 - u_{n+1} \leq v_{n+1}$ أي $P(n+1)$ محققة

ومنه حسب مبدأ التراجع



ط2) حسب 3) أ) لدينا

$$6 - u_n \leqslant \frac{5}{6}(6 - u_{n-1}) \leqslant \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}(6 - u_{n-2}) \leqslant \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}(6 - u_{n-3})$$

$$\leqslant \dots \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n (6 - u_0)$$

أي $6 - u_n \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n \times 5$

$$6 - u_n \leqslant v_n$$

ط2) لدينا

$$6 - u_n \leqslant \frac{5}{6}(6 - u_{n-1})$$

$$6 - u_{n-1} \leqslant \frac{5}{6}(6 - u_{n-2})$$

$$6 - u_{n-2} \leqslant \frac{5}{6}(6 - u_{n-3})$$

$$\vdots$$

$$6 - u_2 \leqslant \frac{5}{6}(6 - u_1)$$

$$6 - u_1 \leqslant \frac{5}{6}(6 - u_0)$$

وبالضرب طرفا لطرف نجد

$$6 - u_n \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n (6 - u_0)$$

ب) استنتاج $\lim_{n \to +\infty} U_n$

$$\begin{cases} 0 < 6 - U_n \leq V_n \\ \text{و} \\ \lim_{n \to +\infty} V_n = 0 \end{cases}$$

إذن: $\lim_{n \to +\infty} (6 - U_n) = 0$

أي $\lim_{n \to +\infty} U_n = 6$

التمرين (186)

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$

بـ: $U_0 = 2$

$$U_{n+1} = \frac{3U_n - 2}{2U_n - 1}$$

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n

فإن $U_n = \dfrac{2n + 2}{2n + 1}$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

•) من أجل $n = 0$ لدينا: $U_0 = 2$ (الطرف الأول)

$\dfrac{2(0) + 2}{2(0) + 1} = 2$ (الطرف الثاني)

أي $U_0 = \dfrac{2(0) + 2}{2(0) + 1}$

أي $P(0)$ محققة

∘∘) نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $U_n = \frac{2n+2}{2n+1}$ (فرضية التراجع)

∘∘∘) نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $U_{n+1} = \frac{2(n+1)+2}{2(n+1)+1}$

$$U_{n+1} = \frac{2n+4}{2n+3}$$

لدينا

$$U_{n+1} = \frac{3U_n - 2}{2U_n - 1}$$

$$U_{n+1} = \frac{3\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) - 2}{2\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) - 1}$$

$$U_{n+1} = \frac{\frac{6n+6-2(2n+1)}{2n+1}}{\frac{4n+4-(2n+1)}{2n+1}}$$

$$U_{n+1} = \frac{6n+6-4n-2}{4n+4-2n-1}$$

$$U_{n+1} = \frac{2n+4}{2n+3}$$

أي $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ التراجع

$$U_n = \frac{2n+2}{2n+1}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

.. نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $U_n = (2n-1)^2$ (فرضية التراجع)

.. نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $U_{n+1} = [2(n+1)-1]^2$

أي $U_{n+1} = (2n+1)^2$

لدينا $U_{n+1} = U_n + 8n$

$U_{n+1} = (2n-1)^2 + 8n$ حسب فرضية التراجع.

$U_{n+1} = 4n^2 - 4n + 1 + 8n$

$U_{n+1} = 4n^2 + 4n + 1$

$U_{n+1} = (2n+1)^2$

أي $P(n+1)$ صحيحة، ومنه حسب مبدأ التراجع لدينا

$U_n = (2n-1)^2$

التمرين (88)

f دالة معرفة على $]-\infty; 2[$

بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$$

أثبت أن الدالة F المعرفة كما يلي:

$$F(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$$

أصلية للدالة f على $]-\infty; 2[$

F دالة أصلية للدالة f على المجال I

يعني

1) F قابلة للاشتقاق على I
و
2) من أجل كل $x \in I$ لدينا
$F'(x) = f(x)$

F دالة أصلية لـ f على $]-\infty, 2[$ يعني:
1) F قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 2[$
2) من أجل كل $x \in]-\infty, 2[$
$F'(x) = f(x)$

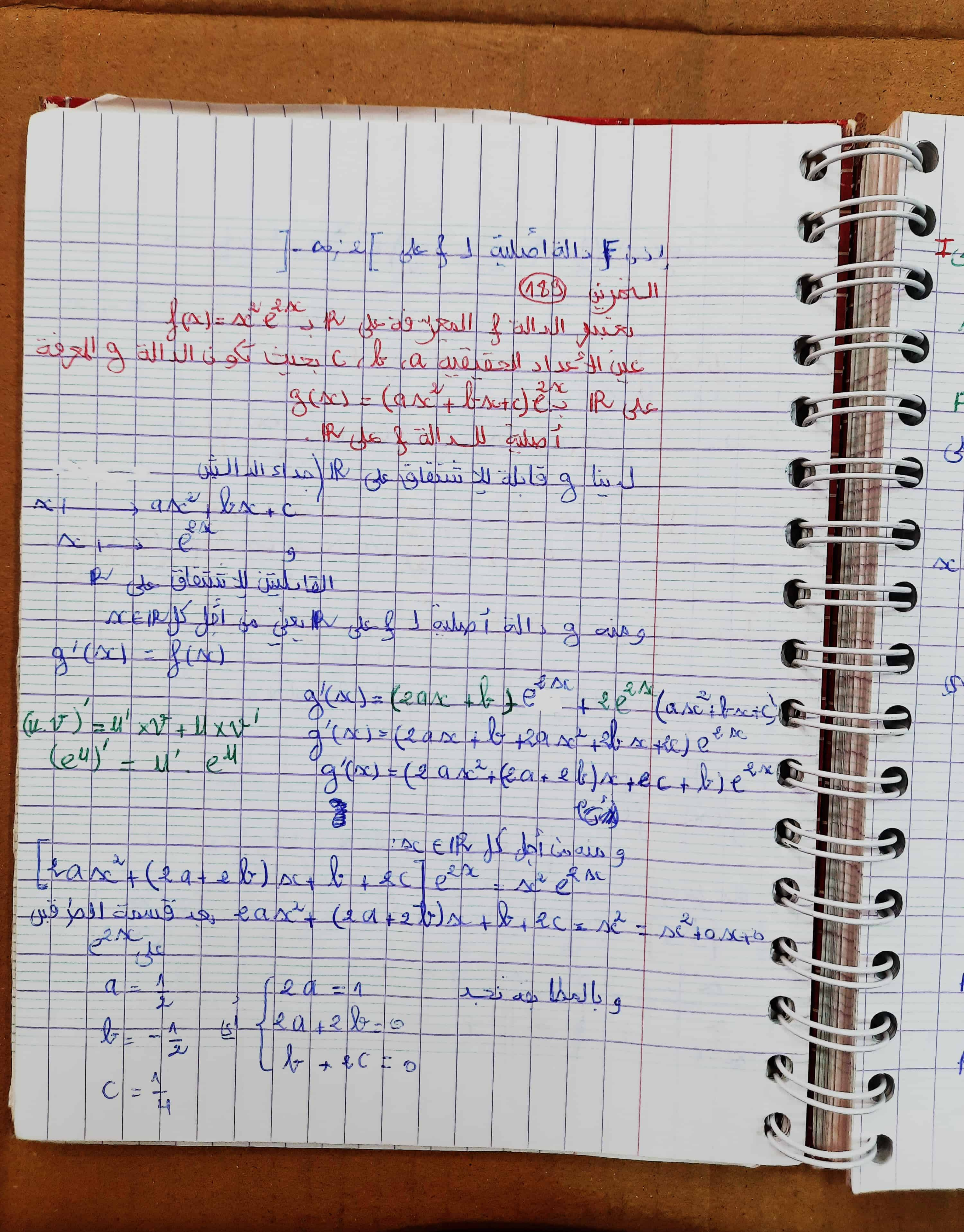
بما أن F دالة ناطقة فهي قابلة للاشتقاق على مجالي تعريفها (أي على $]-\infty; 2[$)

ولدينا من أجل $x \in]-\infty; 2[$ لدينا

$$F'(x) = \frac{(2x-5)(x-2) - 1(x^2-5x+7)}{(x-2)^2}$$

$$F'(x) = \frac{2x^2 - 4x - 5x + 10 - x^2 + 5x - 7}{(x-2)^2}$$

$$F'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = f(x)$$



2) F دالة أصلية لـ f على $]-\infty;2[$

التمرين (129)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2e^{2x}$

عين الأعداد الحقيقية a، b، c بحيث تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (جداء الدالتين $x\mapsto ax^2+bx+c$ و $x\mapsto e^{2x}$ القابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$)

ومنه g دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$ يعني من أجل كل $x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=f(x)$

$(u.v)'=u'\times v+u\times v'$

$(e^u)'=u'.e^u$

$g'(x)=(2ax+b)e^{2x}+2e^{2x}(ax^2+bx+c)$

$g'(x)=(2ax+b+2ax^2+2bx+2c)e^{2x}$

$g'(x)=(2ax^2+(2a+2b)x+2c+b)e^{2x}$

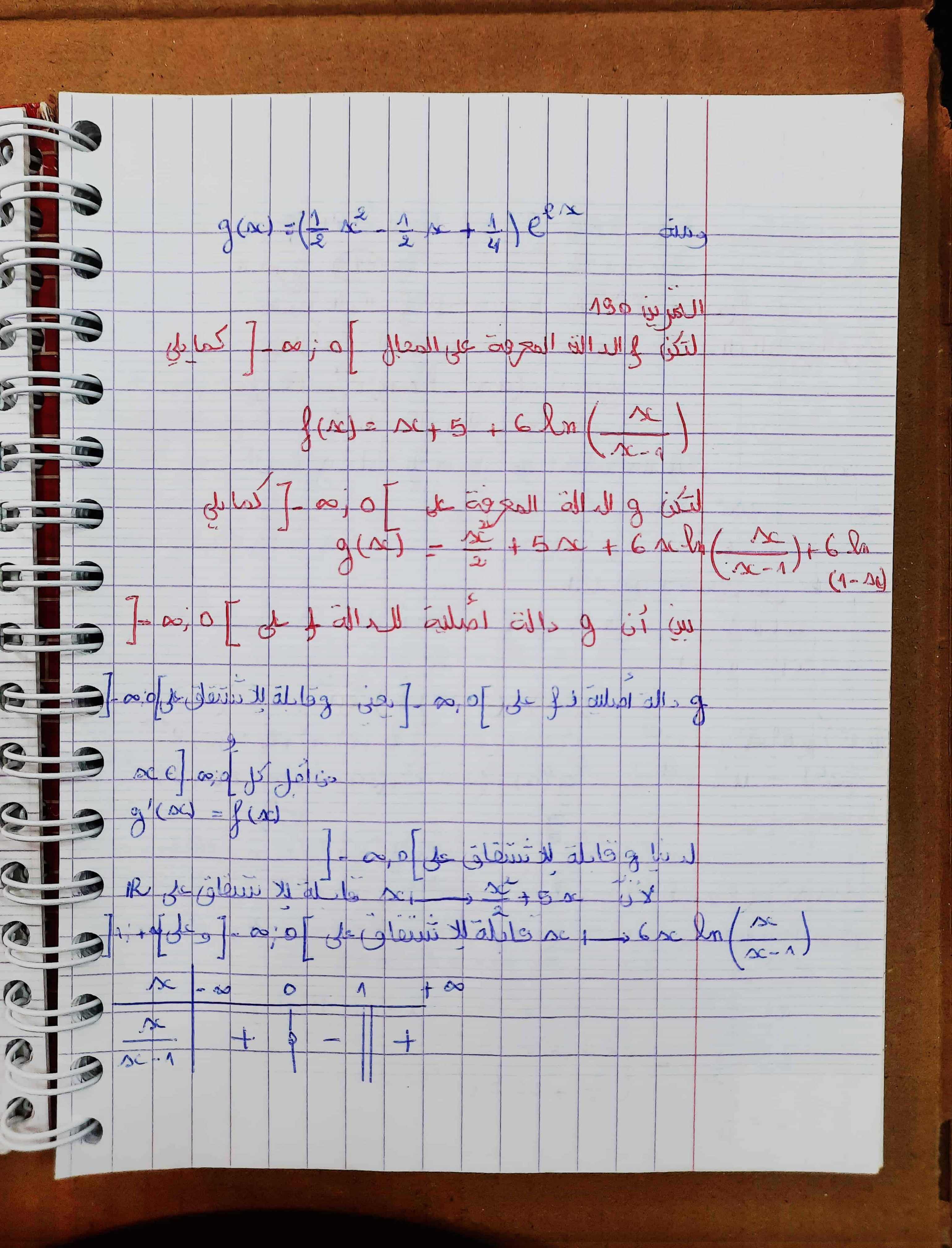
ومنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$[2ax^2+(2a+2b)x+b+2c]e^{2x}=x^2e^{2x}$

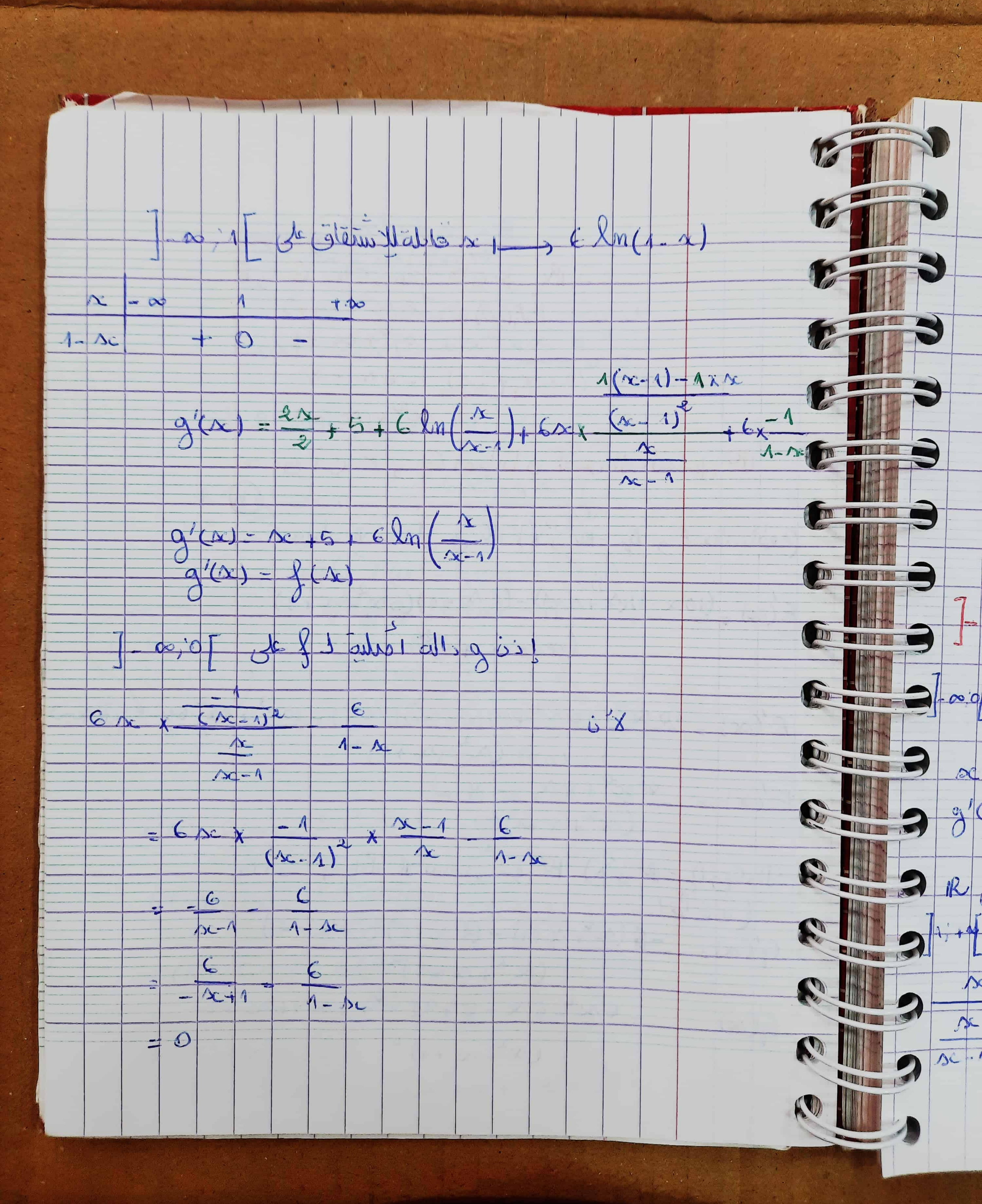
بعد قسمة الطرفين على e^{2x}: $2ax^2+(2a+2b)x+b+2c=x^2=x^2+0x+0$

وبالمطابقة نجد

$\begin{cases}2a=1\\2a+2b=0\\b+2c=0\end{cases}$ أي $a=\frac{1}{2}$ ، $b=-\frac{1}{2}$ ، $c=\frac{1}{4}$



وسنه g(x) = (1/2 x² - 1/2 x + 1/4) e^2x
التمرين 190
لتكن f الدالة المعرفة على المجال]-∞;0[كما يلي
f(x) = x + 5 + 6 ln(x/(x-1))
لتكن g الدالة المعرفة على]-∞;0[كما يلي
g(x) = x²/2 + 5x + 6x ln(x/(x-1)) + 6 ln(1-x)
بين أن g دالة أصلية للدالة f على]-∞;0[
g دالة أصلية لـ f على]-∞;0[يعني g قابلة للاشتقاق على]-∞;0[
ومن أجل كل x ∈]-∞;0[
g'(x) = f(x)
لدينا g قابلة للاشتقاق على]-∞;0[
لأن x ↦ x²/2 + 5x قابلة للاشتقاق على IR
x ↦ 6x ln(x/(x-1)) قابلة للاشتقاق على]-∞;0[وعلى]1;+∞[
x | -∞ 0 1 +∞
x/(x-1) | + 0 - || +



$x \mapsto 6\ln(1-x)$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty;1[$
x | $-\infty$ 1 $+\infty$
$1-x$ | + 0 −
$g'(x) = \frac{2x}{2} + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6x \times \frac{\frac{1(x-1)-1\times x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} + 6\times\frac{-1}{1-x}$
$g'(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$
$g'(x) = f(x)$
إذن g دالة أصلية لـ f على $]-\infty;0[$
$6x \times \frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} - \frac{6}{1-x}$
$= 6x \times \frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} - \frac{6}{1-x}$
$= \frac{-6}{x-1} - \frac{6}{1-x}$
$= \frac{6}{-x+1} - \frac{6}{1-x}$
$= 0$

التمرين (191)

F و G دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ :

$$F(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$$

$$G(x) = \frac{-6x - 2}{x^2 + x + 1}$$

تحقق أن F و G أصليتان لنفس الدالة على $\mathbb{R}$

(الحل)

F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأن $D_F = \mathbb{R}$ و F دالة ناطقة)

اذن:

$$F'(x) = \frac{(10x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(5x^2 - x + 3)}{(x^2+x+1)^2}$$

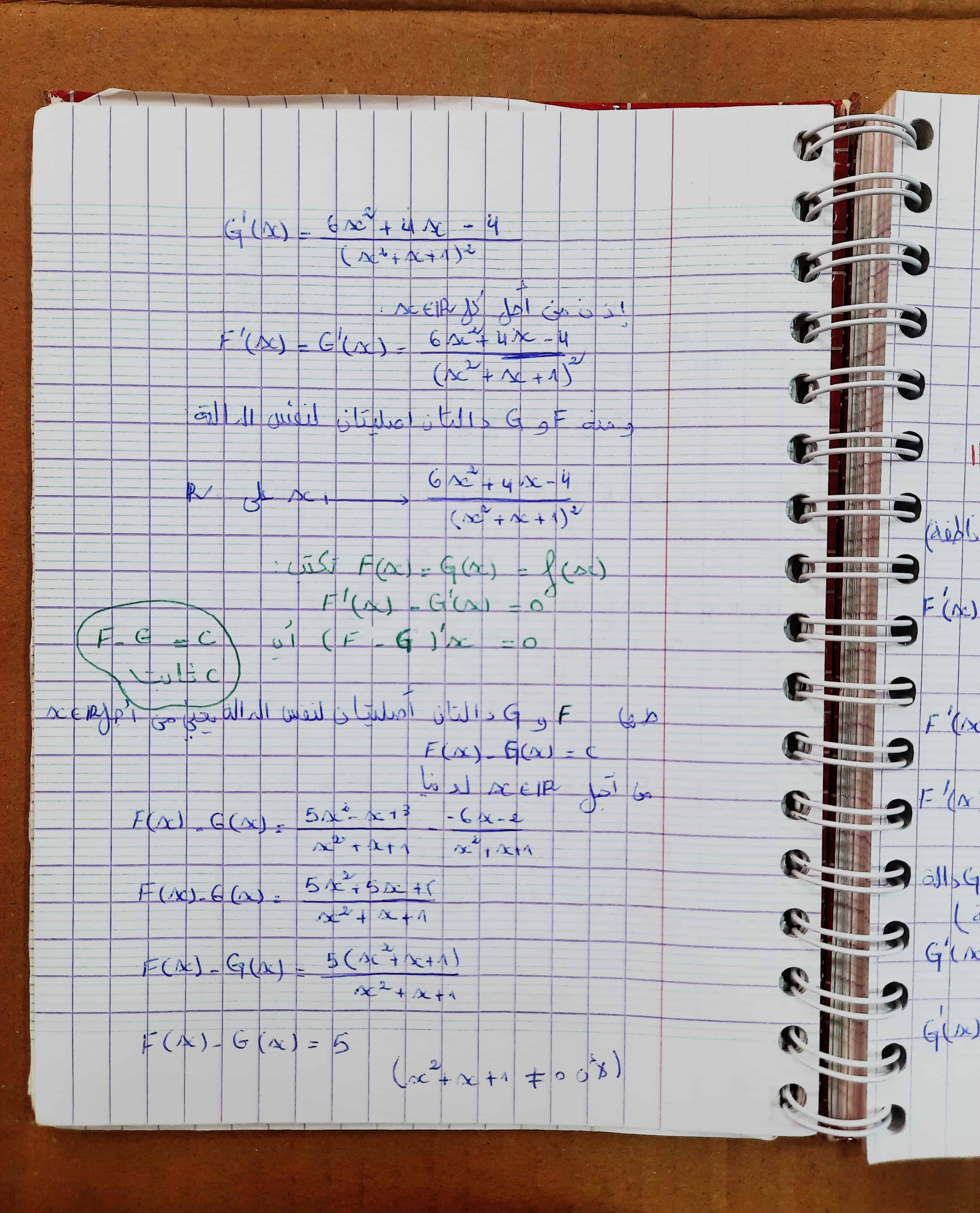
$$F'(x) = \frac{10x^3 + 10x^2 + 10x - x^2 - x - 1 - 10x^3 + 2x^2 - 6x - 5x^2 + x - 3}{(x^2+x+1)^2}$$

$$F'(x) = \frac{6x^2 + 4x - 4}{(x^2+x+1)^2}$$

ولدينا G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأن $D_G = \mathbb{R}$ و G دالة ناطقة)

$$G'(x) = \frac{-6(x^2+x+1) - (2x+1)(-6x-2)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$G'(x) \quad \frac{-6x^2 - 6x - 6 + 12x^2 + 4x + 6x + 2}{(x^2+x+1)^2}$$



$$G'(x) = \frac{6x^2+4x-4}{(x^2+x+1)^2}$$

إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = G'(x) = \frac{6x^2+4x-4}{(x^2+x+1)^2}$$

ومنه F و G دالتان اصليتان لنفس الدالة

$\mathbb{R}$ على $x \mapsto \dfrac{6x^2+4x-4}{(x^2+x+1)^2}$

نكتب: $F(x) = G(x) = f(x)$

$F'(x) - G'(x) = 0$

أي $(F - G)'x = 0$

$F - G = c$
c ثابت

لدينا F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة يعني من أجل $x \in \mathbb{R}$

$F(x) - G(x) = c$

من أجل $x \in \mathbb{R}$ لدينا

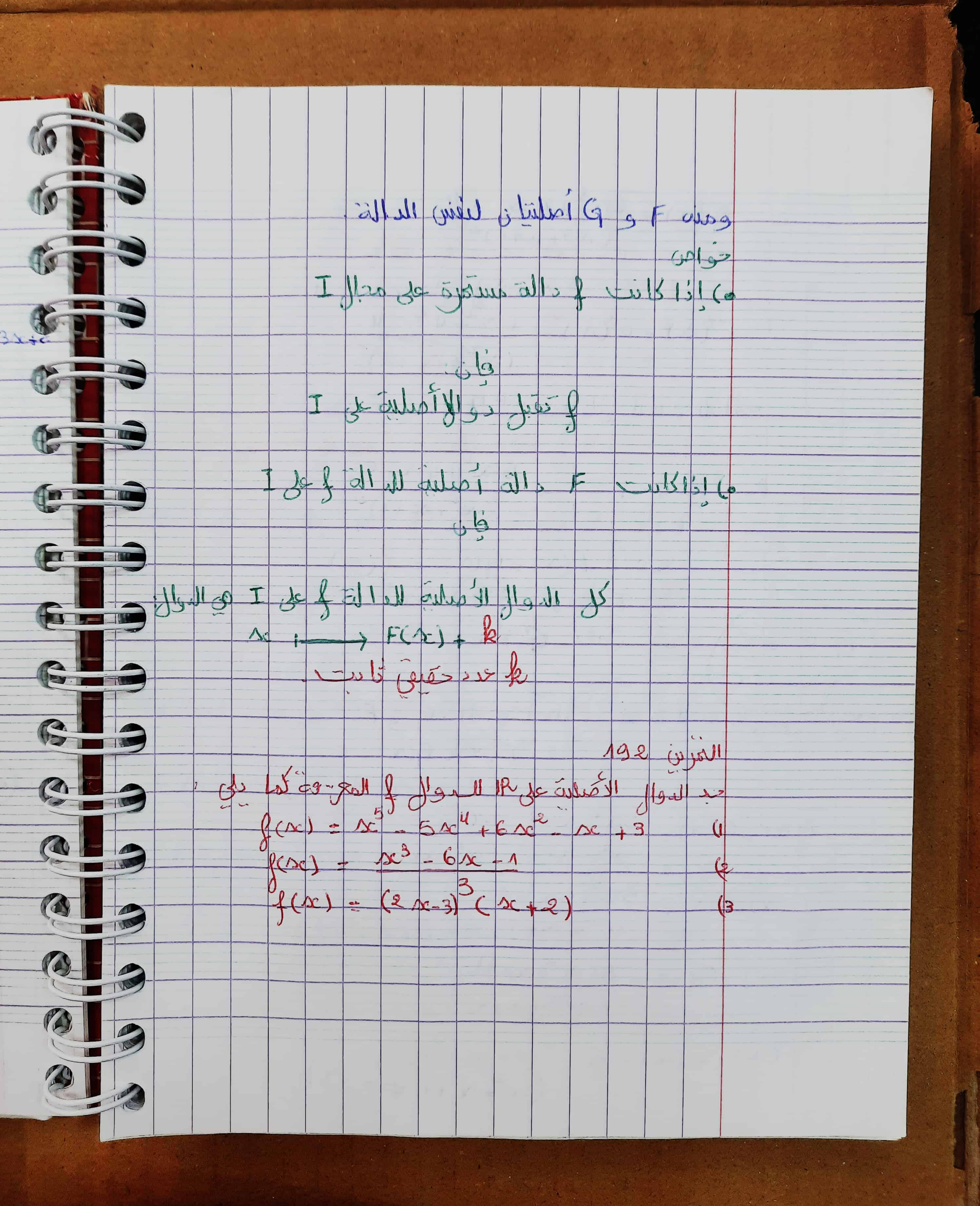
$$F(x) - G(x) = \frac{5x^2-x+3}{x^2+x+1} - \frac{-6x-2}{x^2+x+1}$$

$$F(x) - G(x) = \frac{5x^2+5x+5}{x^2+x+1}$$

$$F(x) - G(x) = \frac{5(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$$

$$F(x) - G(x) = 5$$

($x^2+x+1 \neq 0$ لأن)



ومنه F و G أصليتان لنفس الدالة.

خواص

1) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I

فإن:

f تقبل دوالاً أصلية على I

2) إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I

فإن

كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال

$x \longmapsto F(x) + k$

k عدد حقيقي ثابت.

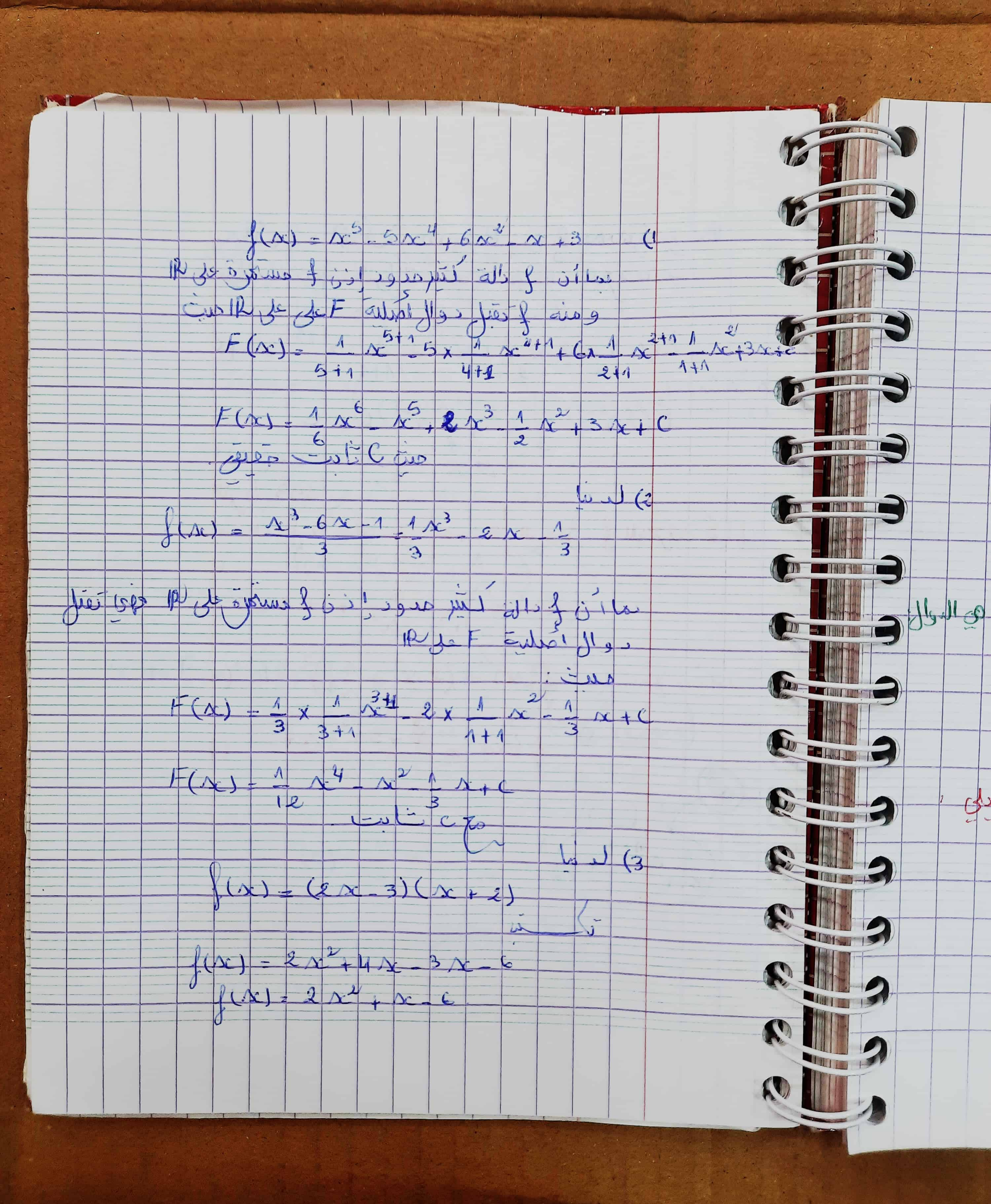
التمرين 192

جد الدوال الأصلية على $\mathbb{R}$ للدوال f المعرفة كما يلي:

1) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^2 - x + 3$

2) $f(x) = \underline{x^3 - 6x - 1}$

3) $f(x) = (2x-3)^3(x+2)$



1) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^2 - x + 3$

بما أن f دالة كثير حدود إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$

ومنه f تقبل دوال أصلية F على $\mathbb{R}$ حيث

$$F(x) = \frac{1}{5+1}x^{5+1} - 5 \times \frac{1}{4+1}x^{4+1} + 6 \times \frac{1}{2+1}x^{2+1} - \frac{1}{1+1}x^2 + 3x + c$$

$$F(x) = \frac{1}{6}x^6 - x^5 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

حيث C ثابت حقيقي.

2) لدينا

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x - 1}{3} = \frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{3}$$

بما أن f دالة كثير حدود إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دوال أصلية F على $\mathbb{R}$

حيث:

$$F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3+1}x^{3+1} - 2 \times \frac{1}{1+1}x^2 - \frac{1}{3}x + C$$

$$F(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^2 - \frac{1}{3}x + C$$

مع C ثابت.

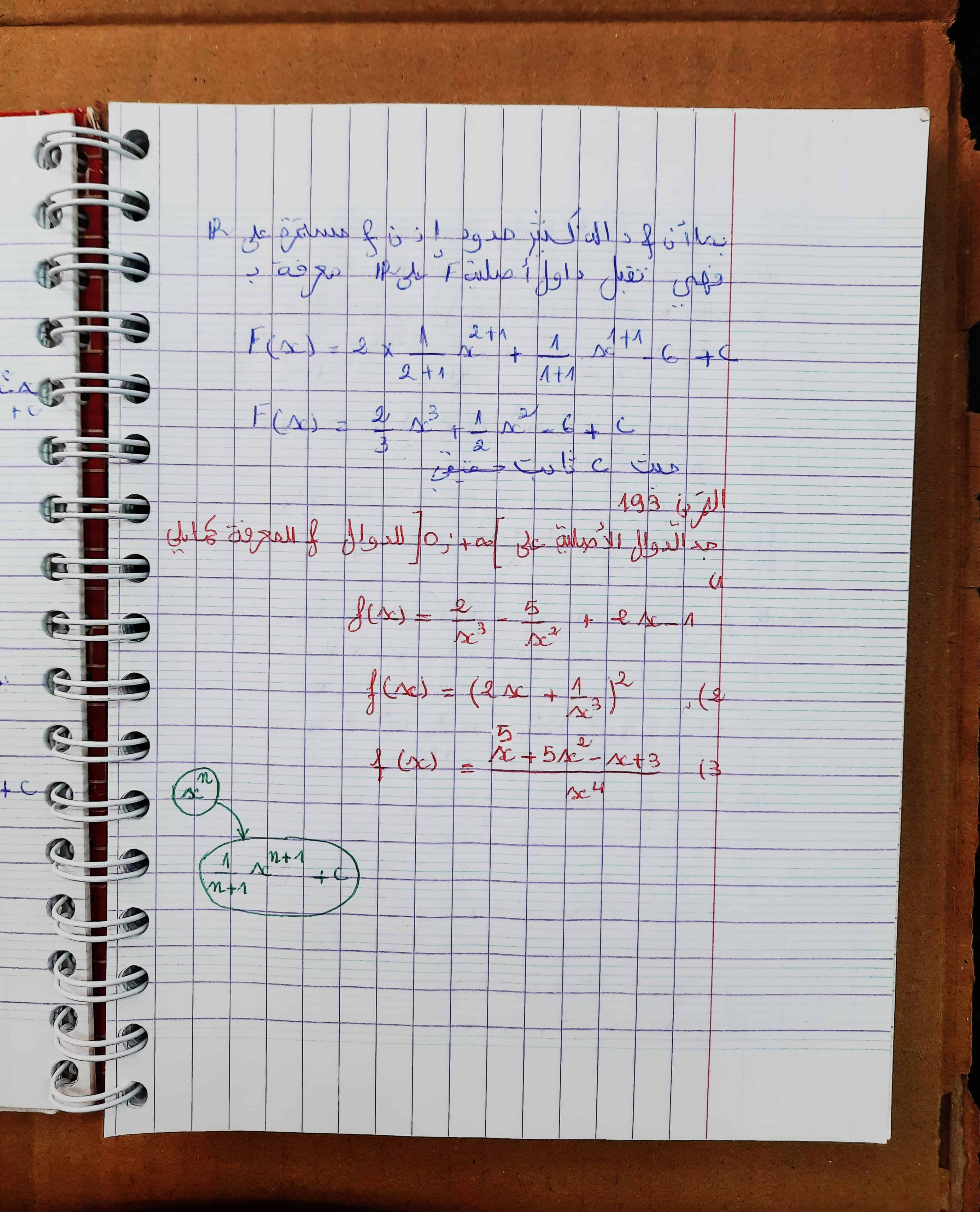
3) لدينا

$$f(x) = (2x-3)(x+2)$$

ننشر

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 3x - 6$$

$$f(x) = 2x^2 + x - 6$$



بما أن f دالة كثير حدود إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$

فهي تقبل دوال أصلية F على $\mathbb{R}$ معرفة ب

$$F(x) = 2 \times \frac{1}{2+1} x^{2+1} + \frac{1}{1+1} x^{1+1} - 6 + C$$

$$F(x) = \frac{2}{3} x^{3} + \frac{1}{2} x^{2} - 6 + C$$

حيث c ثابت حقيقي

التمرين 193

جد الدوال الأصلية على $]0;+\infty[$ للدوال f المعرفة كمايلي

(1

$$f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{5}{x^2} + 2x - 1$$

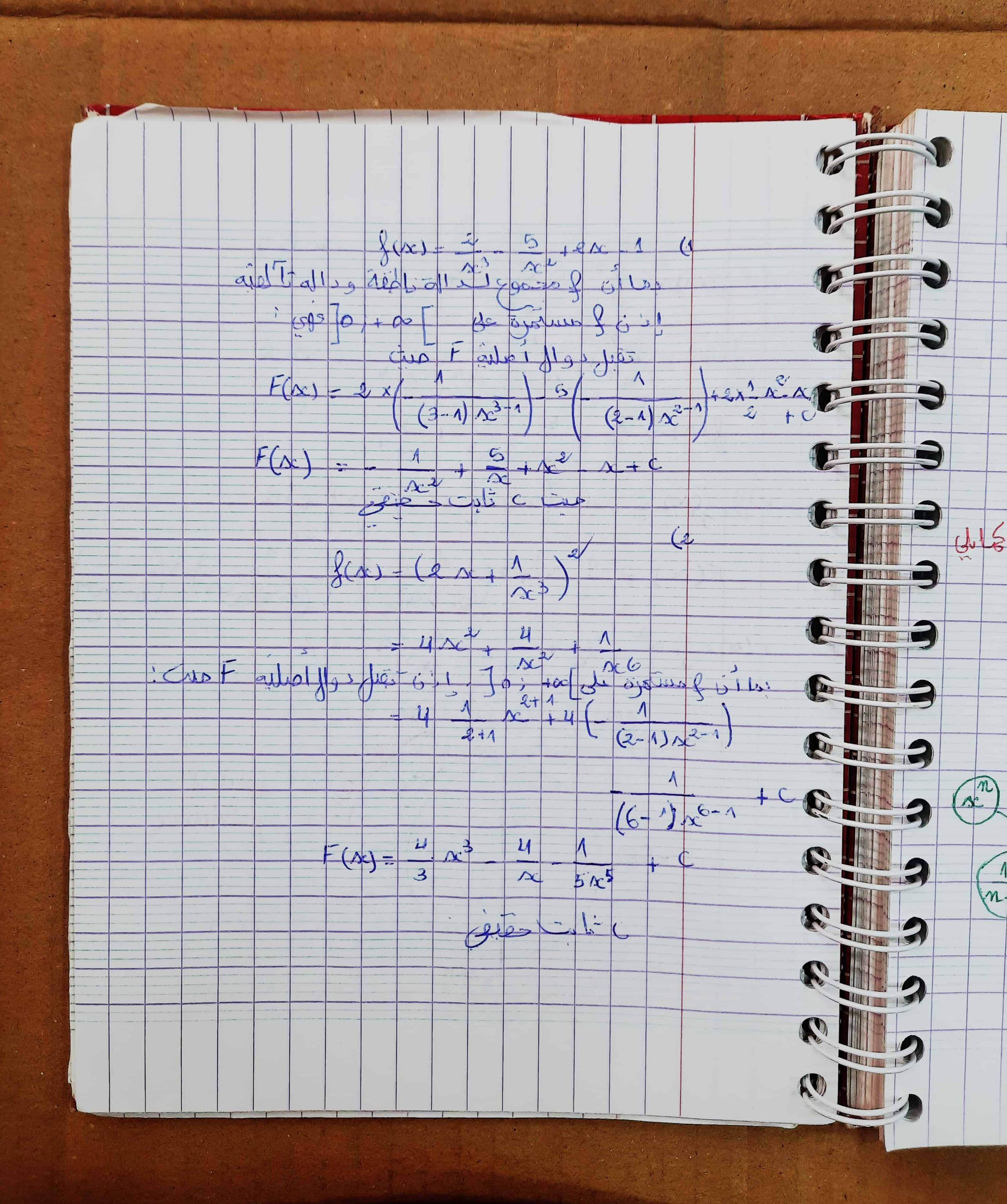
(2

$$f(x) = \left(2x + \frac{1}{x^3}\right)^2$$

(3

$$f(x) = \frac{x^5 + 5x^2 - x + 3}{x^4}$$

$$x^n \rightarrow \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$



(1
$$f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{5}{x^2} + 2x - 1$$

بما أن f مجموع لدوال ناطقة ودوال تآلفية

إذن f مستمرة على $]0,+\infty[$ وهي:

تقبل دوال أصلية F حيث

$$F(x) = 2\times\left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right) - 5\left(-\frac{1}{(2-1)x^{2-1}}\right) + 2\times\frac{1}{2}x^2 - x + c$$

$$F(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x} + x^2 - x + c$$

حيث c ثابت حقيقي

(2
$$f(x) = \left(2x + \frac{1}{x^3}\right)^2$$

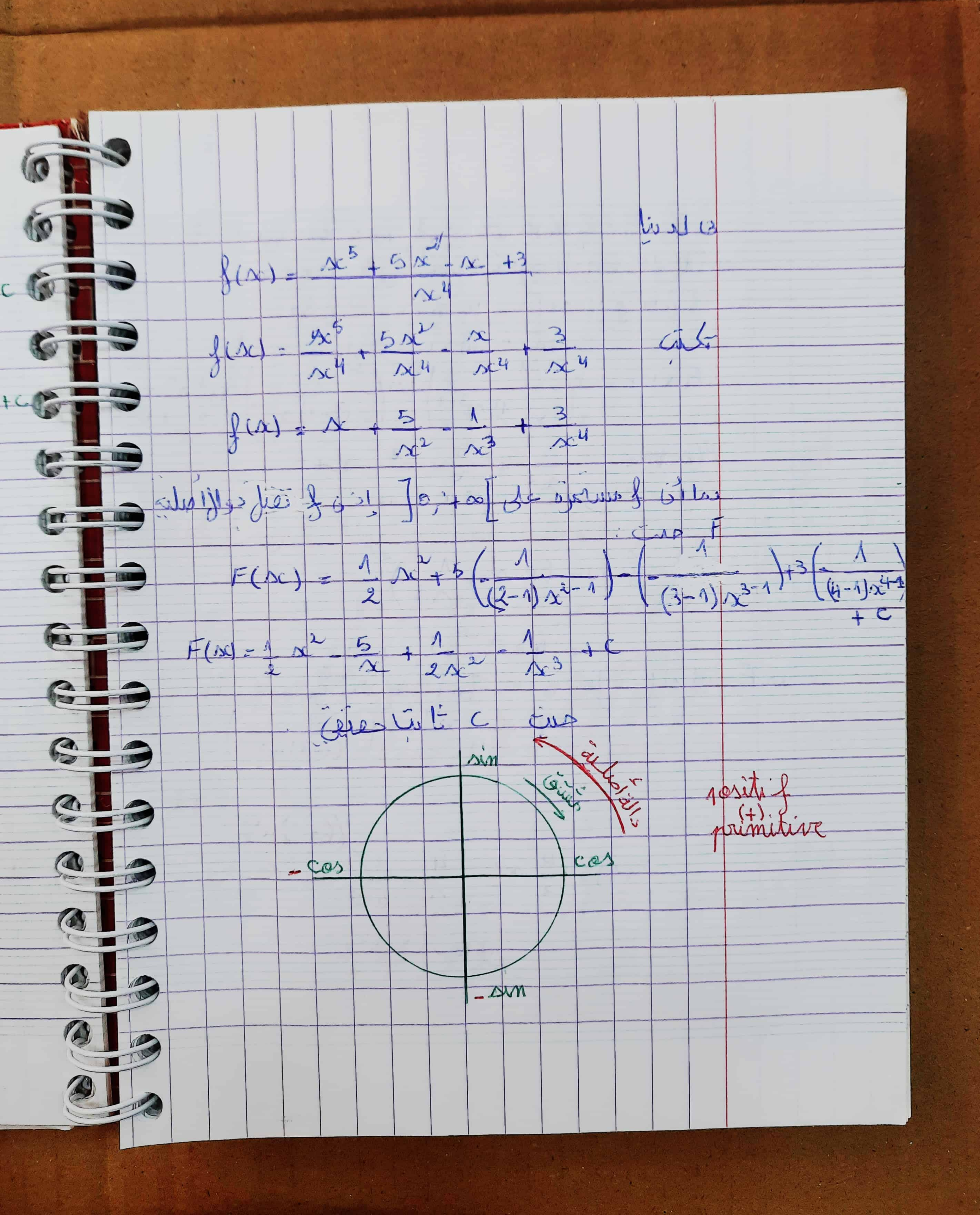
$$= 4x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^6}$$

بما أن f مستمرة على $]0;+\infty[$ إذن تقبل دوال أصلية F حيث:

$$= 4\,\frac{1}{2+1}x^{2+1} + 4\left(-\frac{1}{(2-1)x^{2-1}}\right) - \frac{1}{(6-1)x^{6-1}} + c$$

$$F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{x} - \frac{1}{5x^5} + c$$

c ثابت حقيقي



3) لدينا

$$f(x) = \frac{x^5 + 5x^2 - x + 3}{x^4}$$

تكتب

$$f(x) = \frac{x^5}{x^4} + \frac{5x^2}{x^4} - \frac{x}{x^4} + \frac{3}{x^4}$$

$$f(x) = x + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}$$

بما أن f مستمرة على $]0;+\infty[$ إذن f تقبل دوال أصلية

F حيث :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5\left(-\frac{1}{(2-1)x^{2-1}}\right) - \left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right) + 3\left(-\frac{1}{(4-1)\cdot x^{4-1}}\right) + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^3} + C$$

حيث C ثابت حقيقي

$f(x) = \sin x \qquad F(x) = -\cos x + c$

$f(x) = \sin(ax + b) \qquad F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$

$a \neq 0$

$f(x) = \cos x \qquad F(x) = \sin x + c$

$f(x) = \cos(ax + b) \qquad F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + c$

$a \neq 0$

التمرين 194

حدد الدوال الأصلية للدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

1) $f(x) = 3\cos 2x - 5\sin x + 7$

2) $f(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x+2) - x + 2x^2$

3) $f(x) = 6\sin(-x+3) + \frac{1}{2}\cos 4x$

1) $f(x) = 3\cos 2x - 5\sin x + 7$

بما أن f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ (مجموع دوال مستمرة على $\mathbb{R}$)

إذن f تقبل دوال أصلية F على $\mathbb{R}$

حيث: $F(x) = 3 \times \frac{1}{2}\sin 2x - 5(-\cos x) + 7x + c$

$F(x) = \frac{3}{2}\sin 2x + 5\cos x + 7x + c$

2) $f(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x+2) - x + 2x^2$

بما أن f مستمرة على $\mathbb{R}$ (مجموع دوال مستمرة على $\mathbb{R}$)

إذن f تقبل دوال أصلية F على $\mathbb{R}$

حيث: $F(x) = -\frac{1}{3} \times \left[-\frac{1}{3}\cos(3x+2)\right] - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + c$

ومنه

$F(x) = \frac{1}{9}\cos(3x+2) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + c$

3) $f(x) = 6\sin(-x+3) + \frac{1}{2}\cos 4x$

لدينا

$$F(x) = 6\left(-\frac{1}{-1}\cos(-x+3)\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

$$F(x) = 6\cos(-x+3) + \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

التمرين (195)

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

جد الدوال الأصلية للدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \cos^2 x$

1) $f(x) = \cos^2 x$ sin

نعلم أن $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

إذن $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

أي $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

ومنه الدوال الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

هي معرفة بـ $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin 2x + C$

2) $f(x) = \cos x \sin x$

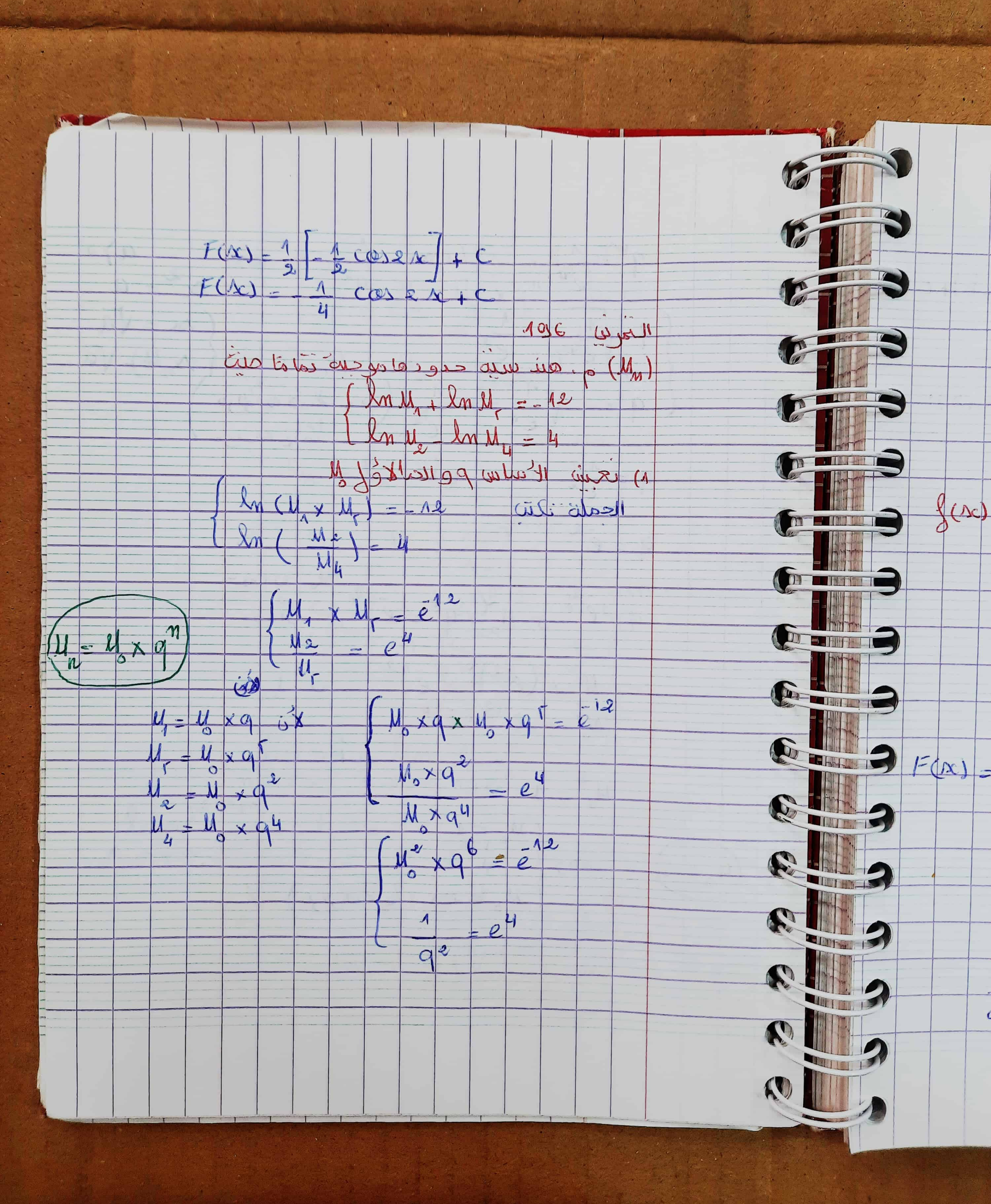
نعلم أن

$$\sin 2x = 2\cos x \sin x$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x = \cos x \sin x$$

أي $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$

ومنه



$$F(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right] + C$$
$$F(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

التمرين 196

(u_n) م. هندسية حدودها موجبة تماما حيث

$$\begin{cases} \ln u_1 + \ln u_5 = -12 \\ \ln u_2 - \ln u_4 = 4 \end{cases}$$

1) تعيين الأساس q والحد الأول u_0

الجملة تكتب

$$\begin{cases} \ln(u_1 \times u_5) = -12 \\ \ln\left(\frac{u_2}{u_4}\right) = 4 \end{cases}$$

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$\begin{cases} u_1 \times u_5 = e^{-12} \\ \frac{u_2}{u_4} = e^4 \end{cases}$$

لدينا

$u_1 = u_0 \times q$

$u_5 = u_0 \times q^5$

$u_2 = u_0 \times q^2$

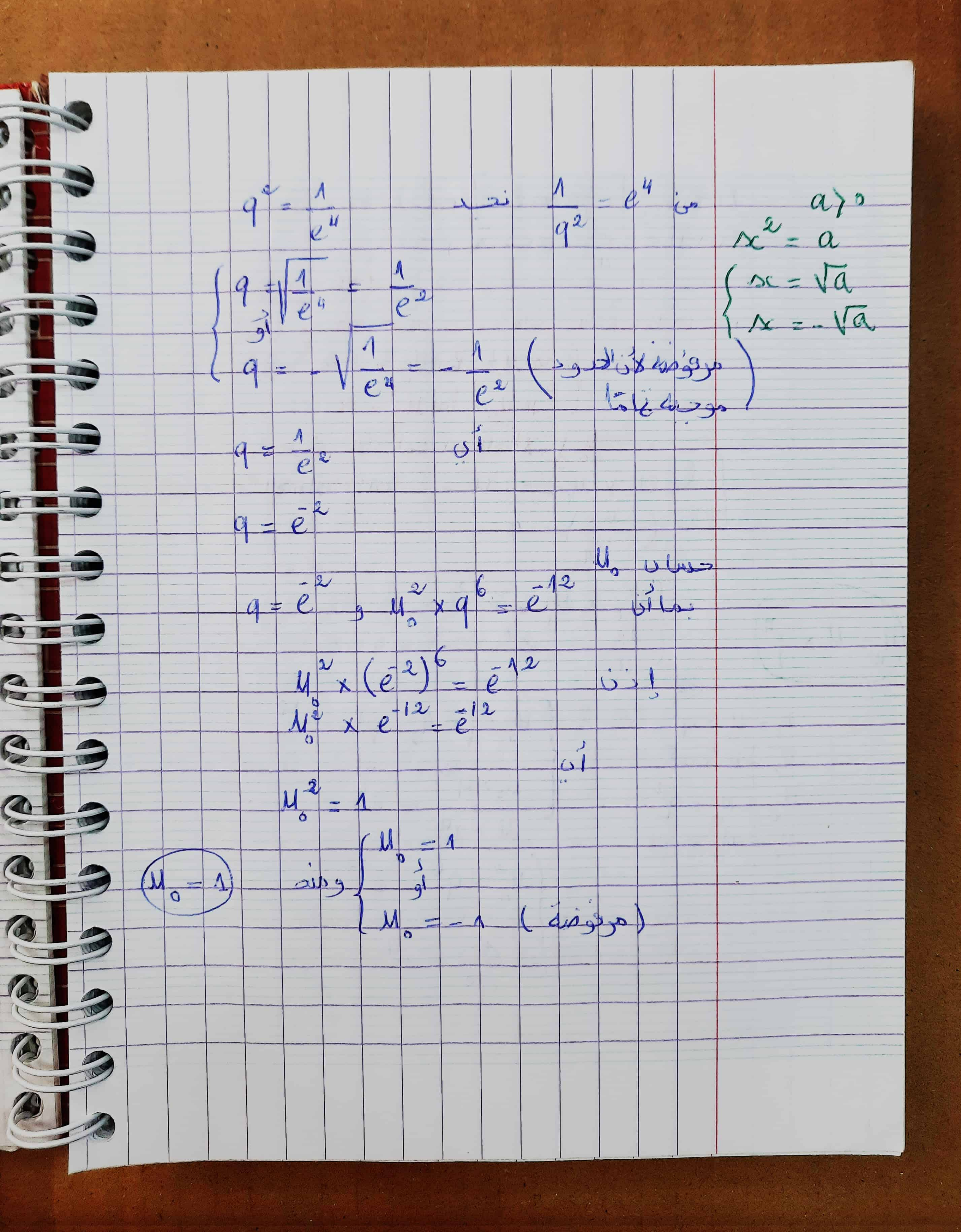
$u_4 = u_0 \times q^4$

$$\begin{cases} u_0 \times q \times u_0 \times q^5 = e^{-12} \\ \frac{u_0 \times q^2}{u_0 \times q^4} = e^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0^2 \times q^6 = e^{-12} \\ \frac{1}{q^2} = e^4 \end{cases}$$

$f(x)$

$F(x) =$



من $\frac{1}{q^2} = e^4$ نجد $q^2 = \frac{1}{e^4}$

$a > 0$

$x^2 = a$

$\begin{cases} x = \sqrt{a} \\ x = -\sqrt{a} \end{cases}$

$q = \sqrt{\frac{1}{e^4}} = \frac{1}{e^2}$

أو

$q = -\sqrt{\frac{1}{e^4}} = -\frac{1}{e^2}$ (مرفوضة لأن الحدود موجبة تماما)

أي $q = \frac{1}{e^2}$

$q = e^{-2}$

حساب u_0

بما أن $q = e^{-2}$ و $u_0^2 \times q^6 = e^{-12}$

إذن $u_0^2 \times (e^{-2})^6 = e^{-12}$

$u_0^2 \times e^{-12} = e^{-12}$

أي

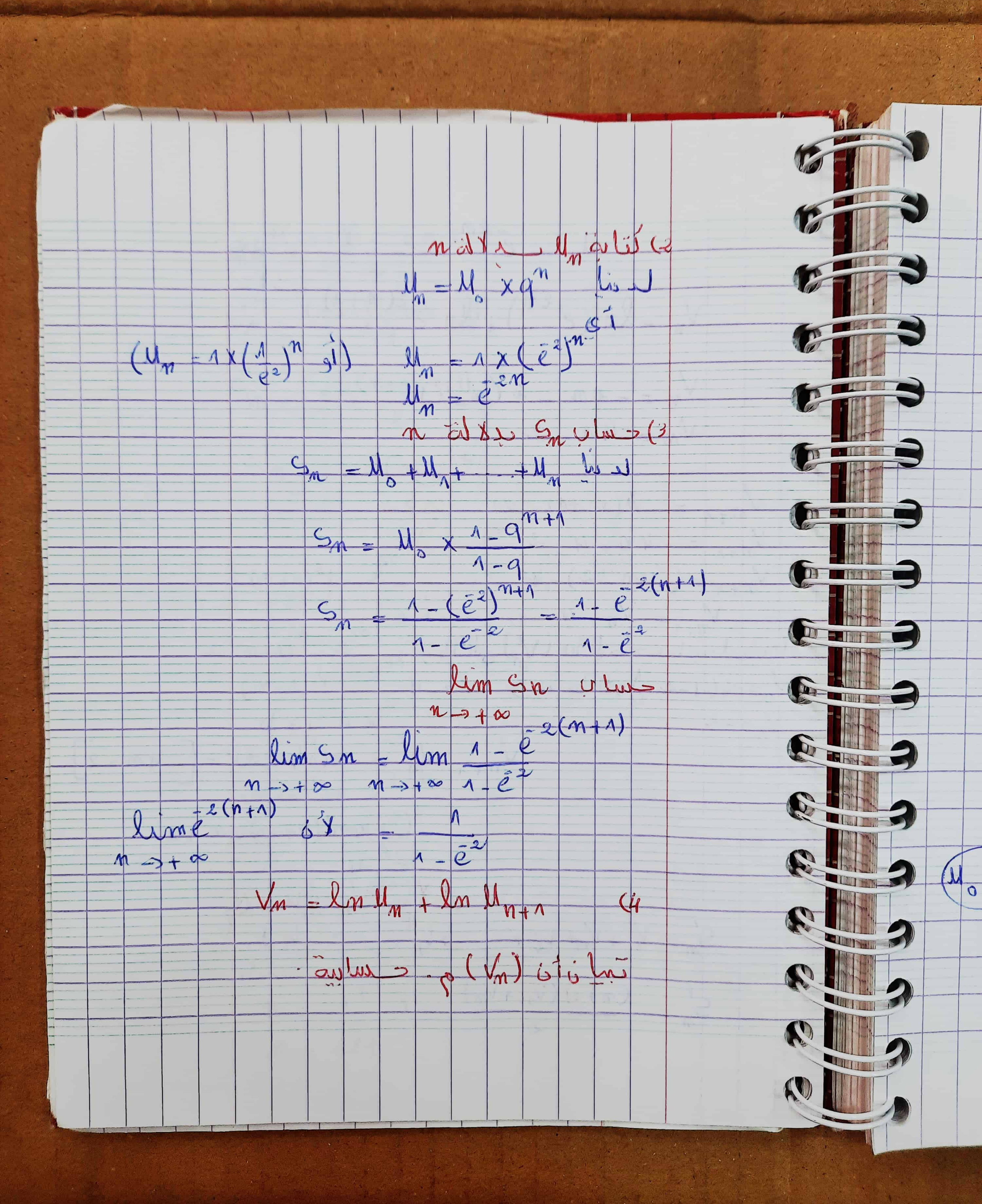
$u_0^2 = 1$

ومنه $u_0 = 1$

أو

$u_0 = -1$ (مرفوضة)

$u_0 = 1$



2) كتابة U_n بدلالة n

لدينا $U_n = U_0 \times q^n$

أي

$U_n = 1 \times (e^{-2})^n$ (أو $U_n = 1 \times (\frac{1}{e^2})^n$)

$U_n = e^{-2n}$

3) حساب S_n بدلالة n

لدينا $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$$S_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{1 - (e^{-2})^{n+1}}{1 - e^{-2}} = \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}}$$

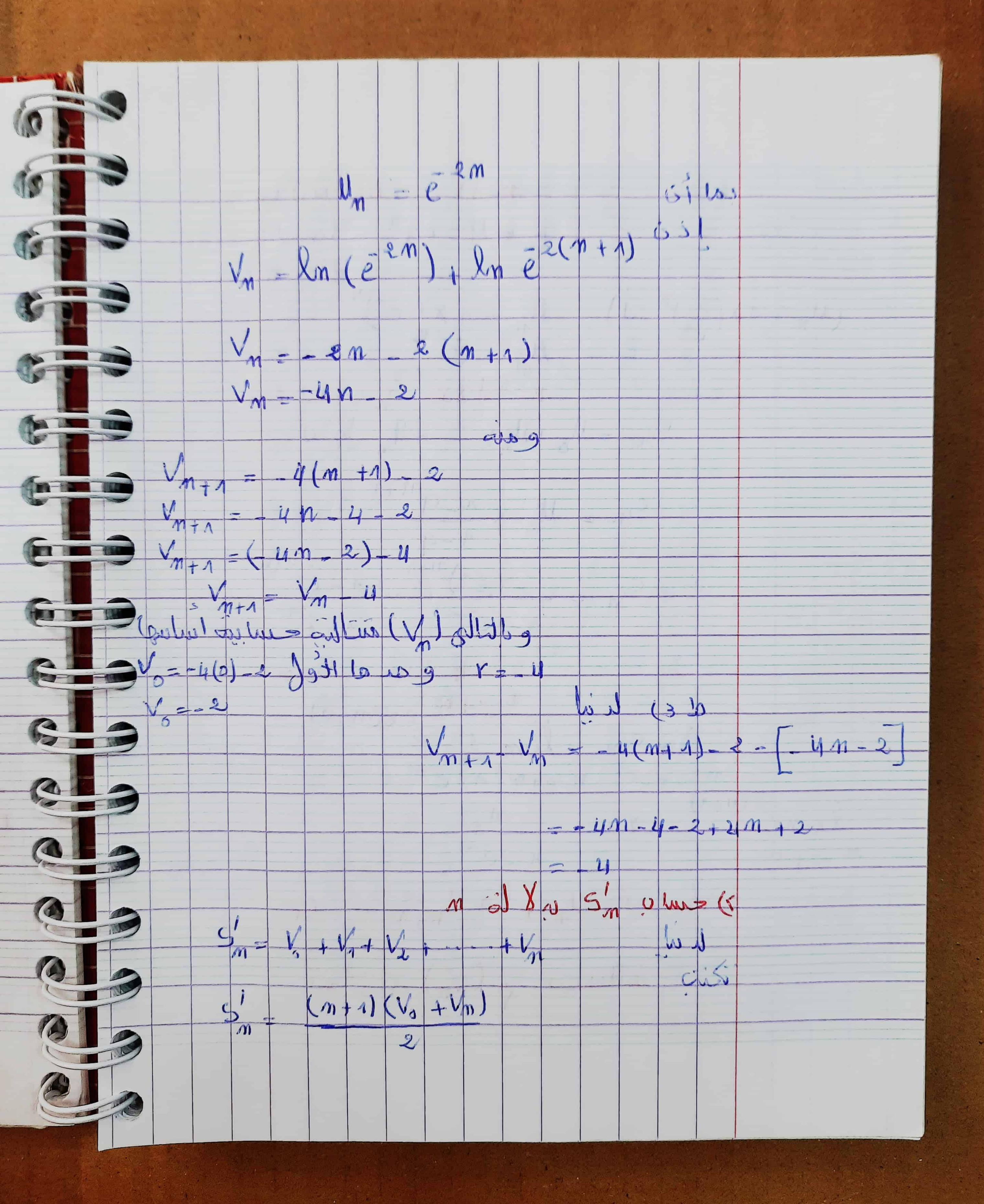
حساب $\lim_{n \to +\infty} S_n$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2}}$$ لأن $\lim_{n \to +\infty} e^{-2(n+1)}$

4) $V_n = \ln U_n + \ln U_{n+1}$

تبيان أن (V_n) م. حسابية.



بما أن $u_n = e^{-2n}$

إذن $V_n = \ln(e^{-2n}) + \ln e^{-2(n+1)}$

$V_n = -2n - 2(n+1)$

$V_n = -4n - 2$

ومنه

$V_{n+1} = -4(n+1) - 2$

$V_{n+1} = -4n - 4 - 2$

$V_{n+1} = (-4n - 2) - 4$

$V_{n+1} = V_n - 4$

وبالتالي (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = -4$ وحدها الأول $V_0 = -4(0) - 2$

$V_0 = -2$

طـ 3) لدينا

$V_{n+1} - V_n = -4(n+1) - 2 - [-4n - 2]$

$= -4n - 4 - 2 + 4n + 2$

$= -4$

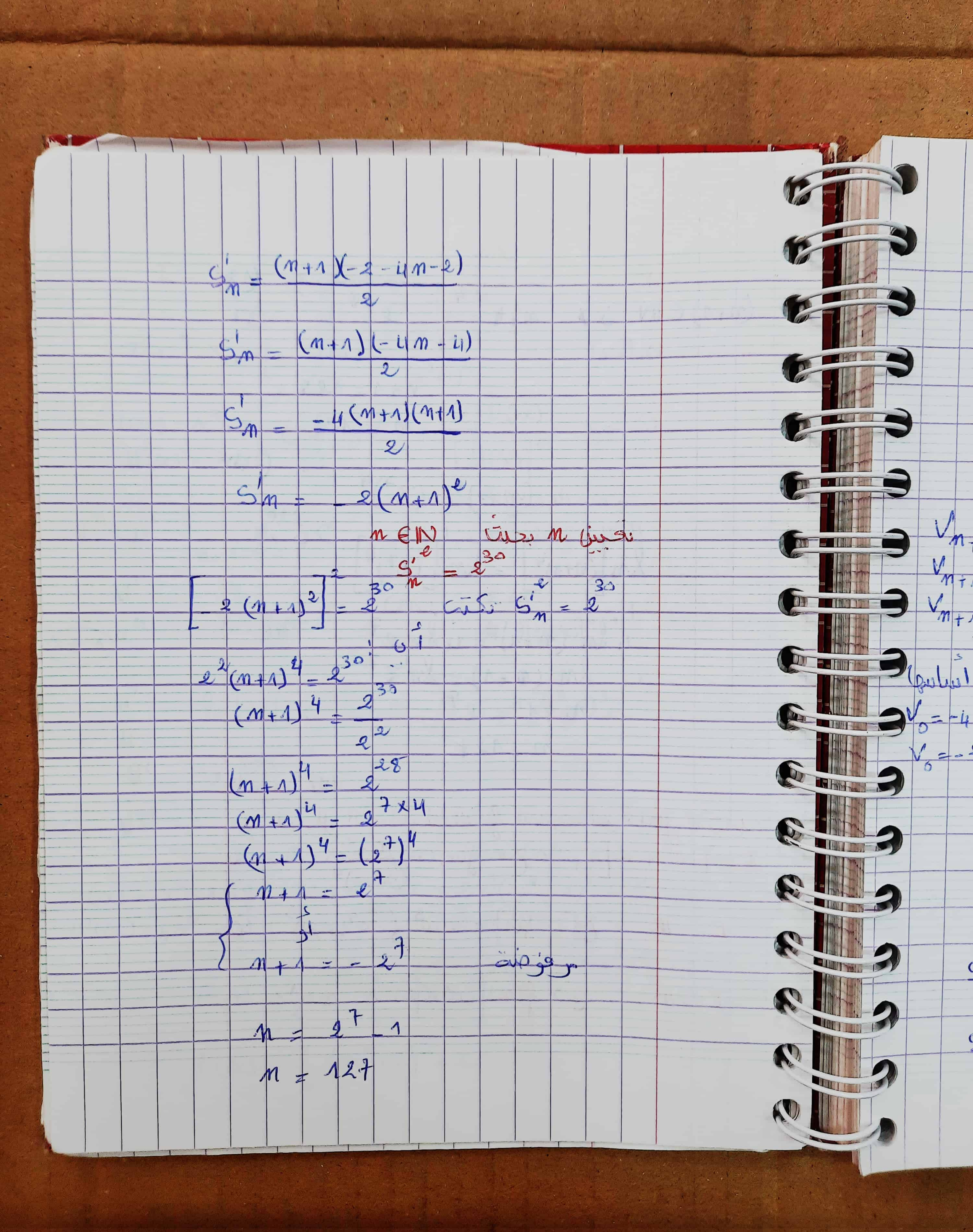
2) حساب S'_n بدلالة n

لدينا

$S'_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$

نكتب

$S'_n = \frac{(n+1)(V_0 + V_n)}{2}$



$$S'_n = \frac{(n+1)(-2-4n-2)}{2}$$

$$S'_n = \frac{(n+1)(-4n-4)}{2}$$

$$S'_n = \frac{-4(n+1)(n+1)}{2}$$

$$S'_n = -2(n+1)^2$$

تعيين n بحيث $n \in \mathbb{N}$

$$S'^2_n = 2^{30}$$

تكافئ $S'^2_n = 2^{30}$

$$\left[-2(n+1)^2\right]^2 = 2^{30}$$

أي

$$2^2(n+1)^4 = 2^{30}$$

$$(n+1)^4 = \frac{2^{30}}{2^2}$$

$$(n+1)^4 = 2^{28}$$

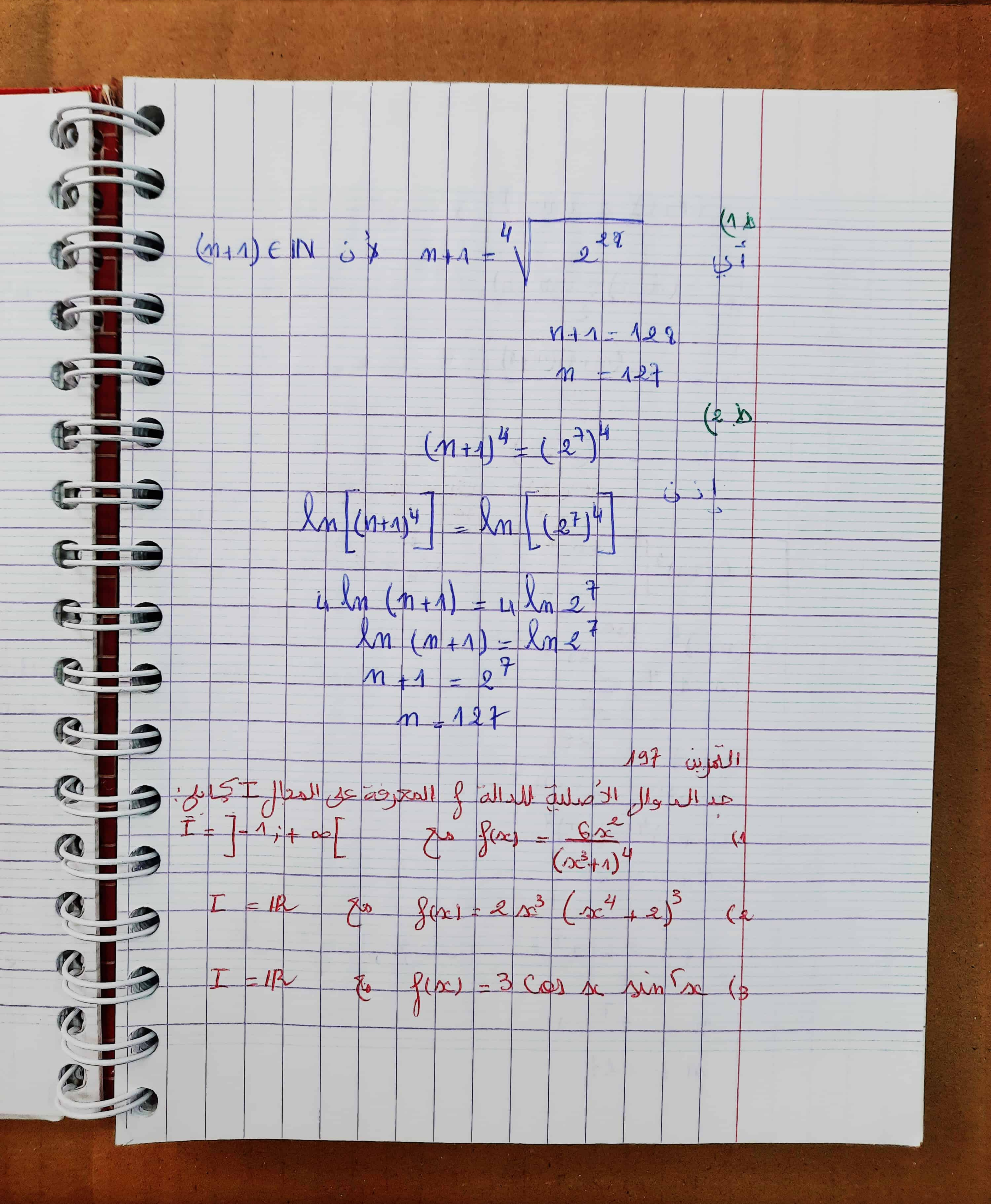
$$(n+1)^4 = 2^{7\times 4}$$

$$(n+1)^4 = (2^7)^4$$

$n+1 = 2^7$ أو $n+1 = -2^7$ مرفوضة

$$n = 2^7 - 1$$

$$n = 127$$



ط1)
أ) ب)

$(n+1) \in \mathbb{N}$ لأن $\quad n+1 = \sqrt[4]{2^{28}}$

$n+1 = 128$

$n = 127$

ط2)

$(n+1)^4 = (2^7)^4$

إذن

$\ln\left[(n+1)^4\right] = \ln\left[(2^7)^4\right]$

$4\ln(n+1) = 4\ln 2^7$

$\ln(n+1) = \ln 2^7$

$n+1 = 2^7$

$n = 127$

التمرين 197

جد الدوال الأصلية للدالة f المعرفة على المجال I كما يلي:

1) $f(x) = \dfrac{6x^2}{(x^3+1)^4}$ مع $I =]-1;+\infty[$

2) $f(x) = 2x^3(x^4+2)^3$ مع $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = 3\cos x \sin^5 x$ مع $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ مع $I = \mathbb{R}$

2) الدنيا: $f(x) = \dfrac{6x^2}{(x^3+1)^4}$ ، $I =]-1;+\infty[$

نكتب $f(x) = \dfrac{2\,u'(x)}{[u(x)]^4}$ بوضع $u(x) = x^3+1$

أي $u'(x) = 3x^2$

ومنه الدوال الأصلية F للدالة f على $]-1;+\infty[$ هي معرفة بـ:

$$F(x) = -\frac{2\times 1}{(4-1)[u(x)]^{4-1}} + C$$

$$F(x) = -\frac{2}{3(x^3+1)^3} + C$$

$u^n \times u'$	$\dfrac{1}{n+1} u^{n+1} + C$
$\dfrac{u'}{u^n}$ ($n \neq 1$)	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$

ج) الدنيا:

$f(x) = 2x^3(x^4+2)^3$ مع $I = \mathbb{R}$

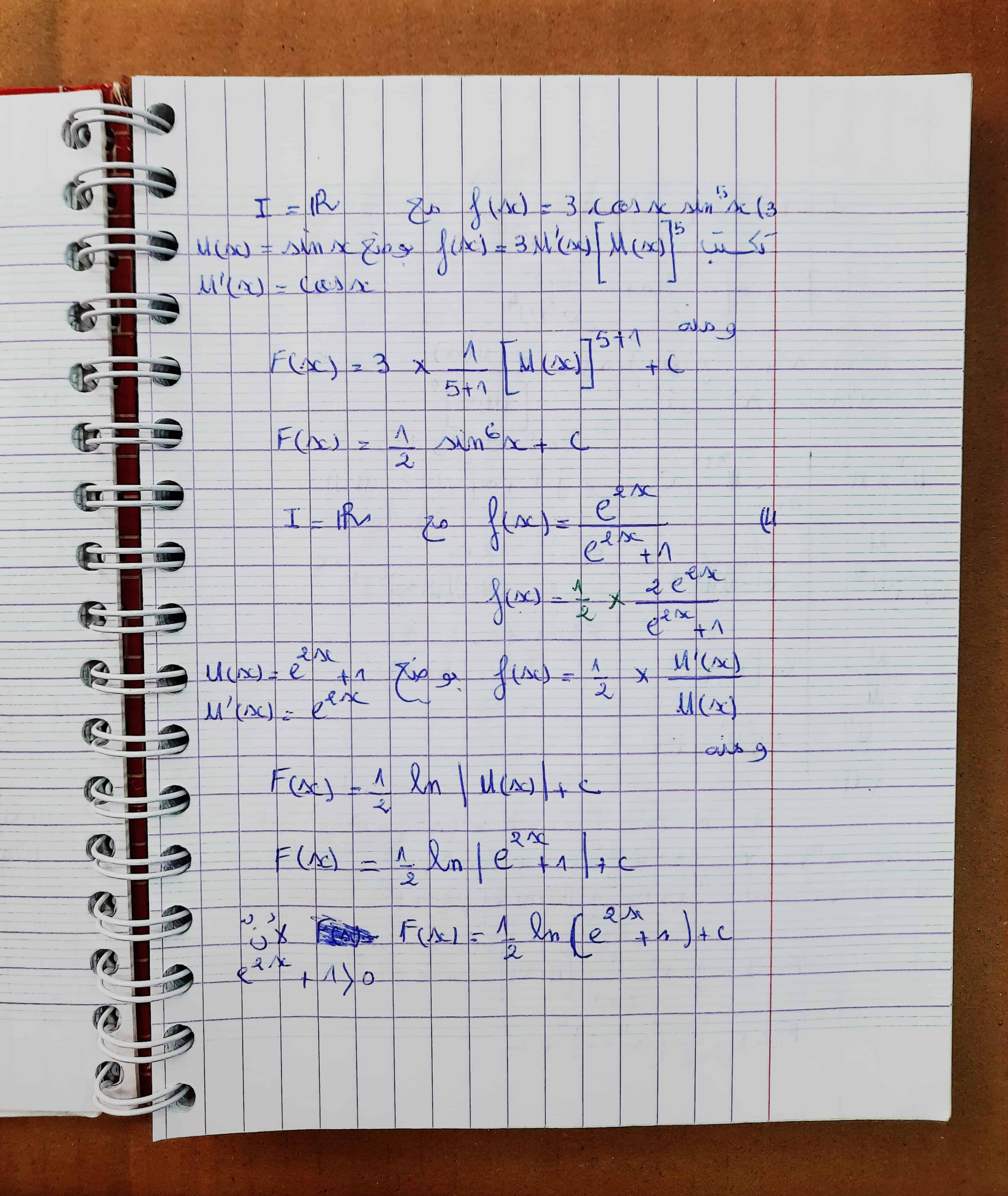
نكتب $f(x) = \frac{1}{2}\times 2\times 2x^3(x^4+2)^3$ ، $u(x) = x^4+2$ نضع

$f(x) = \frac{1}{2}\,u'(x)\times[u(x)]^3$ أي $u'(x) = 4x^3$

ومنه

$$F(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3+1}[u(x)]^{3+1} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{8}(x^4+2)^4 + C$$



3) $f(x) = 3\cos x \sin^5 x$ مع $I = \mathbb{R}$

نكتب $f(x) = 3u'(x)\left[u(x)\right]^5$ مع وضع $u(x) = \sin x$

$u'(x) = \cos x$

ومنه

$$F(x) = 3 \times \frac{1}{5+1}\left[u(x)\right]^{5+1} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin^6 x + C$$

4) $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ مع $I = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ مع وضع $u(x) = e^{2x}+1$

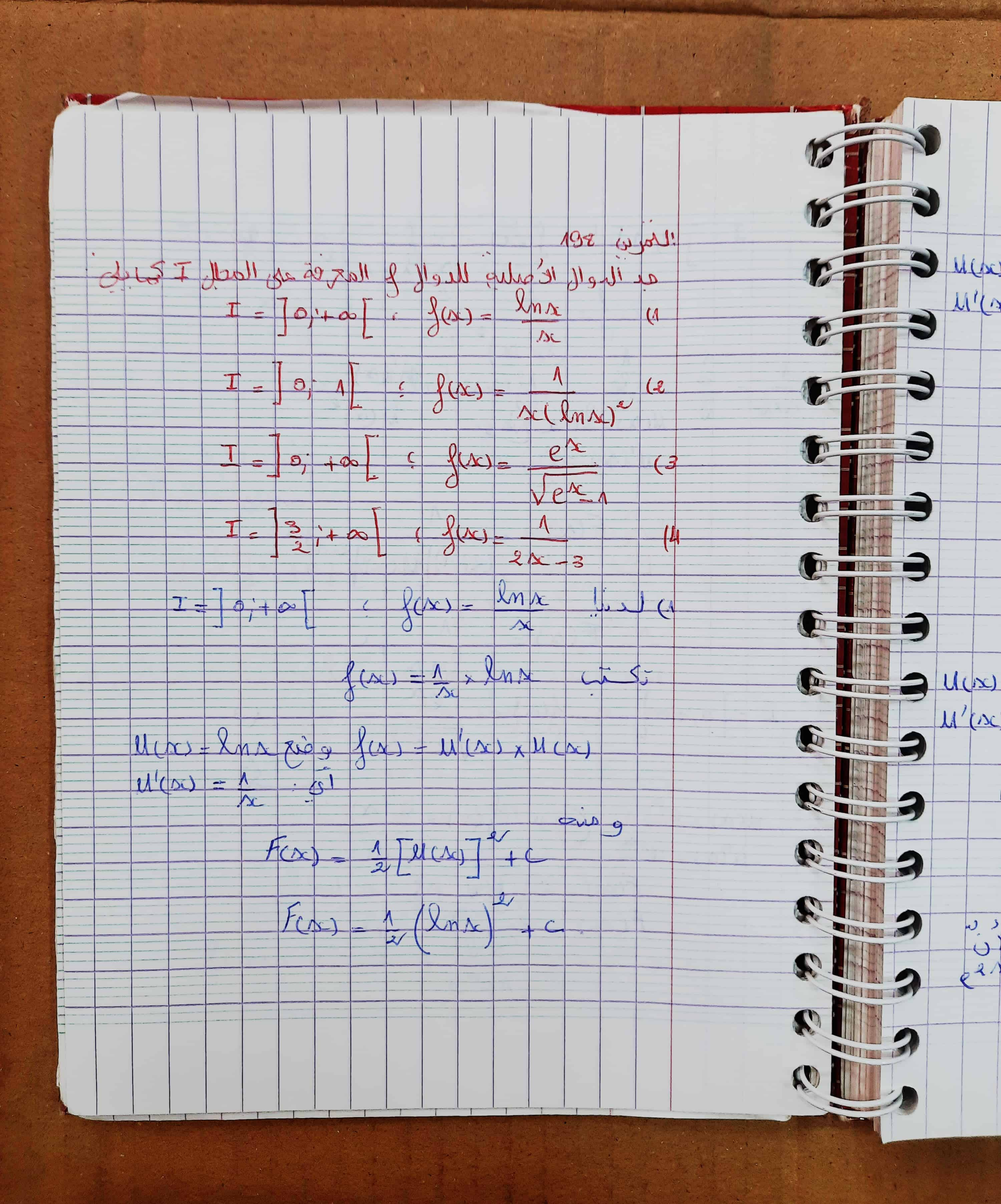
$u'(x) = e^{2x}$

ومنه

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|u(x)\right| + c$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right| + c$$

$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right) + c$ لأن $e^{2x}+1 > 0$



التمرين 198

جد الدوال الأصلية للدوال f المعرفة على المجال I كما يلي

1) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ؛ $I =]0;+\infty[$

2) $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ ؛ $I =]0;1[$

3) $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}}$ ؛ $I =]0;+\infty[$

4) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ ؛ $I =]\frac{3}{2};+\infty[$

الحل:

1) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ؛ $I =]0;+\infty[$

نكتب $f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x$

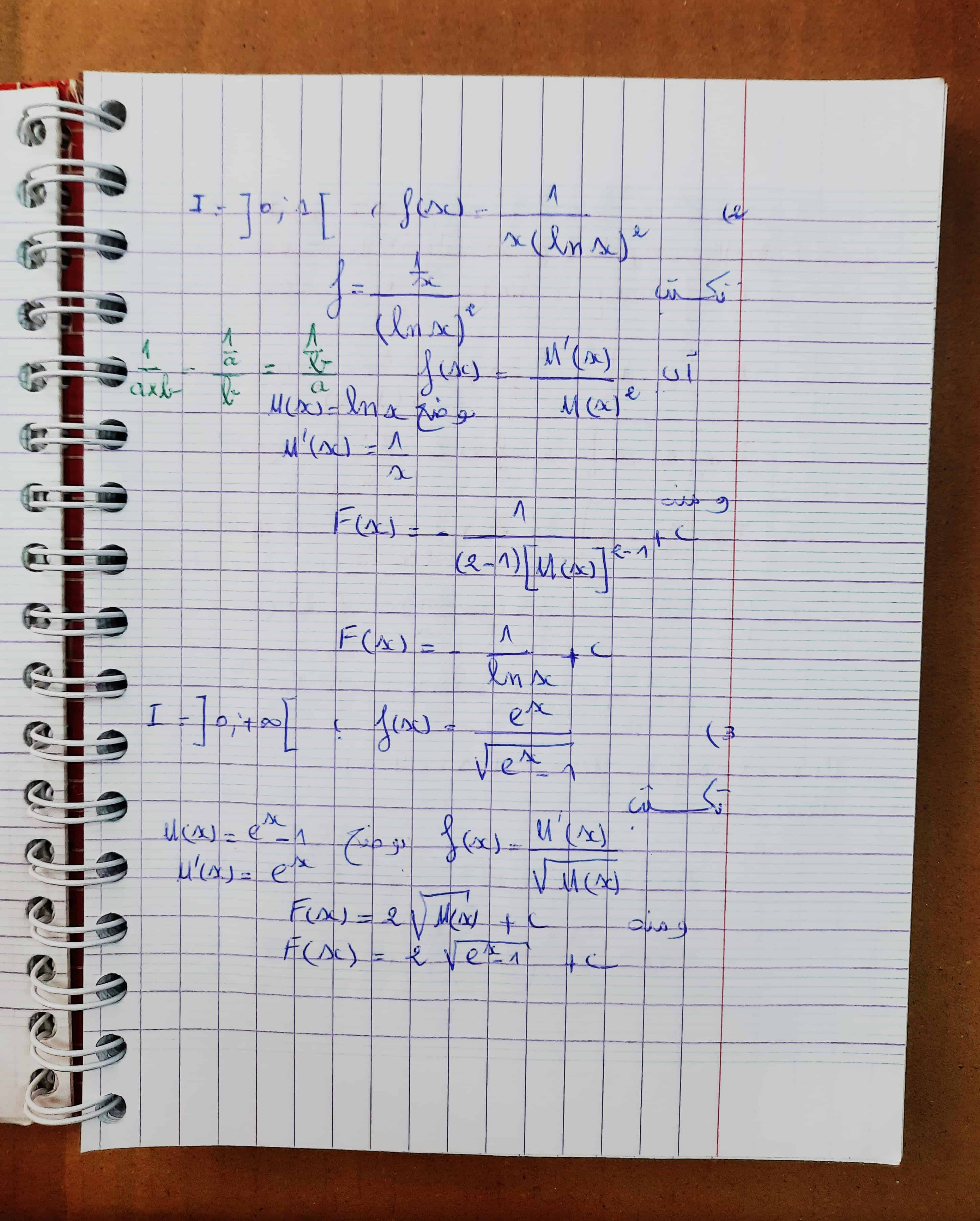
نضع $u(x) = \ln x$ و $f(x) = u'(x) \times u(x)$

أي: $u'(x) = \frac{1}{x}$

ومنه

$$F(x) = \frac{1}{2}[u(x)]^2 + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$



2) $I =]0;1[$, $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

نكتب

$$f = \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$\frac{1}{a \times b} = \frac{\frac{1}{a}}{b} = \frac{\frac{1}{b}}{a}$$

أي

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^2}$$

نضع $u(x) = \ln x$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

ومنه

$$F(x) = -\frac{1}{(2-1)[u(x)]^{2-1}} + c$$

$$F(x) = -\frac{1}{\ln x} + c$$

3) $I =]0;+\infty[$; $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}}$

نكتب

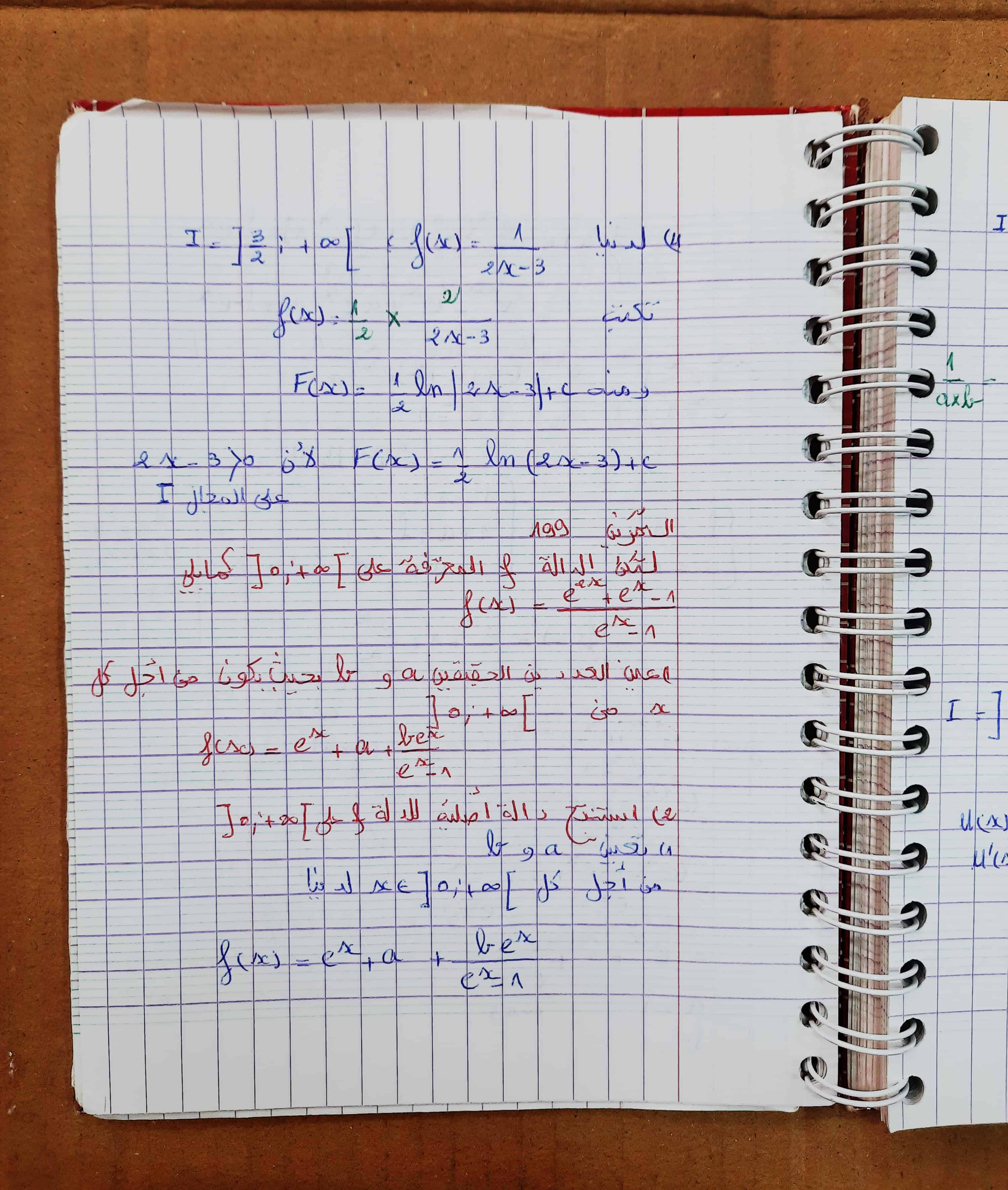
نضع $u(x) = e^x - 1$, $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

$$u'(x) = e^x$$

ومنه

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c$$

$$F(x) = 2\sqrt{e^x - 1} + c$$



4) لدينا $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ ، $I =]\frac{3}{2} ; +\infty[$

تكتب $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x-3}$

ومنه $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + c$

$F(x) = \frac{1}{2} \ln(2x-3) + c$ لأن $2x-3 > 0$ على المجال I

التمرين 199

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^{x} - 1}{e^{x} - 1}$$

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل x من $]0;+\infty[$

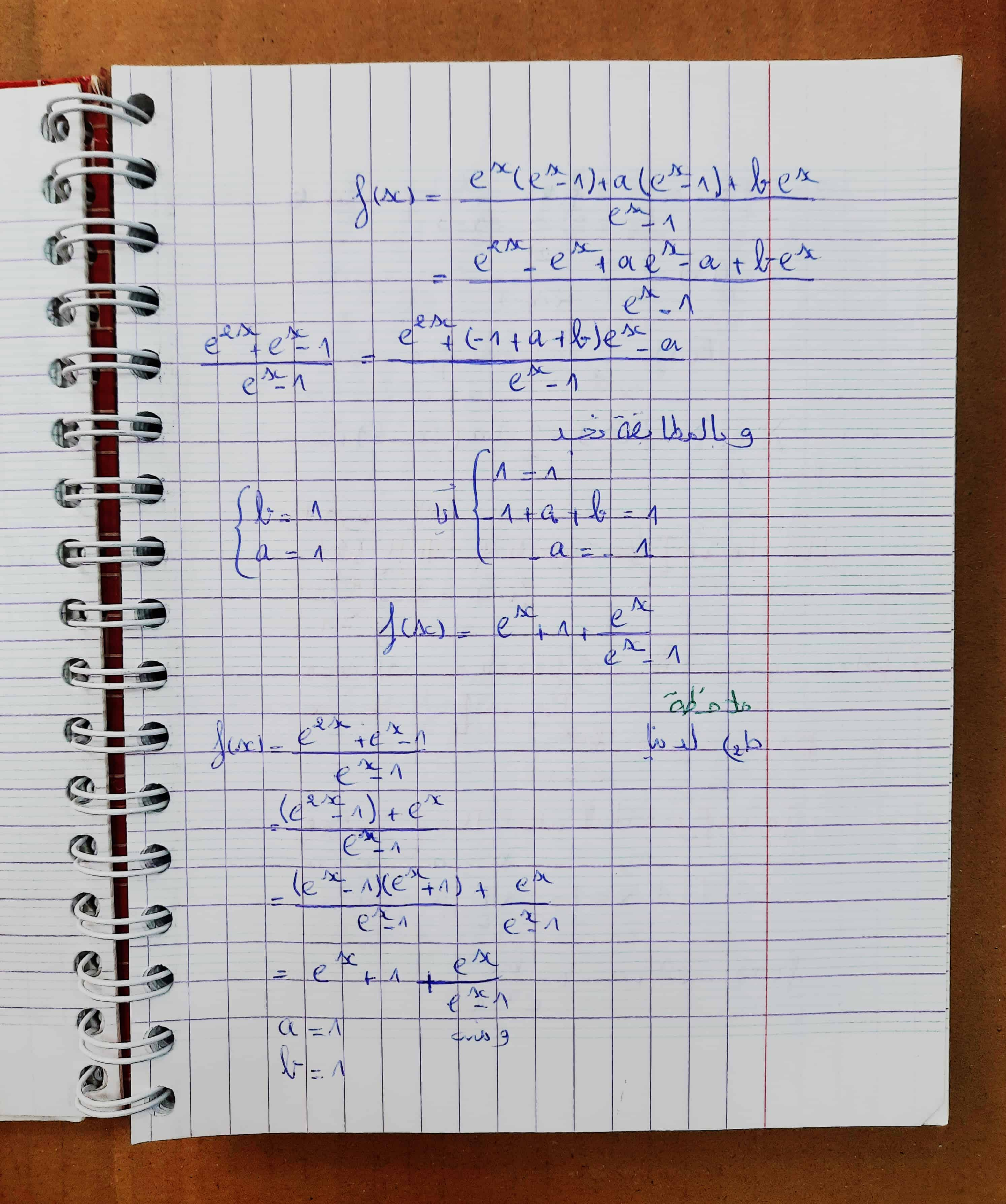
$$f(x) = e^{x} + a + \frac{be^{x}}{e^{x} - 1}$$

2) استنتج دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$

1) تعيين a و b

من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ لدينا

$$f(x) = e^{x} + a + \frac{be^{x}}{e^{x} - 1}$$



$$f(x) = \frac{e^{x}(e^{x}-1) + a(e^{x}-1) + b e^{x}}{e^{x}-1}$$

$$= \frac{e^{2x} - e^{x} + a e^{x} - a + b e^{x}}{e^{x}-1}$$

$$\frac{e^{2x}+e^{x}-1}{e^{x}-1} = \frac{e^{2x} + (-1+a+b)e^{x} - a}{e^{x}-1}$$

وبالمطابقة نجد

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ -1+a+b = 1 \\ -a = -1 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = e^{x} + 1 + \frac{e^{x}}{e^{x}-1}$$

ملاحظة

ط2) لدينا

$$f(x) = \frac{e^{2x}+e^{x}-1}{e^{x}-1}$$

$$= \frac{(e^{2x}-1)+e^{x}}{e^{x}-1}$$

$$= \frac{(e^{x}-1)(e^{x}+1)}{e^{x}-1} + \frac{e^{x}}{e^{x}-1}$$

$$= e^{x} + 1 + \frac{e^{x}}{e^{x}-1}$$

ومنه

$a = 1$

$b = 1$

ج) استنتاج دالة أصلية لـ f على $]0;+\infty[$

لدينا $f(x) = e^{x}+1+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}$

ومنه الدوال الأصلية F لـ f على $]0;+\infty[$

هي معرفة كما يلي:

$F(x) = e^{x}+x+\ln|e^{x}-1|+c$

$F(x) = e^{x}+x+\ln(e^{x}-1)+c$

لأن $e^{x}-1>0$

$u' \times e^{u}$	$e^{u}+c$
e^{ax+b} $a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$

التمرين 200

جد الدوال الأصلية للدوال f المعرفة على المجال I

كما يلي:

1) $f(x) = (\sin x)e^{\cos x}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = x e^{-x^{2}}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

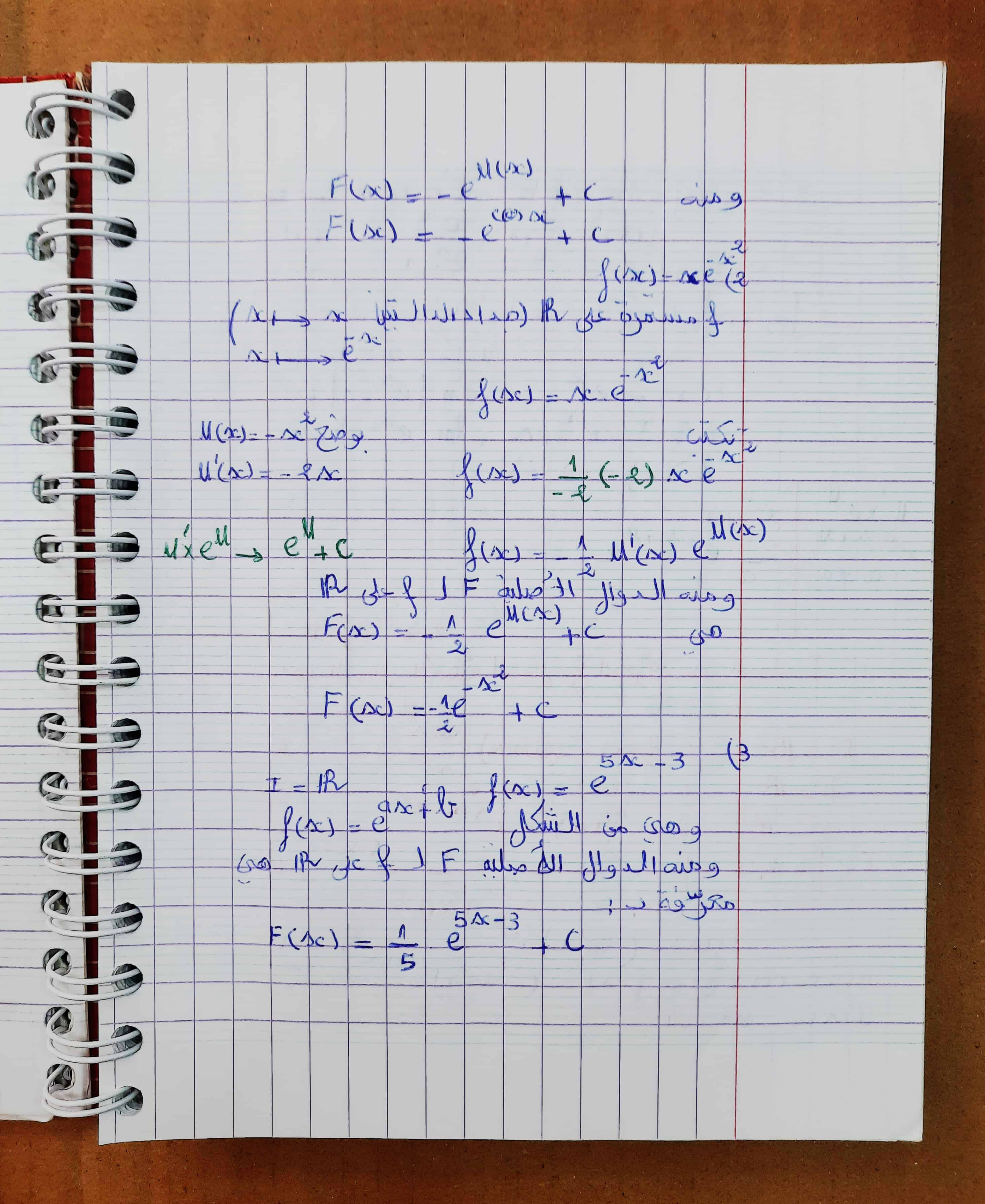
3) $f(x) = e^{2x-3}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x+1}}$ ؛ $I =]-1;+\infty[$

1) لدينا $f(x) = (\sin x)e^{\cos x}$

نكتب $f(x) = -(-\sin x)e^{\cos x}$ بوضع $u(x) = \cos x$

أي $u'(x) = -\sin x$



ومنه $F(x) = -e^{u(x)} + C$

$F(x) = -e^{(\cos) x} + C$

(2 $f(x) = xe^{-x^2}$

f مستمرة على $\mathbb{R}$ (جداء الدالتين $x \mapsto x$ و $x \mapsto e^{-x}$)

$f(x) = x e^{-x^2}$

بوضع $u(x) = -x^2$

$u'(x) = -2x$

نكتب $f(x) = \frac{1}{-2}(-2) x e^{-x^2}$

$u' \times e^{u} \to e^{u} + C$

$f(x) = -\frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$

ومنه الدوال الأصلية F لـ f على $\mathbb{R}$

هي $F(x) = -\frac{1}{2} e^{u(x)} + C$

$F(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$

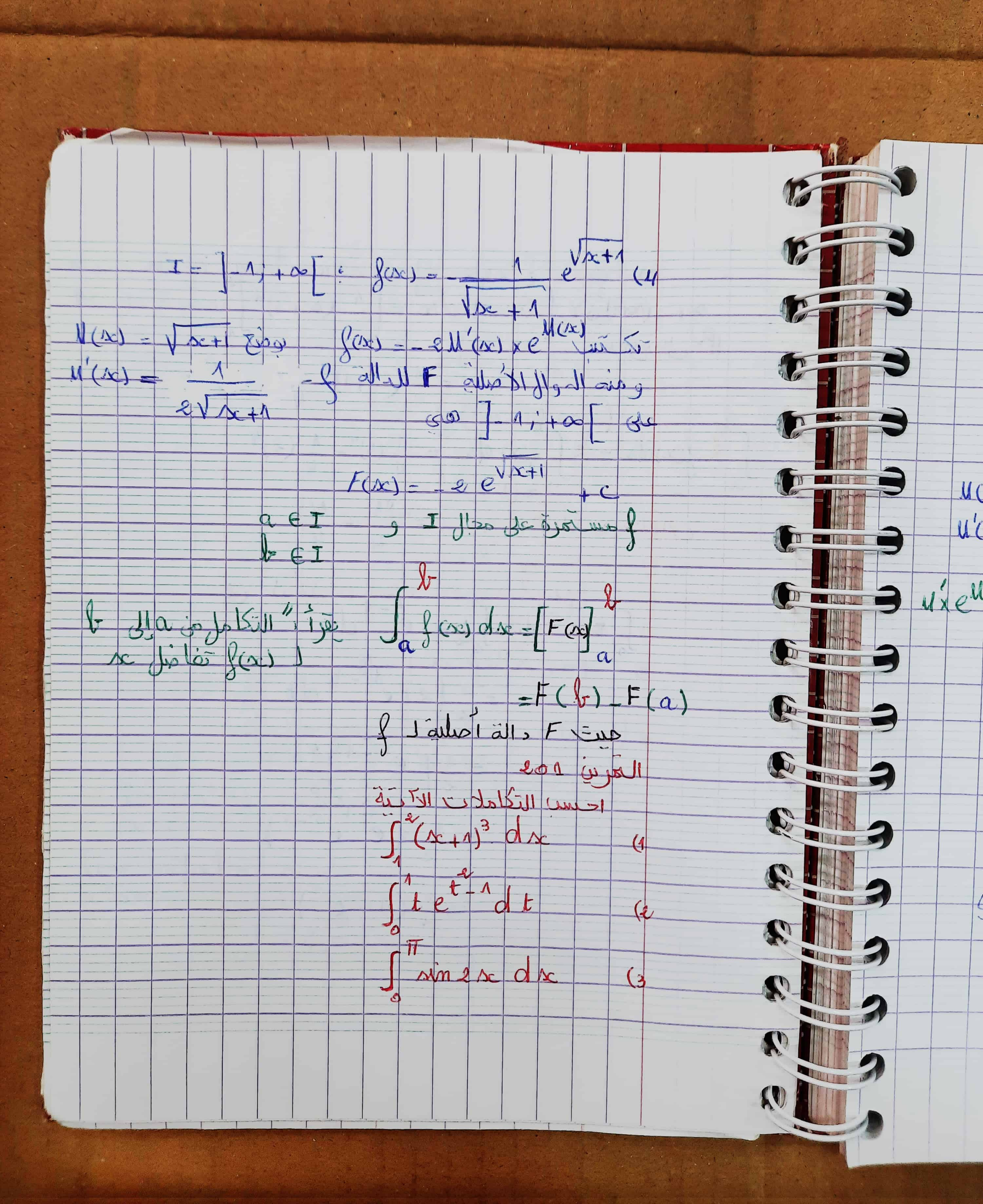
(3 $f(x) = e^{5x-3}$; $I = \mathbb{R}$

وهي من الشكل $f(x) = e^{ax+b}$

ومنه الدوال الأصلية F لـ f على $\mathbb{R}$ هي

معرّفة بـ :

$F(x) = \frac{1}{5} e^{5x-3} + C$



4) $I =]-1;+\infty[$ ؛ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}}$

بوضع $u(x) = \sqrt{x+1}$

$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

نكتب $f(x) = 2u'(x) \times e^{u(x)}$

ومنه الدوال الأصلية F للدالة f على $]-1;+\infty[$ هي

$F(x) = 2e^{\sqrt{x+1}} + c$

f مستمرة على مجال I و $a \in I$

$b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

حيث F دالة أصلية لـ f

يقرأ "التكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x"

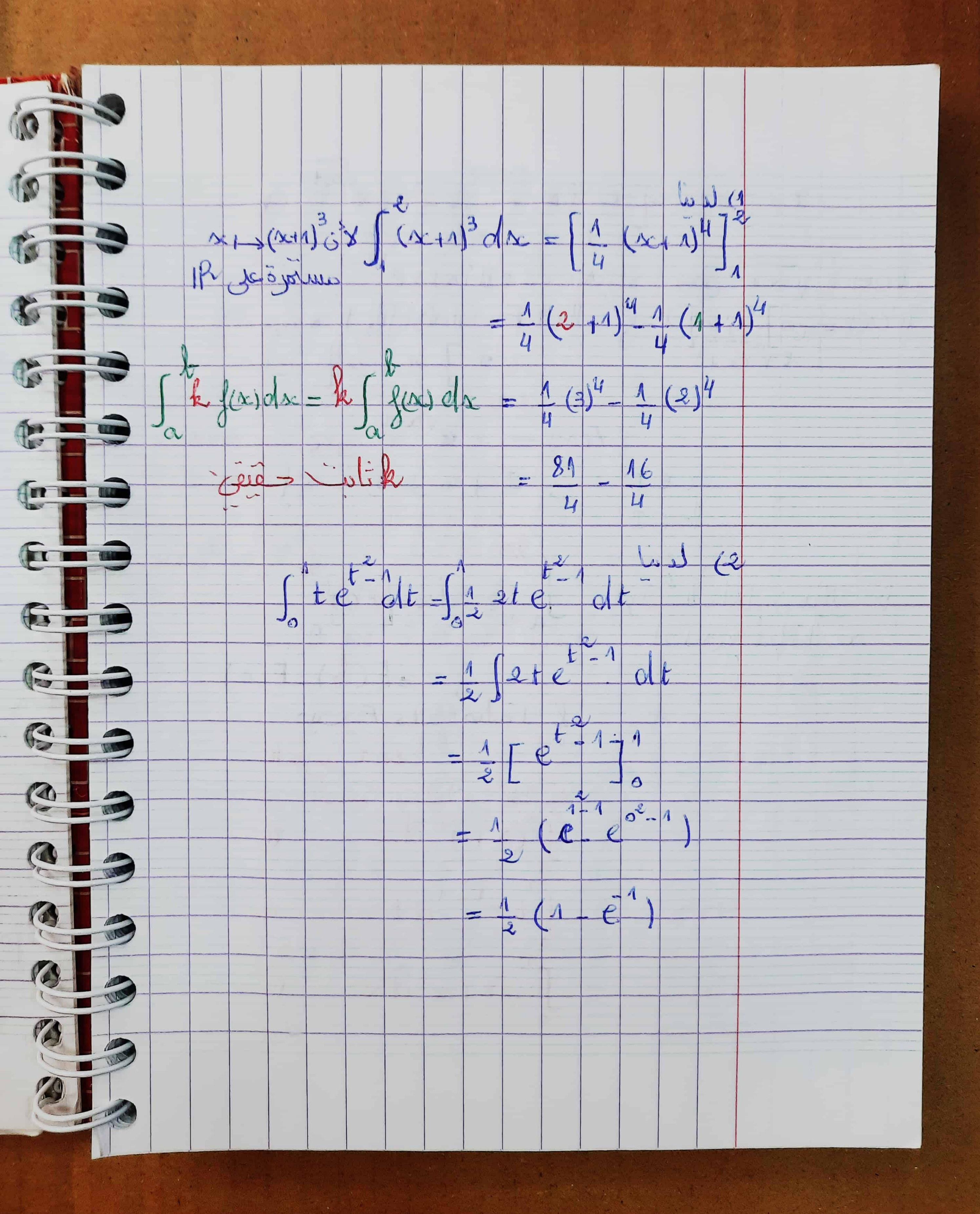
التمرين 01

احسب التكاملات الآتية

1) $\int_1^2 (x+1)^3\,dx$

2) $\int_0^1 t\,e^{t^2-1}\,dt$

3) $\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx$



1) لدينا

$x \mapsto (x+1)^3$ مستمرة على $\mathbb{R}$

$$\int_1^2 (x+1)^3\,dx = \left[\frac{1}{4}(x+1)^4\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4}(2+1)^4 - \frac{1}{4}(1+1)^4$$

$$= \frac{1}{4}(3)^4 - \frac{1}{4}(2)^4$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{16}{4}$$

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

k ثابت حقيقي

2) لدينا

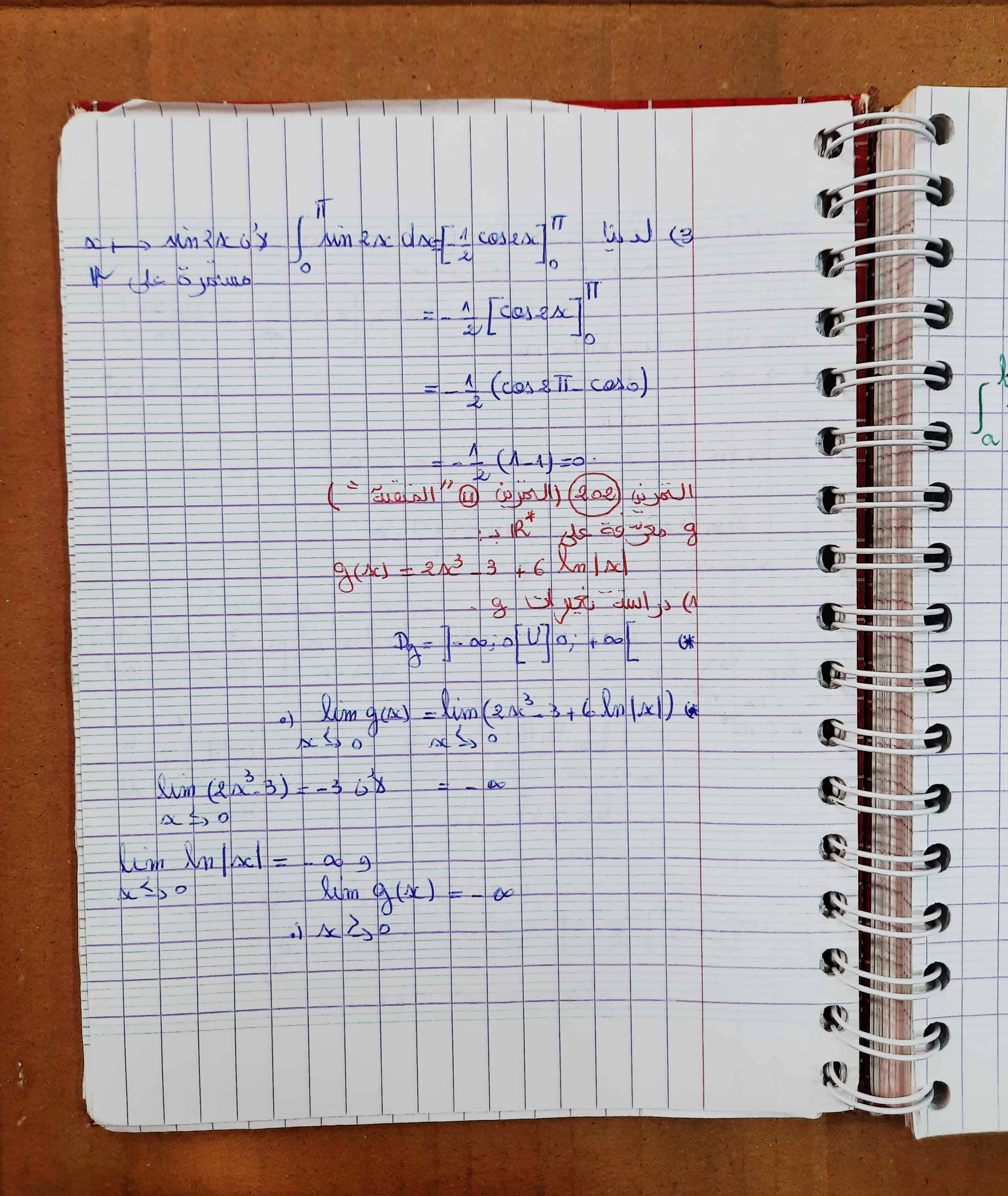
$$\int_0^1 t\,e^{t^2-1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2}\,2t\,e^{t^2-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int 2t\,e^{t^2-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{t^2-1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{1^2-1} - e^{0^2-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$$



3) لدينا $\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}$ لأن $x \mapsto \sin 2x$ مستمرة على $\mathbb{R}$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos 2x\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos 0)$$

$$= -\frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

التمرين 202 (التمرين 11 "المنقحة")

g معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$g(x) = 2x^3 - 3 + 6\ln|x|$$

1) دراسة تغيرات g.

* $D_g =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

* أ) $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(2x^3 - 3 + 6\ln|x|)$

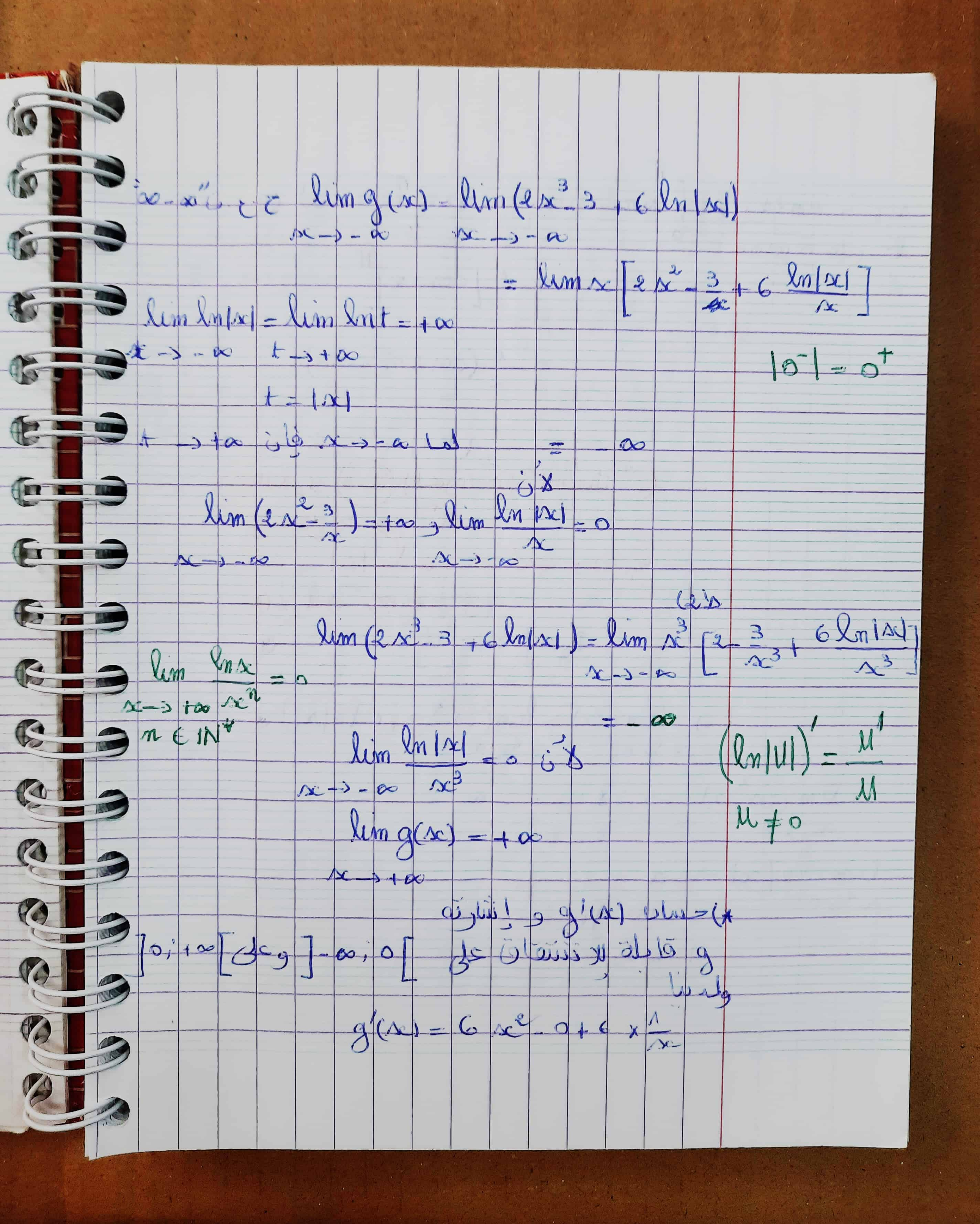
$= -\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to 0^-}(2x^3 - 3) = -3$

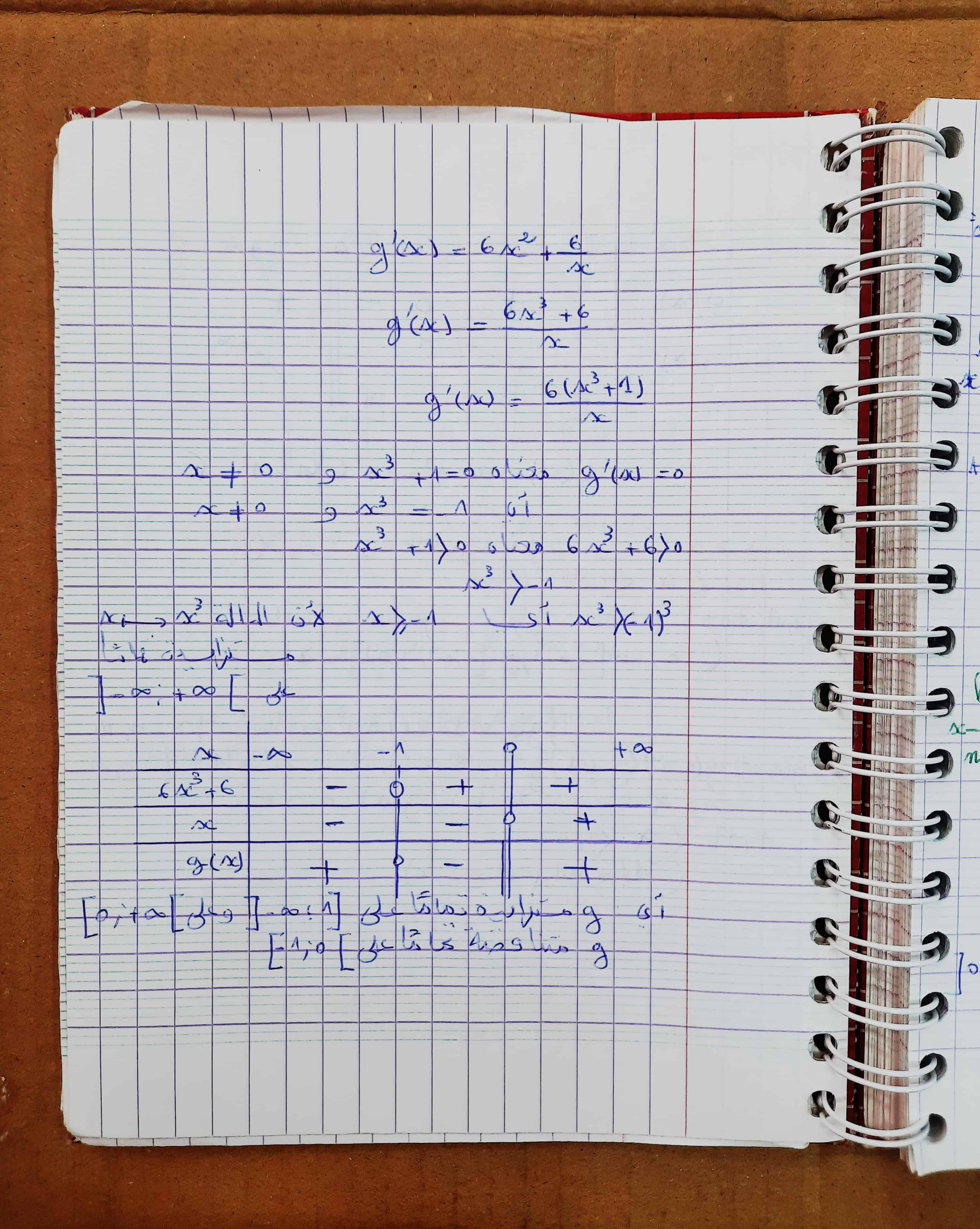
و $\lim\limits_{x \to 0^-} \ln|x| = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$

ب) $x \to 0^+$



lim ln|x| = lim ln t = +∞
t = |x|
|0⁻| = 0⁺
= −∞
lim (ln|x|)/x = 0
lim (ln x)/xⁿ = 0
n ∈ IN*
= −∞
(ln|u|)' = u'/u
u ≠ 0
lim g(x) = +∞
]0; +∞[
]−∞, 0[
g'(x) = 6x² − 0 + 6 × 1/x



$$g'(x) = 6x^2 + \frac{6}{x}$$

$$g'(x) = \frac{6x^3+6}{x}$$

$$g'(x) = \frac{6(x^3+1)}{x}$$

$g'(x) = 0$ معناه $x^3+1=0$ و $x \neq 0$

أي $x^3 = -1$ و $x \neq 0$

$6x^3+6>0$ معناه $x^3+1>0$

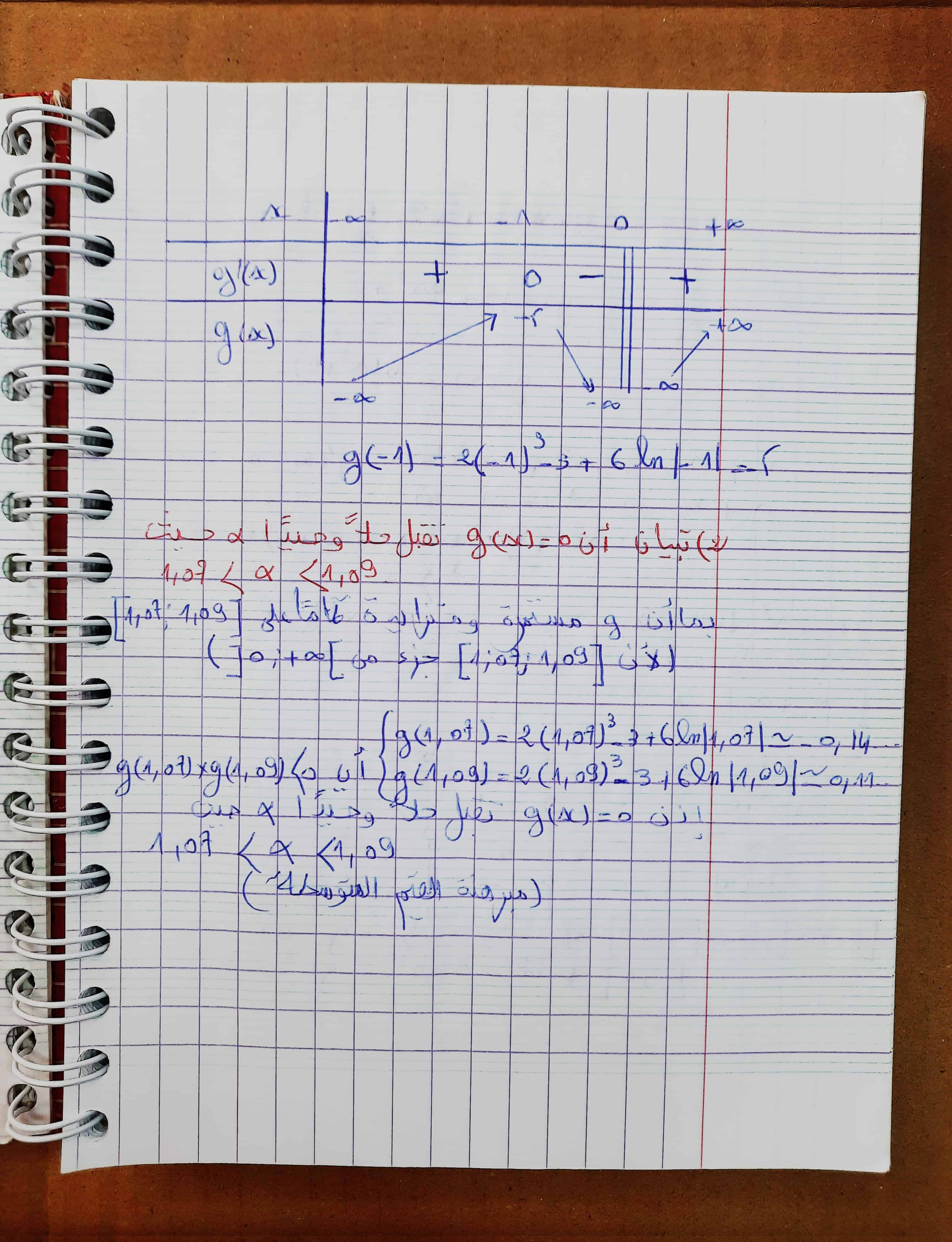
$x^3 > -1$

$x^3 > (-1)^3$ أي $x > -1$ لأن الدالة $x \mapsto x^3$ متزايدة تماما على $]-\infty;+\infty[$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$6x^3+6$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

أي g متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$ و على $[0;+\infty[$

g متناقصة تماما على $[-1;0[$



x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘ $-\infty$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$$g(-1) = 2(-1)^3 - 3 + 6\ln|-1| = -5$$

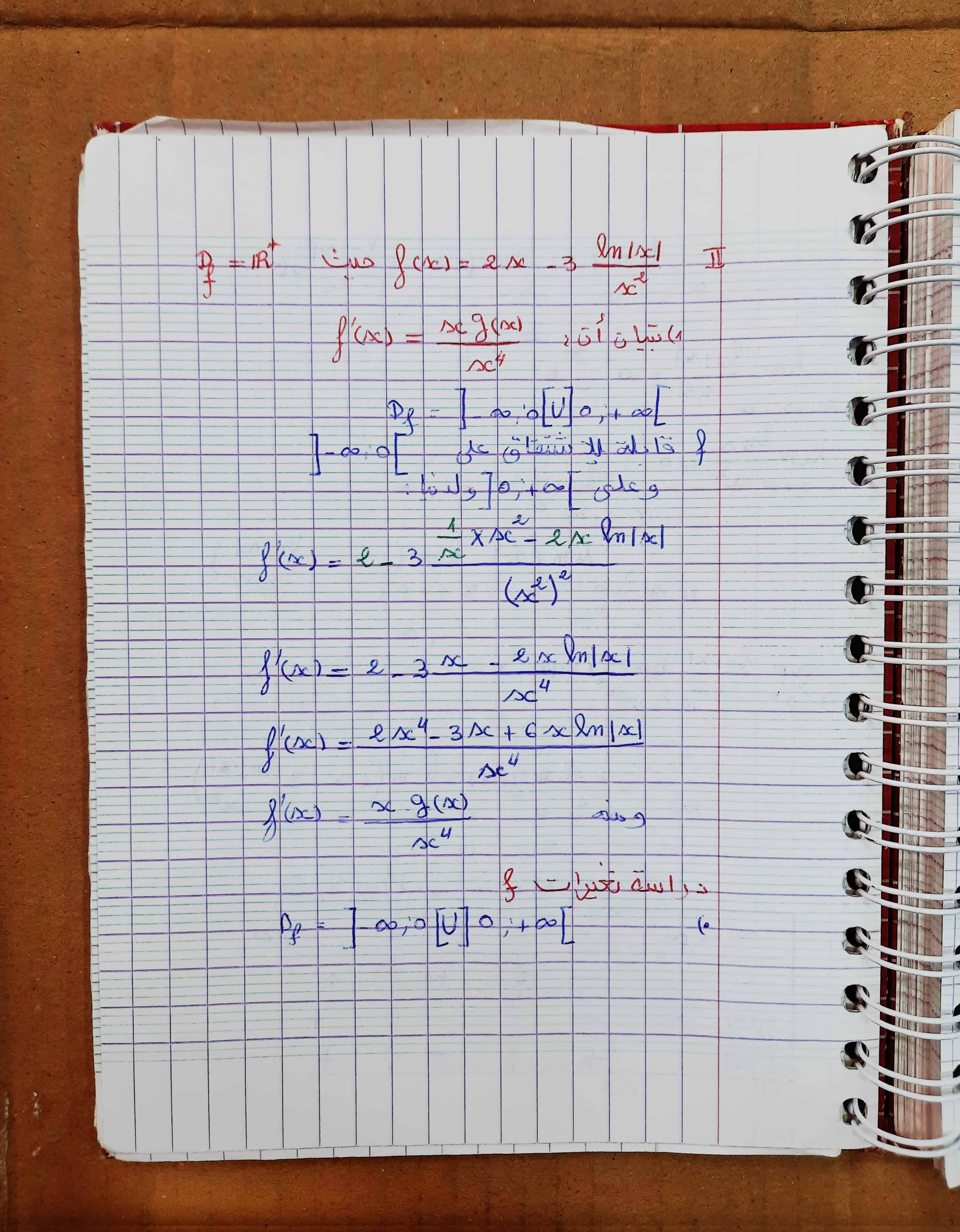
2) تبيان أن $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,07 < \alpha < 1,09$.

بما أن g مستمرة ومتزايدة تماماً على $[1,07 ; 1,09]$
(لأن $[1,07 ; 1,09]$ جزء من $]0 ; +\infty[$)

$$\begin{cases} g(1,07) = 2(1,07)^3 - 3 + 6\ln|1,07| \simeq -0,14 \\ g(1,09) = 2(1,09)^3 - 3 + 6\ln|1,09| \simeq 0,11 \end{cases}$$

أي أن $g(1,07) \times g(1,09) < 0$

إذن $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث
$1,07 < \alpha < 1,09$
(مبرهنة القيم المتوسطة)



II $f(x) = 2x - 3\frac{\ln|x|}{x^2}$ حيث $D_f = \mathbb{R}^*$

1) تبيان أن: $f'(x) = \frac{x\,g(x)}{x^4}$

$D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[$

وعلى $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = 2 - 3\frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln|x|}{(x^2)^2}$$

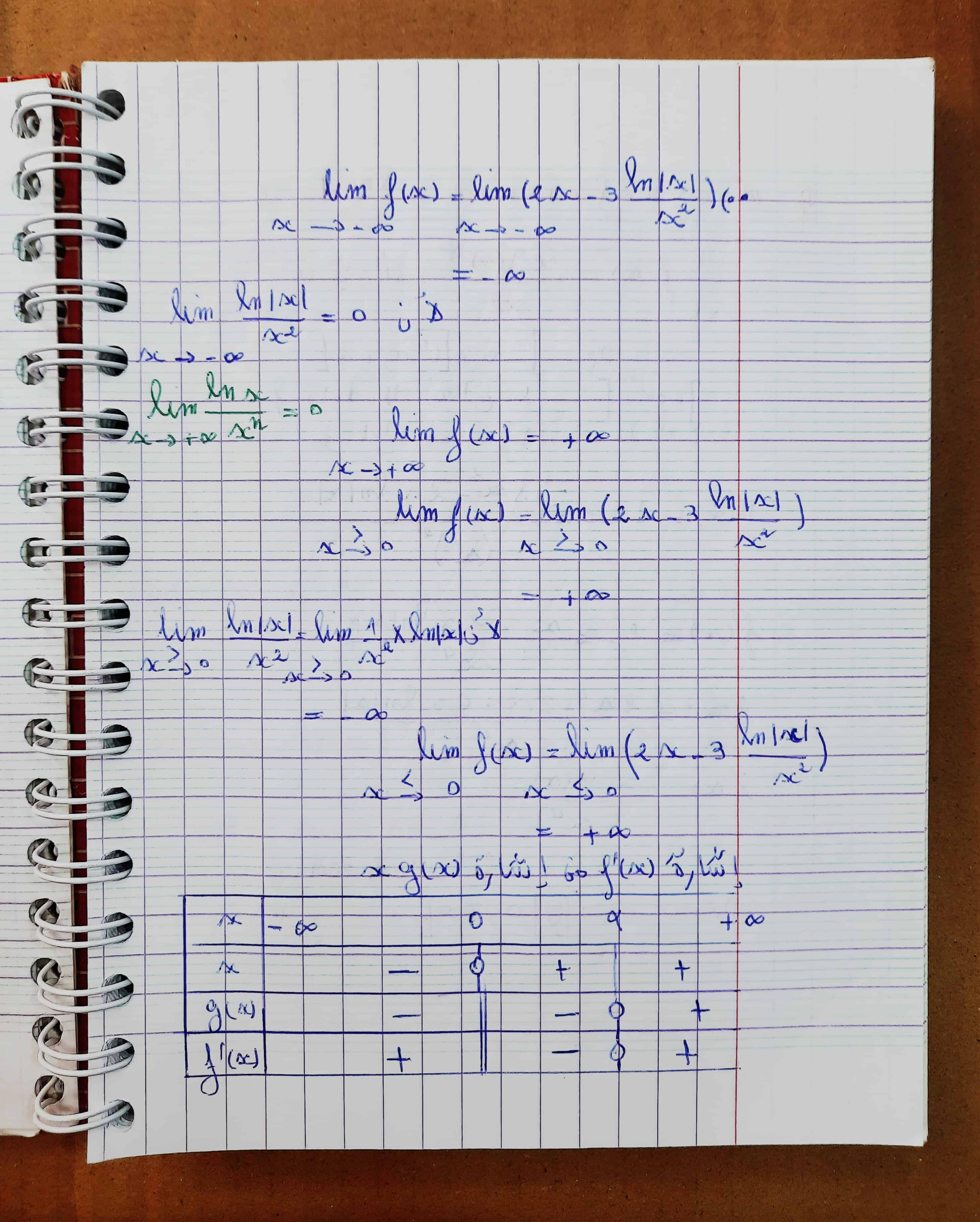
$$f'(x) = 2 - 3\frac{x - 2x\ln|x|}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x + 6x\ln|x|}{x^4}$$

ومنه $f'(x) = \frac{x\,g(x)}{x^4}$

دراسة تغيرات f

2) $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2x - 3\frac{\ln|x|}{x^2}\right)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln|x|}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(2x - 3\frac{\ln|x|}{x^2}\right)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln|x|}{x^2} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x^2} \times \ln|x|$$

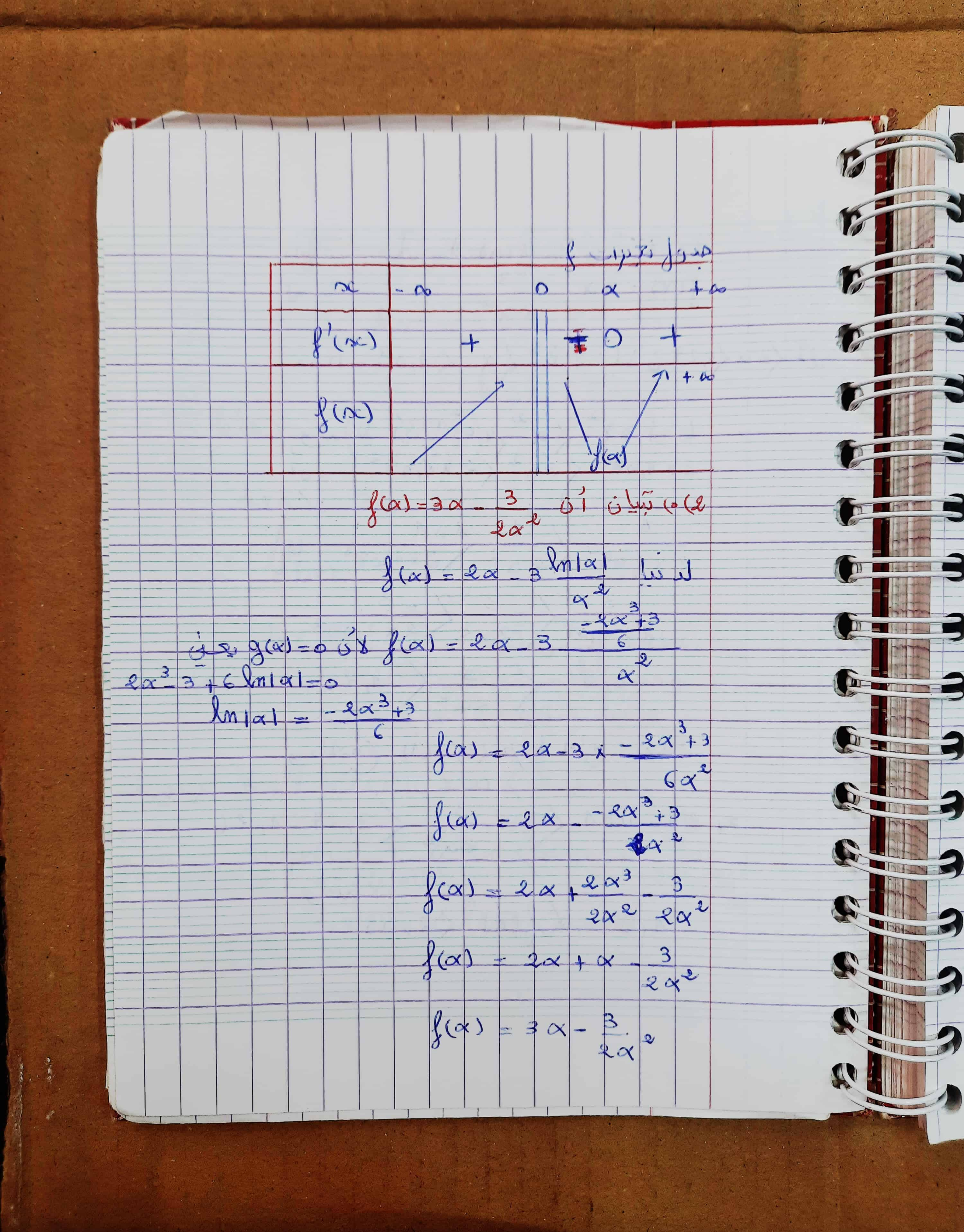
$$= -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \left(2x - 3\frac{\ln|x|}{x^2}\right)$$

$$= +\infty$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x\,g(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$g(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	



جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2) تبيان أن $f(\alpha) = 3\alpha - \dfrac{3}{2\alpha^2}$

لدينا $f(\alpha) = 2\alpha - 3\dfrac{\ln|\alpha|}{\alpha^2}$

لأن $g(\alpha) = 0$ يعني $f(\alpha) = 2\alpha - 3\dfrac{\frac{-2\alpha^3+3}{6}}{\alpha^2}$

$2\alpha^3 - 3 + 6\ln|\alpha| = 0$

$\ln|\alpha| = \dfrac{-2\alpha^3+3}{6}$

$f(\alpha) = 2\alpha - 3 \times \dfrac{-2\alpha^3+3}{6\alpha^2}$

$f(\alpha) = 2\alpha - \dfrac{-2\alpha^3+3}{2\alpha^2}$

$f(\alpha) = 2\alpha + \dfrac{2\alpha^3}{2\alpha^2} - \dfrac{3}{2\alpha^2}$

$f(\alpha) = 2\alpha + \alpha - \dfrac{3}{2\alpha^2}$

$f(\alpha) = 3\alpha - \dfrac{3}{2\alpha^2}$

استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2}$

بما أن $1,07 < \alpha < 1,09$ إذن $3,21 < 3\alpha < 3,27$

ولدينا أيضا $1,07^2 < \alpha^2 < 1,09^2$

أي: $2 \times 1,07^2 < 2\alpha^2 < 2 \times 1,09^2$

أي: $\frac{1}{2 \times 1,09^2} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{2 \times 1,07^2}$

$\frac{-3}{2 \times 1,07^2} < -\frac{3}{2\alpha^2} < \frac{-3}{2 \times 1,09^2}$

$-1,31 < -\frac{3}{2\alpha^2} < -1,26$

وبالجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد

$3,21 - 1,31 < 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2} < 3,27 - 1,26$

ومنه

$1,9 < f(\alpha) < 2,01$

د2) لتكن k الدالة المعرفة في $]0;+\infty[$ بـ:

$$k(x) = 3x - \frac{3}{2x^2}$$

ندرس اتجاه تغير k

لدينا

$$k'(x) = 3 - \left(- \frac{3\times 4x}{(2x^2)^2}\right)$$

$$k'(x) = 3 + \frac{12x}{4x^4}$$

$$k'(x) = 3 + \frac{3x}{x^4}$$

بما أن $k'(x) > 0$ إذن $x \in]0;+\infty[$

ومنه k متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

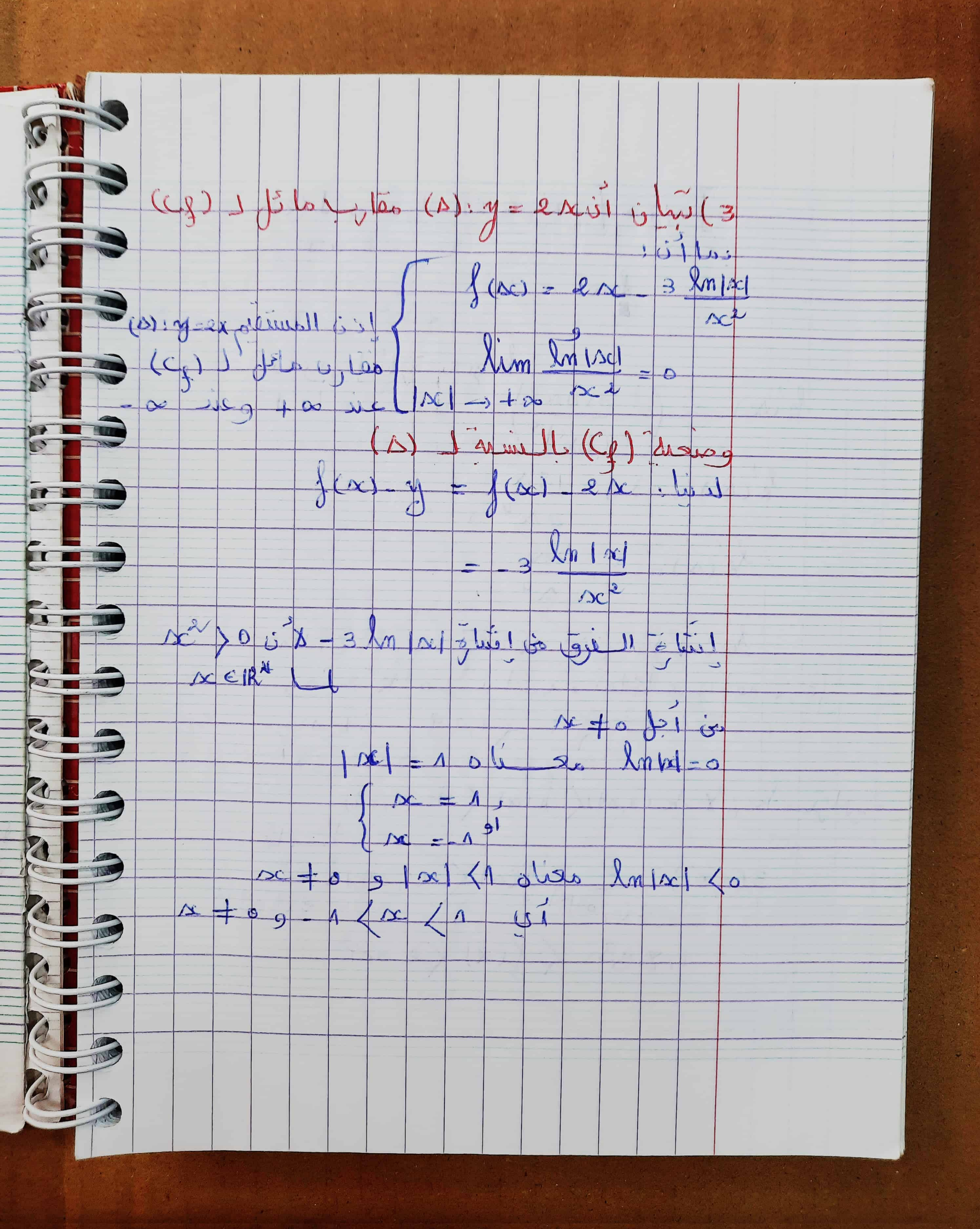
وبما أن $1,07 < \alpha < 1,09$

إذن

$k(1,07) < k(\alpha) < k(1,09)$ لأن k متزايدة تماما

$$3(1,07) - \frac{3}{2(1,07)^2} < f(\alpha) < 3(1,09) - \frac{3}{2(1,09)^2}$$

$$1,899 < f(\alpha) < 2,007$$



3) تبيان أن $(\Delta) : y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f)

بما أن:

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 3\dfrac{\ln|x|}{x^2} \\ \displaystyle\lim_{|x| \to +\infty} \dfrac{\ln|x|}{x^2} = 0 \end{cases}$$

إذن المستقيم $(\Delta) : y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ وعند $-\infty$

وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

لدينا: $f(x) - y = f(x) - 2x$

$$= -3\frac{\ln|x|}{x^2}$$

إشارة الفرق من إشارة $-3\ln|x|$ لأن $x^2 > 0$ لما $x \in \mathbb{R}^*$

من أجل $x \neq 0$

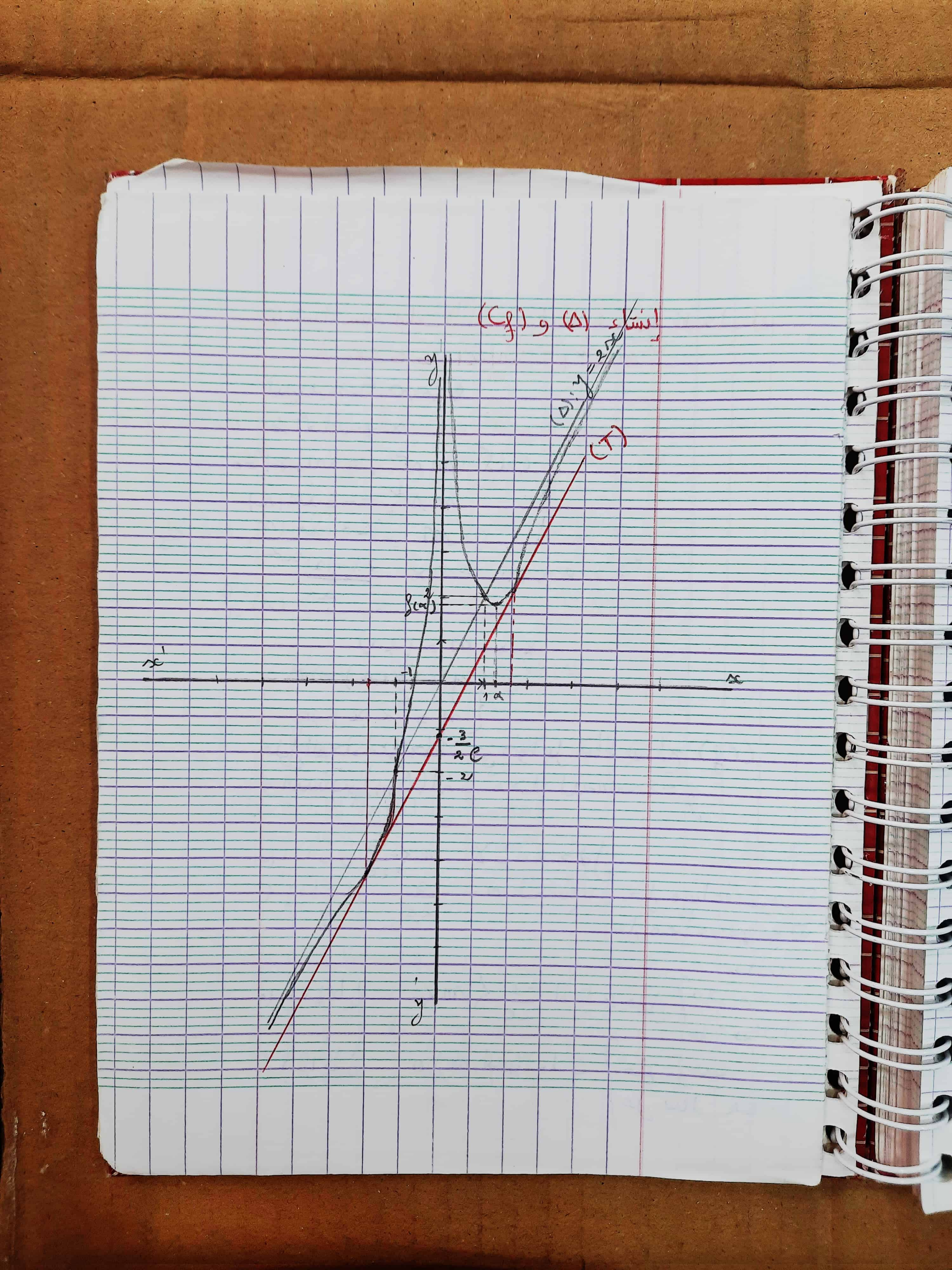
$\ln|x| = 0$ معناه $|x| = 1$

$$\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \end{cases}$$

$\ln|x| < 0$ معناه $|x| < 1$ و $x \neq 0$

أي $-1 < x < 1$ و $x \neq 0$

إنشاء (Δ) و (C_f)



٤) المناقشة بيانيا لعدد وإشارة حلول المعادلة $mx^2+3\ln|x|=0$

~~المعادلة تكتب من~~

من أجل $x\neq 0$

$mx^2+3\ln|x|=0$ تكتب

$mx^2=-3\ln|x|$

$m=\frac{-3\ln|x|}{x^2}$

$2x+m=2x-\frac{3\ln|x|}{x^2}$

$2x+m=f(x)$

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=2x+m \end{cases}$$

حلول المعادلة المعطاة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) والمستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y=2x+m$

- إذا كان $m<-\frac{3}{2e}$ لا توجد حلول
- إذا كان $m=-\frac{3}{2e}$ لدينا حل مضاعف موجب وحل مضاعف ~~موجب~~ سالب
- إذا كان $-\frac{3}{2e}<m<0$ لدينا 4 حلول: حلان موجبان، حلان سالبان
- إذا كان $m\geq 0$ لدينا حلان: حل موجب، حل سالب.

7) h معرفة على $\mathbb{R}^*$ ب:

$$h(x) = \frac{a + b \ln|x|}{x}$$

تعيين a و b بحيث h دالة أصلية للدالة Q حيث $Q(x) = \frac{\ln|x|}{x^2}$ على $\mathbb{R}^*$

h أصلية لـ Q على $\mathbb{R}^*$ معناه من أجل كل

$$h'(x) = Q(x) ; x \in \mathbb{R}^*$$

$$h'(x) = \frac{b \times \frac{1}{x} \times x - 1(a + b \ln|x|)}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{b - a - b \ln|x|}{x^2}$$

$h'(x) = Q(x)$ من أجل $x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{b - a - b \ln|x|}{x^2} = \frac{\ln|x|}{x^2}$$

وبالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} b - a = 0 \\ -b = 1 \end{cases}$$

أي $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$ ومنه

$$h(x) = \frac{-1 - \ln|x|}{x}$$

$$\frac{g(x_0)}{x_0^3} = 2$$

$x \neq 0 \quad g(x_0) = 2$

$2x_0^3 - 3 + 6\ln|x_0| = 2x_0^3$

$6\ln|x_0| = 3$

$\ln|x_0| = \frac{1}{2}$

$|x_0| \; e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$x_0 = \sqrt{e}$

أو

$x_0 = -\sqrt{e}$

من أجل $x = \sqrt{e}$ لدينا

$$f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e} - 3\frac{\ln|\sqrt{e}|}{(\sqrt{e})^2}$$

$$f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e} - \frac{3 \times \frac{1}{2}\ln e}{e}$$

$$f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e} - \frac{3}{2e}$$

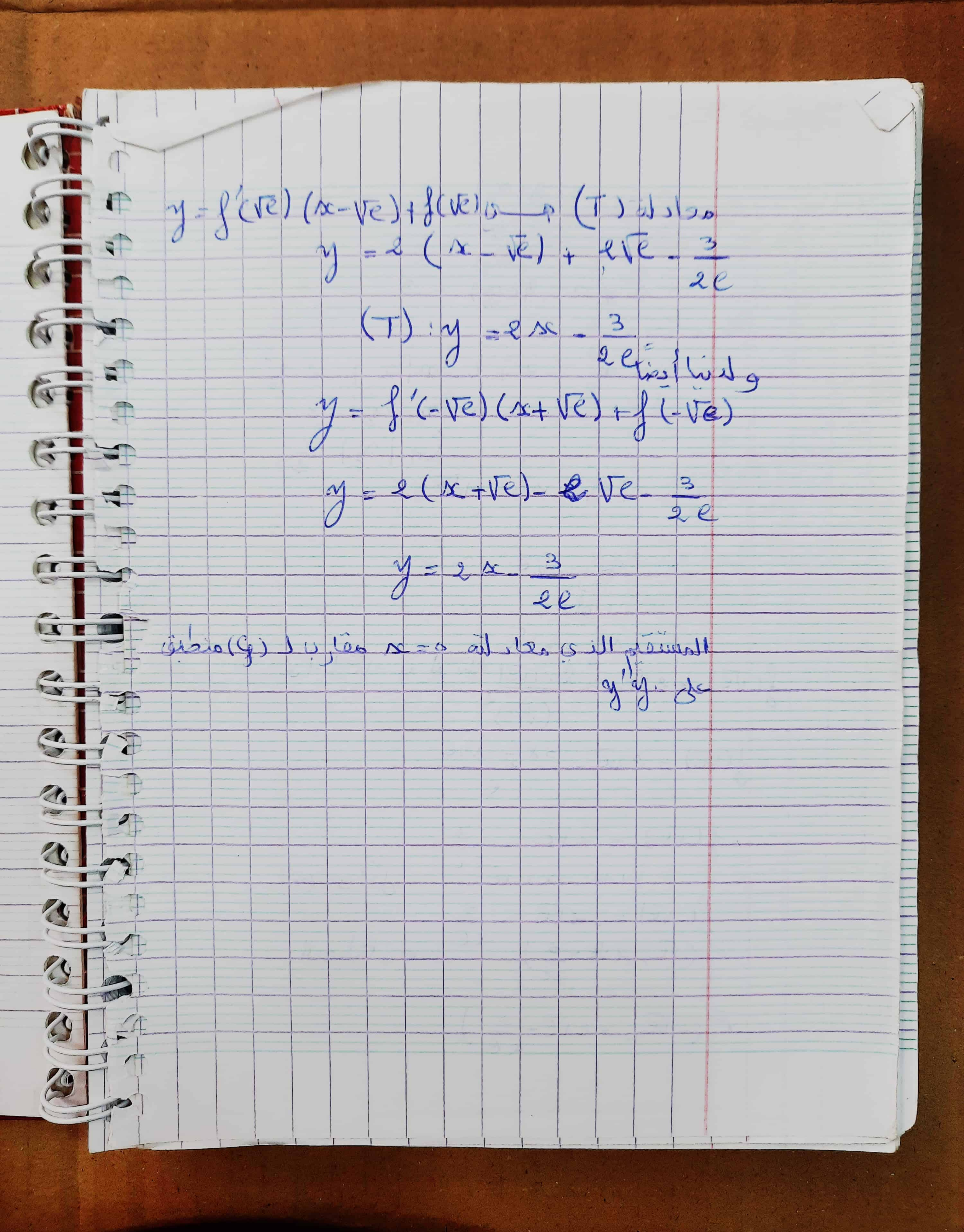
من أجل $x = -\sqrt{e}$ لدينا :

$$f(-\sqrt{e}) = -2\sqrt{e} - \frac{3}{2e}$$

النقطتان هما

$E\left(\sqrt{e}, 2\sqrt{e} - \frac{3}{2e}\right)$

$F\left(-\sqrt{e} ; -2\sqrt{e} - \frac{3}{2e}\right)$



معادلة (T) ⟵ $y = f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$

$$y = 2(x-\sqrt{e}) + 2\sqrt{e} - \frac{3}{2e}$$

$$(T) : y = 2x - \frac{3}{2e}$$

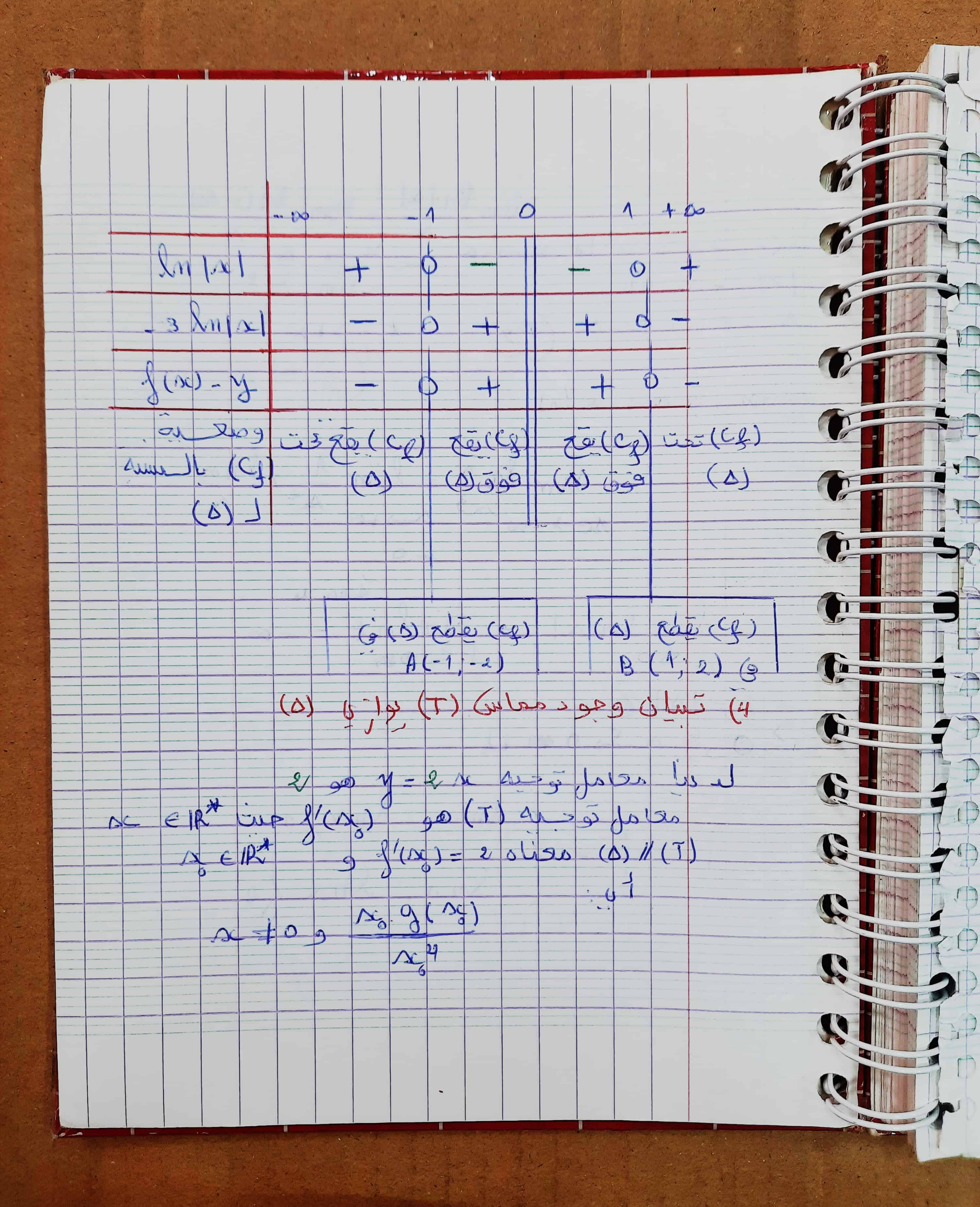
ولدينا أيضا

$$y = f'(-\sqrt{e})(x+\sqrt{e}) + f(-\sqrt{e})$$

$$y = 2(x+\sqrt{e}) - 2\sqrt{e} - \frac{3}{2e}$$

$$y = 2x - \frac{3}{2e}$$

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب لـ (C_g) منطبق على $y'y$



x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\ln\|x\|$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$-3\ln\|x\|$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)		(C_f) يقع تحت (Δ)		(C_f) يقع فوق (Δ)	||	(C_f) يقع فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	

(C_f) يقطع (Δ) في $A(-1;-2)$

(C_f) يقطع (Δ) في $B(1;2)$

4) تبيان وجود مماس (T) يوازي (Δ)

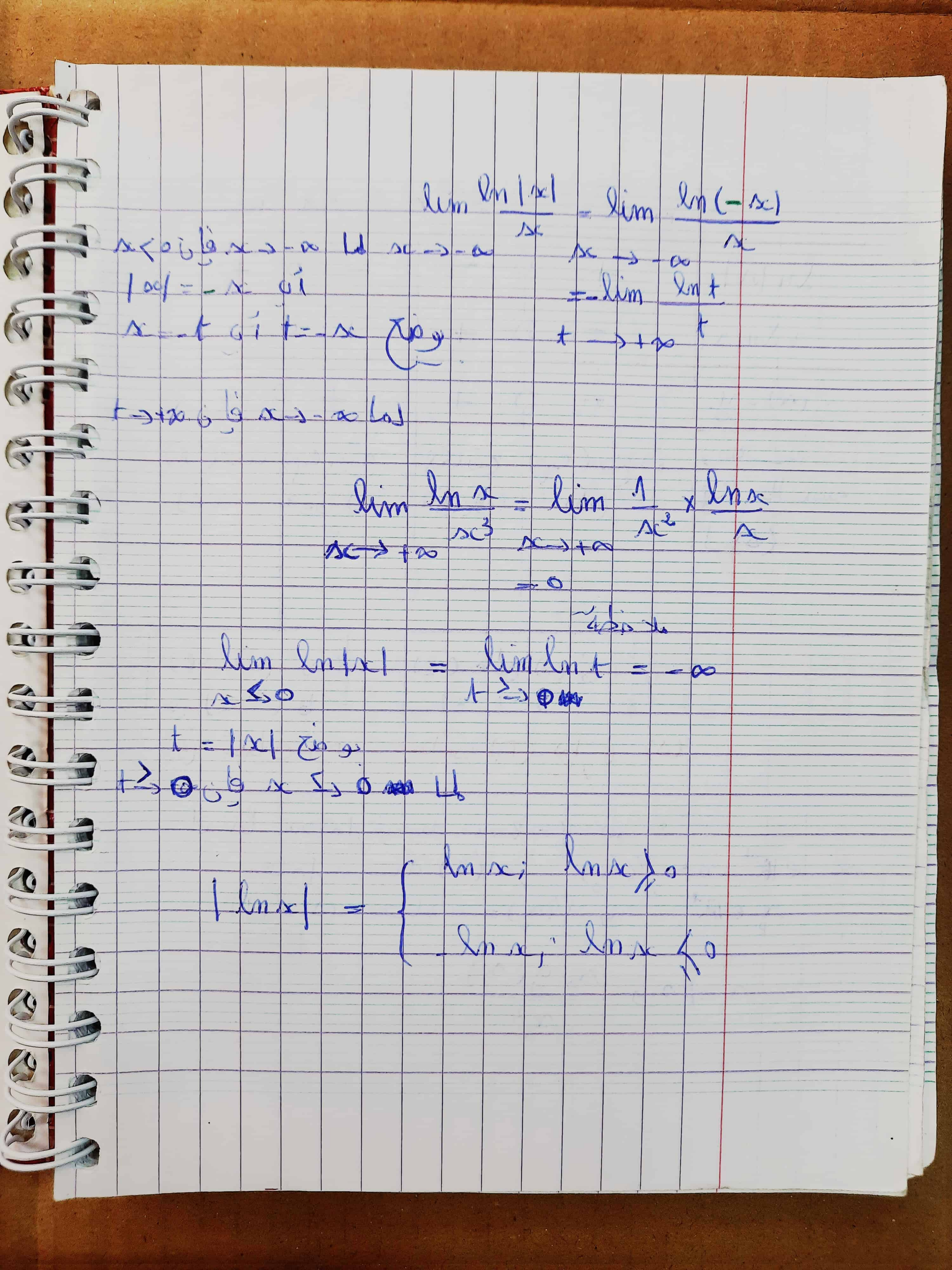
لدينا معامل توجيه $y = 2x$ هو 2

معامل توجيه (T) هو $f'(x_0)$ حيث $x \in \mathbb{R}^*$

$(\Delta) \parallel (T)$ معناه $f'(x_0) = 2$ و $x_0 \in \mathbb{R}^*$

أي:

$\frac{x_0 \cdot g(x_0)}{x_0^4}$ و $x \neq 0$



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln|x|}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x}$$

لما $x \to -\infty$ فإن $x < 0$

أي $|x| = -x$

نضع $t = -x$ أي $x = -t$

لما $x \to -\infty$ فإن $t \to +\infty$

$$= -\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \times \frac{\ln x}{x}$$

$$= 0$$

ملاحظة

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \ln|x| = \lim_{t \overset{>}{\to} 0} \ln t = -\infty$$

نضع $t = |x|$

لما $x \overset{<}{\to} 0$ فإن $t \overset{>}{\to} 0$

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x \,; & \ln x \geq 0 \\ -\ln x \,; & \ln x \leq 0 \end{cases}$$

أكاديمية رواد التألق لخدمات التنمية البشرية والاستشارات

BPA معا نحو التميز

العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 27، المدية
الهاتف: 05.50.58.85.27
البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com

تمارين الرياضيات

3 ثانوي

الأستاذ : داهش مكي

مسألة: لتكن f دالة عددية حيث

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+2x-1}{1-2x} & , \quad x \leq 0 \\ 2x - \dfrac{1}{(x+1)^2} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

1) أوجد مجموعة التعريف للدالة f .

2) أدرس استمرارية وقابلية الإشتقاق للدالة f عند 0 وفسر النتيجة هندسيا.

3) أدرس تغيرات الدالة f .

4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربين مائلين

5) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما $x_1 = -1$ و x_2 حيث $0 < x_2 < 1$

6) أرسم منحنى الدالة f

7) لتكن g دالة عددية معرفة كمايلي

$$g(x) = \frac{3x^2 - 2|x| - 1}{2|x| + 1}$$

1) بين أن g دالة زوجية

2) أكتب g دون رمز القيمة المطلقة

3) استنتج منحنى الدالة g .

4) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m إشارة وحلول المعادلة

$$3x^2 - 2m|x| - m = 0$$

أكاديمية رواد التألق لخدمات
التنمية البشرية والاستشارات
BPA معا نحو التميز
العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 26، المدية
الهاتف: 05.50.58.85.27
البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com

امتحان بكالوريا شعبة علوم تجريبية دورة جوان 2014

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) – لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$.

1) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7<\alpha<0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) – نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.

ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ).

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f. (نأخذ $f(\alpha)\approx-0,1$)

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) لتكن h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$.

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

ب) استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h).

أكاديمية رواد التألق لخدمات التنمية البشرية والاستشارات

العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 27، المدية

الهاتف: 05.50.58.85.27

البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com

BPA معا نحو التميز

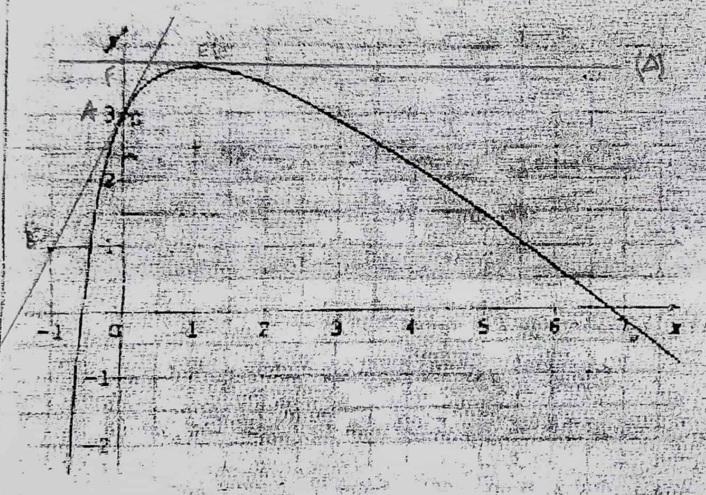
تمارين الرياضيات

الأستاذ : داهش مكي

3 ثانوي

التمرين الثاني:

الجزء 1: المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس، $(\mathcal{C})$ هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $]-1;+\infty[$ تشمل النقط $A(0;3)$ ، $B(-1;1)$ ، $E(1;3+\ln 2)$. المستقيم (AB) مماس عند A للمنحني $(\mathcal{C})$ و Δ المماس للمنحني $(\mathcal{C})$ عند E .



1. باستعمال المعلومات المتوفرة، عين:

أ- معادلة للمستقيم (AB).

ب- $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f(1)$ و $f'(1)$

جـ- عدد حلول المعادلة $f(x)=1$.

د- جدول تغيرات الدالة f.

2. نقبل أن الدالة f على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=ax+5+\frac{b}{x+1}+\ln(x+1)$$

حيث a و b عددان حقيقيان .

احسب a و b باستعمال $f(0)$ و $f(1)$.

الجزء 2: نقبل أن الدالة f على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{-x^2+4x+3}{x+1}+\ln(x+1)$

1. عين نهاية f عند -1 . أعط تفسيرا هندسيا.

2. أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{-x^2-x+2}{(x+1)^2}$

ب- ادرس إشارة $f'(x)$.

جـ- هل النتيجة تتوافق مع الجدول الذي أنجزته في السؤال 1.د

د- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا على $]0;+\infty[$ أعط قيمة مقربة إلى 10^{-3} لهذا الحل .

4. أ- احسب مشتقة الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$

استنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$.

ب- احسب $\int_0^1 f(x)dx$ ، أعط تفسيرا هندسيا .

أكاديمية رواد التألق لخدمات
التنمية البشرية والاستشارات

BPA معا نحو التميز

العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 26، المدية
الهاتف: 05.50.58.85.27
البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=e^x+x+1$

1. أدرس تغيرات الدالة g

2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.28<\alpha<-1.27$

3. إستنتج إشارة $g(x)$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+2)\,e^{-x}$

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)\times e^{-x}$

2. أدرس تغيرات الدالة f

3. بين أن $f(\alpha)=\alpha+\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف Ω يطلب تعيينها.

5. أكتب معادلة للمماس (T_1) للمنحنى (C_f) عند النقطة Ω.

6. بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$

7. بين انه توجد نقطة وحيدة من المنحنى (C_f) يكون عندها المماس (T_2) موازيا للمستقيم المقارب (Δ)، أكتب معادلة (T_2)

8. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]-2.5,-2[$

- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$ ثم فسر النتيجة المتحصل عليها.

- أنشئ (C_f) و (T_2)

7. ناقش بيانيا باستخدام المنحنى (C_f) حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $(x+2)+m\,e^x=0$.

أكاديمية رواد التألق لخدمات
التنمية البشرية والاستشارات

BPA معا نحو التميز

العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 26، المدية
الهاتف: 05.50.58.85.27
البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com

امتحان بكالوريا شعبة علوم تجريبية جوان 2014

التمرين الرابع: (06 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α، حيث $e^{-0.4}<\alpha<e^{-0.3}$

3) أنشئ (T) و (C_f).

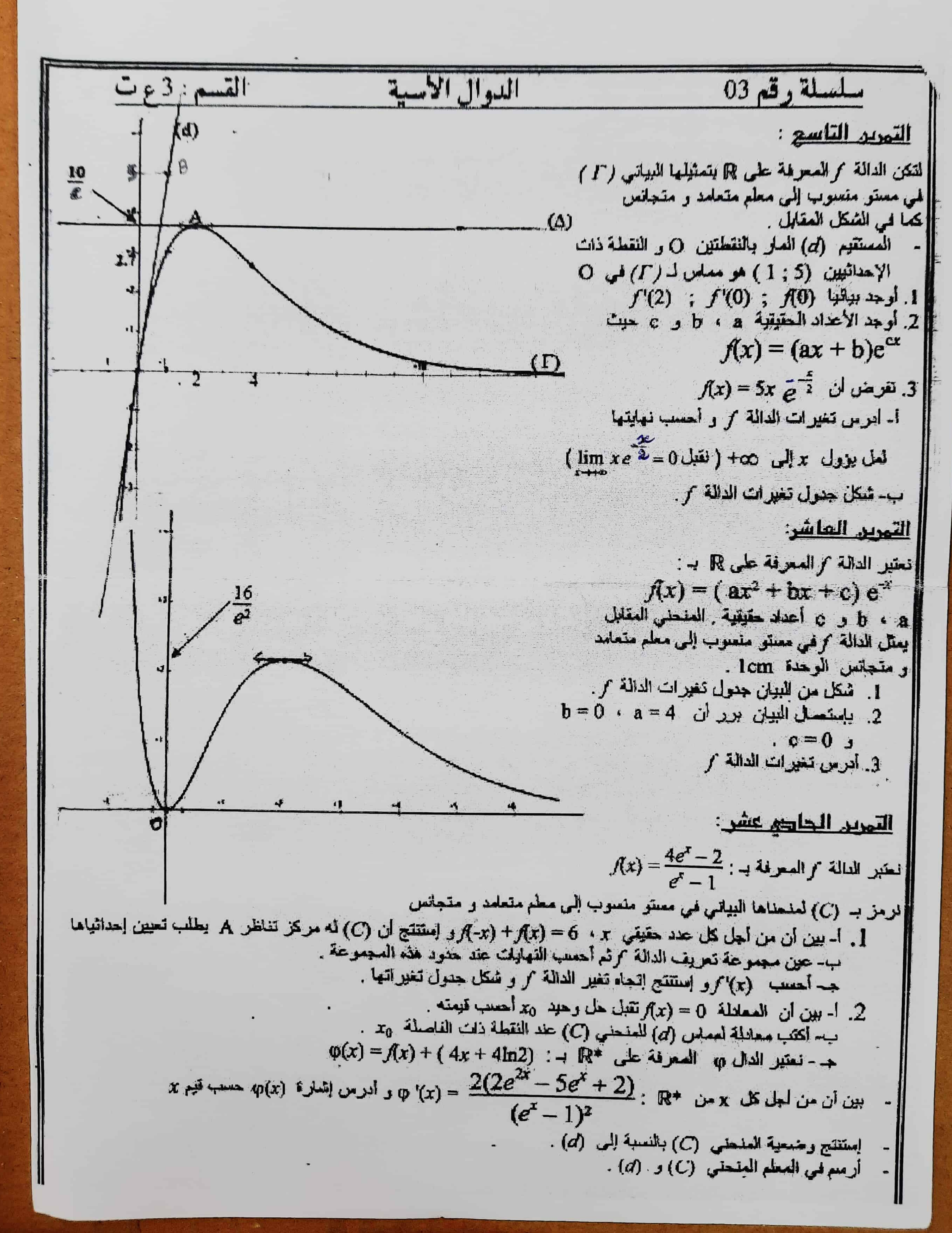
4) لتكن الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$.

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

ب) أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

جـ) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.



سلسلة رقم 03 — الدوال الأسية — القسم : 3 ع ت

التمرين التاسع :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (Γ) في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما في الشكل المقابل .

- المستقيم (d) المار بالنقطتين O و النقطة ذات الإحداثيين $(5\ ;\ 1)$ هو مماس لـ (Γ) في O

1. أوجد بيانيا $f(0)\ ;\ f'(0)\ ;\ f'(2)$
2. أوجد الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث
$$f(x) = (ax + b)e^{cx}$$
3. نفرض أن $f(x) = 5x\,e^{-\frac{x}{2}}$

أ- ادرس تغيرات الدالة f و أحسب نهايتها

لما يؤول x إلى $+\infty$ (نقبل $\lim\limits_{x\to+\infty} x e^{-\frac{x}{2}} = 0$)

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

التمرين العاشر:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$$f(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^{-x}$$
a ، b و c أعداد حقيقية . المنحني المقابل يمثل الدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس الوحدة $1cm$.

1. شكل من البيان جدول تغيرات الدالة f .
2. باستعمال البيان برر أن $a = 4$ ، $b = 0$ و $c = 0$.
3. أدرس تغيرات الدالة f

التمرين الحادي عشر:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \dfrac{4e^x - 2}{e^x - 1}$

نرمز بـ (C) لمنحناها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

1. أ- بين أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(-x) + f(x) = 6$ و إستنتج أن (C) له مركز تناظر A يطلب تعيين إحداثياها

ب- عين مجموعة تعريف الدالة f ثم أحسب النهايات عند حدود هذه المجموعة .

جـ- أحسب $f'(x)$ و إستنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

2. أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد x_0 أحسب قيمته .

ب- أكتب معادلة لمماس (d) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

جـ - نعتبر الدال φ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $\varphi(x) = f(x) + (4x + 4\ln 2)$

- بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $\varphi'(x) = \dfrac{2(2e^{2x} - 5e^x + 2)}{(e^x - 1)^2}$ و ادرس إشارة $\varphi(x)$ حسب قيم x
- إستنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (d) .
- أرسم في المعلم المنحني (C) و (d) .

ثانوية الشهيد نور الدين زرواق (عين الذهب المدية) السنة : الثالثة ثانوي شعبة : علوم تجريبية	اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات	تاريخ الإنجاز 25 / 02 / 2015 المدة الزمنية : 2 ساعة

التمرين الأول : (06 ن)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\,\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

لتكن النقط : $H(0,1,1); G(0,0,1); F(1,2,1); E(1,1,1); D(1,0,1)\ C(1,2,0); B(1,1,0); A(1,0,0)$

$. k(0,2,0); J(0,1,0); I(0,2,1)$

عين الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة : a , b , c مع التبرير

السؤال	إجابة a	إجابة b	إجابة c
مرجح الجملة $\{(O,2);(A,-1);(C,1)\}$ هو النقطة	k	I	J
الجداء السلمي $\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{FC}$ يساوي	1	-1	-2
التمثيل الوسيطي للمستقيم (kE) هو	$\begin{cases} x=t \\ y=2+t\ (t\in IR) \\ z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x=3+4t \\ y=t\quad (t\in IR) \\ z=4t \end{cases}$	$\begin{cases} x=1-t \\ y=1+t\ (t\in IR) \\ z=1-t \end{cases}$
معادلة المستوي (GBk) هي	$2x+2y-z-2=0$	$x+y-3=0$	$x+y+2z=2$
المسافة بين النقطة C و المستوي (ADH) هي	$\sqrt{2}$	2	$\frac{1}{2}$
حجم رباعي الوجوه $HJKB$ هو	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

التمرين الثاني : (07 ن)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ (وحدة الرسم 2cm) .

نعتبر النقط : A , B , C التي لواحقها : $z_A=2$, $z_B=1+i\sqrt{3}$, $z_C=1-i\sqrt{3}$ على الترتيب .

I ـ 1) أكتب العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسي ثم علم النقط A , B , C .

2) عين طبيعة الرباعي $OBAC$.

3) عين و ارسم المجموعة (D) للنقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z بحيث : $|z|=|z-2|$.

II ـ نرفق بكل نقطة M من المستوي المركب ذات اللاحقة z حيث $z\neq z_A$ النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث : $$z'=\frac{-4}{z-2}$$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ للأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول المركب التالية : $z=\frac{-4}{z-2}$.

2) استنتج النقطتين المرفقتين للنقطتين B و C .

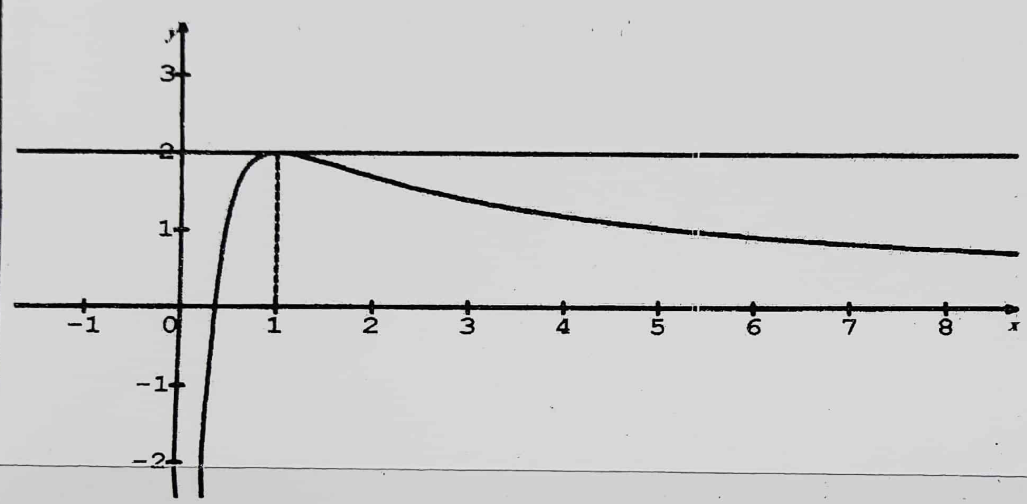
3) عين ثم علم النقطة G' المرفقة للمركز G مركز ثقل المثلث OAB .

4) برهن أنه من أجل كل عدد مركب z حيث $z \neq 2$ يكون لدينا : $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$

5) برهن أنه إذا كانت M نقطة من المجموعة (D) فإن النقطة المرفقة M' تنتمي إلى الدائرة (Γ) والتي يطلب تعيين مركزها و طول نصف قطرها ثم أرسم هذه الدائرة

التمرين الثالث : (07 ن)

المنحنى (C) المرسوم في الشكل أدناه هو التمثيل البياني الممثل لدالة f في مستوي منسوب لمعلم متعامد و متجانس $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ حيث f هي دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;\,+\infty[$.



تعطى المعلومات التالية :

- لتكن النقط التالية $A\,;\,B\,;\,C$ ذات الإحداثيات هي على الترتيب $(1\,,0)\,;\,(1\,,2)\,;\,(0\,,2)$

- المنحنى (C) يشمل النقطة B و المستقيم (BC) هو مماسا للمنحنى (C) في النقطة B .

- يوجد عددان حقيقيان موجبان تماما a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا :

$$f(x) = \frac{a+b\ln x}{x}$$

1 ـ أ) باستعمال الشكل السابق عين $f(1)$ و $f'(1)$.

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x) = \frac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$

ج) استنتج قيمة كل من العددين الحقيقيين a و b .

2 ـ أ) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,,+\infty[$ أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(-\ln x)$.

ب) أحسب النهايتين للدالة f عند 0 و $+\infty$ تلميح (لاحظ أن لكل x من المجال $]0\,;\,+\infty[$ $f(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{\ln x}{x}$)

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 ـ أ) برهن أن للمعادلة $f(x) = 1$ حل وحيد α في المجال $]0\,،1[$.

ب) برهن و بطريقة مماثلة أنه يوجد عدد حقيقي وحيد β من المجال $]1\,;\,+\infty[$ بحيث $f(\beta) = 1$.

4 ـ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و عدد حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$

الاثنين 18 ماي 2015	الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات	ثانوية خديجة بن رويسي المدية
المدة الزمنية 3 ساعات و نصف		شعبة : علوم تجريبية

الموضوع 01

التمرين الأول:

I.

أ) حلي في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $(E): z^2 - 4z + 7 = 0$

نرمز إلى حلي المعادلة (E) بـ : z_1 و z_2 حيث $Im(z_1) > 0$.

ب) أثبتي أن العدد $\left(\frac{z_1-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{z_2-1}{2}\right)^{2015}$ حقيقي .

ج) عيني قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_1-1}{2}\right)^{n}$ حقيقي.

II. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط A، B و C ذات اللواحق $z_A = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 2 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = 5$.

1. نعتبر المجموعة (T) للنقط $M(z)$ حيث $z = 1 + 2e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.
   أ) تحققي أن النقطتين A ، B تنتميان إلى (T) .
   ب) عيني المجموعة (T) ثم أنشئيها و انشئي النقطتين A ، B .
2. بيني أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول النقطة A إلى النقطة B و مركزه C ، يطلب تحديد صيغته المركبة و عناصره المميزة.
3. أ) عيني (T') صورة (T) بالتحويل S .
   ب) بيني أن (T) و (T') متماستان في نقطة يطلب تعيينها.

التمرين الثاني:

لتكن المتتالية (u_n) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ : $u_1 = -2$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_{n+1} = \frac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}$.

1. أ) برهني بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n < 0$.
   ت) أثبتي أن المتتالية (u_n) متناقصة .
2. نرمز بـ : (v_n) إلى المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ : $v_n = \frac{-u_n+4}{n}$
   أ) برهني أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول .
   ب) اكتبي عبارة v_n بدلالة n ثم استنتجي عبارة u_n بدلالة n و احسبي $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
   ج) احسبي المجموعين $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ ثم $\Sigma_n = \frac{v_1}{3} + \frac{v_2}{9} + \cdots + \frac{v_n}{3^n}$.
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\omega_n = \ln(v_n)$.
   - احسبي بدلالة n المجموع $T_n = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$.

التمرين الثالث:

نعتبر في الفضاء المكعب $ABCDEFGH$ ، نزود الفضاء بالمعلم $(A;\vec{AB};\vec{AD};\vec{AE})$ ، ولتكن I منتصف EF و J نظيرة E بالنسبة إلى F .

1.
أ) عيني إحداثيتي كل من النقطتين I و J .
ب) بيني أن الشعاع $\vec{DJ}$ عمودي على المستوي (BGI) .
ج) استنتجي معادلة ديكارتية للمستوي (BGI) .
د) احسبي المسافة بين E والمستوي (BGI) .



2. ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل F وعمودي على المستوي (BGI) .
أ) عيني تمثيلا وسيطيا لـ: (Δ) وتحققي أن (Δ) يمر من مركز ثقل المربع $ADHE$.
ب) عيني إحداثيتي النقطة L نقطة تقاطع (Δ) والمستوي (BGI) .
ج) هل النقطة L هي مركز ثقل المثلث BGI ؟

التمرين الرابع :

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 4x^{2x} + 1$

1. ادرسي اتجاه تغيرات الدالة g .
2. استنتجي أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $g(x) > 0$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + (2x-1)e^{2x}$ و (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، و حدة الطول $(2\ cm)$.

1. أ) احسبي $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و استنتجي أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب تعيين معادلته.
ب) ادرسي الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) .
2. أ) تحققي أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ثم استنتجي اتجاه تغيرات الدالة f .
ب) احسبي $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم شكلي جدول تغيرات الدالة f.
ج) بيني أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقق $0,40 < \alpha < 0,41$
3. اكتبي معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
4. ارسمي المماس (Δ)، (D) و المنحنى (C_f) .
5. m وسيط حقيقي و h_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h_m(x) = (x-1)e^{2x} - mx$.
أ) برهني أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون لدينا $h'_m(x) = f(x) - (x+m)$.
ب) ناقشي بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد القيم الحدية للدالة h_m .

III. أ) λ عدد حقيقي سالب تماما ، باستعمال المكاملة بالتجزئة احسبي: $\int_{\lambda}^{0}(2x+1)e^{2x}dx$.
ب) احسبي المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = \lambda$.
ج) احسبي $\lim_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$.

 تمنيات أسرة الرياضيات بالنجاح

التمرين الثالث الموضوع الأول دورة جوان 2011

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1. أ - اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب - عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

2. نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=iz-1-i$$

أ - عيّن طبيعة التحويل T محددا عناصره المميّزة.

ب - ما هي صورة النقطة B بالتحويل T.

3. لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$.

أ - بيّن أنّ النقاط A ، C و D في استقامية.

ب - عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحوّل النقطة C إلى النقطة D.

جـ - عيّن العناصر المميّزة للتشابه S الذي مركزه A و يحوّل B إلى D

التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2011

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=4i$.

1. أ - علّم النقط A ، B و C.

ب - ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك.

جـ - عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2. عيّن ثمّ أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$.

3. أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-6z+13=0$

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة.

ب - لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z .

- عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $|z-z_1|=|z-z_0|$.

التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2010

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A=1+i$ و $z_B=3i$.

1) اكتب على الشكل الأسي: z_A و z_B .

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=2iz+6+3i$$

ا) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$.

ا) عين z_D لاحقة النقطة D.

ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ) تحقق ان النقطة E ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ).

التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2010

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+18=0$ ، ثمّ اكتب الحلين على الشكل الأسّي.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D لاحقاتها على الترتيب: $z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$.

أ - بيّن أنّ النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم.

ب - عيّن زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحوّل النقطة A إلى النقطة B.

جـ - بيّن أنّ النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D.

د - استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثاني الموضوع الأول دورة جوان 2009

$P(Z)$ كثير حدود حيث: $P(Z)=(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$ و Z عدد مركب

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$.

2) نضع: $Z_1=1+i$ ؛ $Z_2=1-\sqrt{3}i$

أ) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي.

ب) أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي.

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) أ) n عدد طبيعي. عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$.

التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 209

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة: $z^2-2z+4=0$

2. نسمي z_1 ؛ z_2 حلي هذه المعادلة.

أ) أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

ب) A ، B ، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A=1-i\sqrt{3} \quad , \quad z_B=1+i\sqrt{3} \quad ; \quad z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$$

(i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2=-1$)

أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

جـ) جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث : $Z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

د) أحسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2008

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث : $|z_1|<|z_2|$

بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2 - المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب 1 ، z_1 ، z_2 .

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية .

ب) أكتب Z على الشكل الأسي .

جـ) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين زاويته و نسبته.

التمرين الثالث الموضوع الثاني دورة جوان 2008

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+iz-2-6i=0$$

2. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين ، A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث :

$$z_A=2+i \quad \text{و} \quad z_B=-2-2i$$

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3. لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_c حيث $z_c=\frac{4-i}{1+i}$.

اكتب z_c على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4. أ - برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

ب - تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ : $z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$.

ثانوية خديجة بن رويسي — السنة الدراسية: 2014-2015

الاقسام: 3ع تج — المدة: 03 ساعات

اختبار الفصل الاول في مادة الرياضيات

التمرين الاول :

اختاري الاجابة الصحيحة مع التبرير:

1) العدد المركب $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$ يساوي: 64 , 2^{10} , -64 , 0 , $64i$

2) لتكن المعادلة: $e^x - e^{-x} = 2$

مجموعة الحلول هي: $\left\{\ln\left(\frac{2+\sqrt{8}}{4}\right)\right\}$, $\{\ln(1+\sqrt{2})\}$, $\{\ln|1+\sqrt{2}|, \ln|1-\sqrt{2}|\}$, $\{\ln(1+\sqrt{2}), \ln(1-\sqrt{2})\}$

3) في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن (P) ذو المعادلة $2x+2y-z+1=0$ و النقطة $A(2,2,1)$

المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) هي النقطة B التي احداثياتها:

$\left(\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{17}{9}\right)$ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},3\right)$ $(-1,-1,-3)$ $\left(0,\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)$

التمرين الثاني :

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة C المعادلة: (E) ..... $z^3+(-2+\sqrt{2})z^2+2(1-\sqrt{2})z+2\sqrt{2}=0$

1) ا) بيني ان $(-\sqrt{2})$ هو حل للمعادلة (E) ثم عيني الاعداد الحقيقية c,b,a بحيث من اجل كل عدد مركب z :

ب) حلي في C المعادلة (E)

ج) اكتبي الحلول على الشكل الاسي

2) المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

النقط C,B,A صور الاعداد المركبة $z_A=-\sqrt{2}$, $z_B=1+i$, $z_C=1-i$

ا) علمي النقط C,B,A

ب) بيني انه اذا كانت النقطة M' ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالدوران الذي مركزه O و زاويته θ فان $z'=e^{i\theta}z$

ج) بيني ان A هي صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته θ يطلب تعيينها

د) بيني ان C هي صورة A بالدوران R

3) نضع $l=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

ا) بيني ان: $l=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(1+i)$ ثم استنتجي طويلته و عمدته

ب) استنتجي قيس للزاوية $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$

ج) بيني ان $\frac{\pi}{8}$ هي قيس للزاوية $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})$

4) عيني الشكل الجبري ثم المثلثي للعدد $\frac{z_A-z_B}{z_A}$

استنتجي $\cos\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{8}$

التمرين الثالث :

في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط

$A(3,-2,-1)$ $B(-1,-1,0)$ $C(0,1,2)$ $D(-6,2,4)$

1)اكتبي تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

2)حددي الوضع النسبي للمستقيمين (AB) و(CD)

3)احسبي المسافة بين النقطة D و المستقيم (AB)

4)احسبي اقصر مسافة بين نقط المستقيم (AB) و نقط المستقيم (CD)

5)اوجدي معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يحوي (AB) و يوازي (CD)

6)اكتبي معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها D و تمس المستوي (P) و عيني احداثيات نقطة التماس

التمرين الرابع :

الجزء الاول :نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $]0,+\infty[$ كما يلي :

$h(x) = x + (x-2)\ln x$ و $g(x) = x - 1 - \ln x$

1)ا)احسبي النهايات عند الاطراف المفتوحة لمجموعة التعريف g

ب)ادرسي اتجاه تغير الدالة g و شكلي جدول التغيرات

ج)استنتجي اشارة $g(x)$

2)ا)بيني انه من اجل كل x من المجال $]0,+\infty[$: $h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$

ب)بيني انه من اجل كل x من المجال $]0,+\infty[$: $(x-1)\ln x \geq 0$

ج)استنتجي اشارة $h(x)$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$

ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1)ا)احسبي $\lim_{x\to 0} f(x)$, فسري النتيجة هندسيا

ب)احسبي $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

2)ا)بيني انه من اجل عدد حقيقي $x > 0$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$

ب)استنتجي اتجاه تغير الدالة f

3)ليكن (Δ) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1,1)$

ا)عيني معادلة (Δ)

ب)تحققي انه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$

ج)ادرسي اشارة $f(x) - x$ ثم استنتجي الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) د)انشئي (Δ) و (C_f)

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثا/محمود باشن قطيطن — السنة الدراسية 2015/2014

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

القسم: 3ع ت 2

التمرين الأول :

(U_n) متتالية عددية هندسية حدودها موجبة تماما حيث من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} lnU_1 + lnU_5 = -12 \\ lnU_2 - lnU_4 = 4 \end{cases}$$

1 – عين أساس هذه المتتالية و حدها الأول .

2 – أحسب U_n بدلالة n.

3 – أحسب المجموع : $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ ، ثم نهاية S .

(V_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $V_n = lnU_n + lnU_{n+1}$.

4 – بين ان المتتالية (V_n) متتالية حسابية يطلب أساسها .

5 – أحسب المجموع : $S' = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ ، عين العدد الطبيعي n حتي يكون $S'^{\,2} = 2^{30}$.

التمرين الثاني :

في المستوي المنسوب الي معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط A، B و C صور الأعداد المركبة :

$$Z_A = -2i \quad ، \quad Z_B = -\sqrt{3} + i \quad و \quad Z_C = \sqrt{3} - i$$

1 – أكتب كل من Z_A ، Z_B و Z_C علي الشكل الأسي .

2 – استنتج مركز الدائرة (C) التي تشمل النقط A ، B و C .

3 – علم النقط A ، B و C ثم أرسم الدائرة (C) .

4 – أكتب العدد $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ علي الشكل الجبري ثم الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

5 – ليكن الدوران r الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ - بين ان النقطة `O ذات اللاحقة $-\sqrt{3} - i$ صورة النقطة O بالدوران r .

ب - بين أن $[O'C]$ قطرا للدائرة (C) ثم أنشئ (C') صورة الدائرة(C) بالدوران r .

جـ - تحقق ان الدائرتين (C) و (C') تشتركان في النقطتين A و B .

التمرين الثالث:

منسوب الي معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.نعتبر النقط : $A(1,0,-2)$ ، $B(3,1,0)$ و $C(1,0,1)$

1 – أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها A و تشمل النقطة B .

2 – لتكن (Δ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء بحيث : $\begin{cases} x+2z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

بين أن(Δ) مستقيم من الفضاء شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ و يشمل B .

3 – اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يعامد المستقيم (Δ) .

4 – أ – عين أحداثيات نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ) .

ب - أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) ثم استنتج ان(Δ) يقطع الكرة (S) في نقطتين .

5 – t عدد حقيقي وG مرجح الجملة $\{(C,1),(B,e^t)\}$ أ – بين ان : $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$

ب - شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة علي R حيث : $f(t)=\frac{1}{1+e^t}$

جـ - استنتج ان مجموعة النقط Gعندما يتغير t في R هي القطعة $[BC]$.

التمرين ارابع:

لتكن gالدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة R^* بـ : $g(x)=2x^3-3+6ln|x|$.

1 – ادرس تغيرات الدالة g .

2 – بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق: $1.07<\alpha<1.09$

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة R^* بـ : $f(x)=2x-3\frac{ln|x|}{x^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;i;j)$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$ $\|\vec{j}\|=1cm$.

1- بين ان $f'(x)=\frac{xg(x)}{x^4}$: ثم أدرس تغيرات الدالة f .

2- بين ان : $f(\alpha)=3\alpha-\frac{3}{2\alpha^2}$ ثم استنتج حصرا ل $f(\alpha)$.

3- بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=2x$ مقارب مائل للمنحني(C_f) ثم ادرس الوضعية بين (C_f) (Δ)

4- بين انه يوجد مماس (T) لـ (C_f) يوازي (Δ) و يمس (C_f) في نقطتين يطلب تعيين معادلة لهذا المماس

5- انشئ المنحني (C_f) و (Δ) .

6- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة: $mx^2+3ln|x|=0$

7- لتكن الدالة h المعرفة علي R^* بـ : $h(x)=\frac{a+bln|x|}{x}$

أ – عين العددين a وb بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\to\frac{ln|x|}{x^2}$ علي R^* .

ب - استنتج دالة أصلية للدالة f علي R^* .

التمرين الأول دورة جوان 2008

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x+2y-z+7=0$ والنقط $A(2,0,1)$ و $B(3,2,0)$ و $C(-1,-2,2)$.

❶ تحقق أن النقط A و B و C ليست على استقامية ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $y+2z-2=0$،

❷ أ/ تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان ثم عين تمثيلا وسطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC).

ب/ أحسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

❸ لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,\alpha);(C,\beta)\}$ حيث α,β عددان حقيقيان يحققان: $1+\alpha+\beta\neq 0$.

- عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ).

التمرين الثاني دورة جوان 2008

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط.

عين الجواب الصحيح معللا اختيارك.

نعتبر الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x-3z-4=0$ والنقط $A(1,3,-1)$ و $B(4,1,0)$، $C(-2,0,-2)$ و $D(3,2,1)$.

❶ المستوي (P) هو:

ج1) (BCD) ج2) (ABC) ج3) (ACD)

❷ شعاع ناظمي للمستوي (P) هو:

ج1) $\vec{n_1}(1,2,1)$ ج2) $\vec{n_2}(-2,0,6)$ ج3) $\vec{n_3}(2,0,-1)$

❸ المسافة بين النقطة D والمستوي (P) هي:

ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

التمرين الثالث دورة 2009 99

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$،

نعتبر النقط $A(1;0;2)$، $B(0;2;1)$، $C(2;1;3)$

❶ (P) مستو معادلته من الشكل: $x-z+1=0$.

أ/ بين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC).

ب/ ما طبيعة المثلث ABC،

❷ أ/ تحقق أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى (ABC)،

ب/ ما طبيعة $ABCD$.

❸ أ/ أحسب المسافة بين D والمستوي (ABC).

ب/ أحسب حجم $ABCD$.

التمرين الرابع دورة جوان 2009

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(2;3;-1)$؛ $B(1;-2;4)$، $C(3;0;-2)$؛ $D(1;-1;-2)$.

وليكن (P) المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية :

$$2x-y+2z+1=0$$

☜ **المطلوب**: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

❶ النقط A، B، C في إستقامية.

❷ (ABD) مستو معادلته الديكارتية هي: $25x-6y-z-33=0$

❸ المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π).

❹ المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H(1;1;-1)$.

التمرين الخامس دورة جوان 2010

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O,i,j,k)

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x-2y+z+3=0$.

❶ نذكر أن محور الفواصل $(O,\vec{i})$ يعرف بالجملة $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

- عين إحداثيات A نقطة تقاطع حامل المحور $(O,\vec{i})$ مع المستوي (P).

❷ B و C النقطتان من الفضاء حيث: $B(0,0,-3)$ و $C(-1,-4,2)$

أ/ تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P).

ب/ أحسب الطول AB.

ج/ أحسب المسافة بين النقطة C والمستوي (P).

❸ أ/ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة C والعمودي على المستوي (P).

ب/ تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ج/ أحسب مساحة المثلث ABC.

التمرين السادس دورة جوان 2010

نعتبر الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O,i,j,k).

النقط $A(1,1,0)$ و $B(2,1,1)$ و $C(-1,2,-1)$.

❶ أ/ بين أن النقط A و B و C ليست في استقامية.

ب/ بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي:

$$x+y-z-2=0$$

❷ نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب:

$(P): x+2y-3z+1=0$ و $(Q): 2x+y-z-1=0$ والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0,4,3)$ و $\vec{u}(-1,5,3)$ شعاع توجيه له.

أ/ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

ب/ تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

❸ عين تقاطع المستويات الثلاث (ABC) و (P) و (Q).

التمرين السابع دورة جوان 2011

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، المستوي $(\mathscr{P})$ الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له ؛ وليكن $(\mathscr{Q})$ المستوي ذا المعادلة $x+2y-7=0$.

1. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathscr{P})$.

2. أ - تحقق أنّ النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$.

ب - بين أنّ المستويين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$ متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطيّ له.

3. لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ - احسب المسافة بين النقطة C والمستوي $(\mathscr{P})$ ثمّ المسافة بين النقطة C والمستوي $(\mathscr{Q})$.

ب - أثبت أنّ المستويين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$ متعامدان.

جـ - استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ).

التمرين الثامن دورة جوان 2012 114

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;i,j,k)$. نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة: $14x+16y+13z-47=0$، والنقط $A(1;-2;5)$، $B(2;2;-1)$، $C(-1;3;1)$.

1) أ - تحقق أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية.

ب - بيّن أنّ المستوي (ABC) هو (P).

2) جد تمثيلا وسيطيا المستقيم (AB).

3) أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

ب - تحقق أنّ النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q).

جـ - احسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (AB).

التمرين السابع دورة جوان 2011

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(0;1;5)$؛ $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$.

1. أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له.

ب - تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ - بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د - استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

2. نعتبر النقطة $M(2+t;1-4t;7-t)$ حيث t عدد حقيقي؛ ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t)=AM$.

أ - اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t.

ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t؛ $h'(t)=\frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$.

جـ - استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن.

- قارن بين القيمة الصغرى للدالة h، و المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

التمرين التاسع دورة جوان 2012 107

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(-1;0;1)$، $B(2;1;0)$ و $C(1;-1;0)$.

1) بيّن أنّ النقط A ، B و C تُعيّن مستويا.

2) بيّن أنّ $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) D و H نقطتان من الفضاء حيث: $D(2;-1;3)$ و $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$.

أ- تحقق أنّ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

ب- بيّن أنّ النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

جـ- استنتج أنّ المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان، ثم جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما.

التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2013 ١٥٨

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط:

$A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ ، $D(2;0;-1)$ و المستوي (P) ذا المعادلة: $2y+z+1=0$.

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي.

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC)، ثمّ تحقّق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

2) بيّن أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ) احسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P).

ب) بيّن أن D نقطة من (P)، و أن المثلث BCD قائم.

4) بيّن أن $ABCD$ رباعي وجوه، ثمّ احسب حجمه.

التمرين الثاني الموضوع الأول دورة جوان 2014 ١٥٥

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ و $D(1;1;1)$.

1) أ) تحقق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب) بيّن أنّ $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

جـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ) احسب إحداثيات G .

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=2\|\overrightarrow{MD}\|$

بيّن أنّ (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ) أثبت أنّ معادلة (Γ) هي : $6x-4y+2z+3=0$.

3) بيّن أنّ المستويين (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

التمرين الثالث الموضوع الثاني دورة جوان 2013

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(2;1;-1)$ ، $B(1;-1;3)$ ، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$. ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

1) أ) احسب إحداثيات النقطة I .

ب) بيّن أن: $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ (P) المستوي المحوري لـ $[AB]$.

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له.

3) أ) جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ).

ب) بيّن أنّ (Δ) و (AB) من نفس المستوى، ثمّ استنتج أن المثلث IEC قائم.

4) أ) بيّن أنّ المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE).

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2014 ١٥٤

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1;-1;-2)$ ، $B(1;-2;-3)$ و $C(2;0;0)$.

1) أ) برهن أن A ، B و C ليست في استقامية .

ب) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC).

جـ) تحقق أنّ $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرّفين بمعادلتيهما كما يلي:

$(P): x-y-2z+5=0$ و $(Q): 3x+2y-z+10=0$.

برهن أنّ (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي: $(t\in\mathbb{R})$: $\begin{cases} x=t-3 \\ y=-t \\ z=t+1 \end{cases}$.

3) عيّن تقاطع المستويات (ABC)، (P) و (Q).

4) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء. نسمي $d(M,(P))$ المسافة بين M و المستوي (P) و $d(M,(Q))$ المسافة بين M و المستوي (Q)، عيّن المجموعة (Γ) للنقط M بحيث:

$\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربيـــة الوطنيـــة
ثانوية بن زميرلي خالد بالمدية

إعداد الأستاذ: تشيكو رياض

امتحان تجريبي في الرياضيات

الشعبة : 3 علوم تجريبية	المدة : 03 ساعات و30 دقيقة

تمرين الأول : 5 ن (116)

$(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ معلم للفضاء متعامد ومتجانس نعتبر النقط :

A(2 , 1 ,3)　　B(-3 , -1 , 7)　　C(3 , 2 , 4)

1- بين أن النقط A , B , C تعين مستوي

2- ليكن (d) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases} x = -7+2t \\ y = -3t \\ z = 4+t \end{cases} \quad \text{و} \quad t \in \Re$$

أ/ بين أن المستقيم (d) يعامد المستوي (ABC)

ب/ أعط معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3- لتكن H النقطة المشتركة بين المستقيم (d) والمستوي (ABC)

أ - بين أن H مرجح الحملة المثقلة $\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$

4- عين طبيعة المجموعة S_1 للنقط M حيث $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

وأذكر عناصرها المميزة ثم أوجد معادلتها

5- عين مجموعة النقط S_2 للنقط M من الفضاء والتي تحقق $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

وأذكر عناصرها المميزة ثم اوجد معادلة لها

6- عين طبيعة المجموعة $S_1 \cap S_2$ وأذكر عناصرها المميزة

7- هل النقطة $S(-8,1,3)$ تنتمي إلى $S_1 \cap S_2$ ؟

تمرين الثاني : 4 ن

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $n \in N^*$ 　 $U_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}U_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)}$

1- برهن بالتراجع أن (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3

2- أدرس إتجاه تغير المتتالية مستنتجا أنها متقاربة وأحسب نهايتها

3- لتكن المتتالية المعرفة بـــ $V_n = n(3-U_n)$

برهن أن المتتالية (V_n) هندسية حدد عناصر

4- عبر عن (U_n) و (V_n) بدلالة n ثم احسب نهاية (U_n)

أقلب الصفحة

التمرين الثالث :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2-4z+16=0$.

② نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $z_A=2-2i\sqrt{3}$ و $z_B=2+2i\sqrt{3}$

- عيّن الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين z_A و z_B .

③ لتكن C النقطة ذات اللاحقة $z_C=-2\sqrt{3}-2i$

أ- بيّن أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (c) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب- أنشئ الدائرة (c) والنقط A ، B و C .

④ لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D=4i$.

- بيّن أن النقطة C هي صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

⑤ بيّن أن النقطة E صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$ تنتمي إلى الدائرة (c) .

- علم النقطة E في الشكل .

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2-2+\ln x$

① ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

② بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.31<\alpha<1.32$.

③ استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$$

① أثبت أنه ، من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$.

② استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثالث :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، نسمي (Γ) المنحني الممثل للدالة $\ln$ (الدالة اللوغاريتمية النيبيرية) .

لتكن A النقطة ذات الإحداثيين $(2;0)$ و M نقطة من (Γ) ذات الفاصلة x .

① أثبت أن المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

② لتكن h الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- بيّن أن للدالتين f و h نفس اتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$.

ب- عيّن إحداثيي النقطة P من (Γ) بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

جـ- بيّن أن : $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

③ (T) مماس للمنحني (Γ) في النقطة P . بيّن أن (AP) عمودي على (T) .

أكاديمية رواد التألق لخدمات التنمية البشرية والاستشارات



العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 26 ، المدية
الهاتف: 05.50.58.85.27
البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com

169

التمرين الثالث الموضوع الأول دورة جوان 2014

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$

أ) اكتب $(1+i)$ و z_A ، z_B على الشكل الأسي.

ب) احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

جـ) بيّن أنّ النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

د) احسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) اكتب العبارة المركبة للدوران R .

ب) عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أنّ النقط C ، A و C' في استقامية.

جـ) عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

172

التمرين الثالث الموضوع الأول دورة جوان 2013

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

(I)........$z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0$ حيث α وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$؛ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . بيّن أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ؛ $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 4 + i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A ، B و C.

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته و زاويته.

جـ) عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثم انشئ G .

د) احسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين الثاني الموضوع الأول دورة جوان 2012

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

(حيث $z \neq 2-3i$).

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث : $z_A = 1 + i\sqrt{5}$ و $z_B = 1 - i\sqrt{5}$.

- تحقق أنّ A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z.$(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$.

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب: $z_C = -2i$ ، $z_D = 2-3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

ب- استنتج أنّه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها. تحقق أنّ E تنتمي إلى (γ).

171

التمرين الثالث الموضوع الثاني دورة جوان 2014

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث:

$$(z-i)(z^2 - 2z + 5) = 0$$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$)، تعطى النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A = i$ ، $z_B = 1+2i$ و $z_C = 1-2i$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A ، B و C.

ب) جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

جـ) احسب مساحة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عيّن الكتابة المركبة للتشابه S .

ب) بيّن أنّ مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

4) M نقطة لاحقتها z ، عيّن مجموعة النقط M حيث: $|z| = |iz + 1 + 2i|$

178

التمرين الأول الموضوع الثاني دورة جوان 2013

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: (E) ...... $z^2 + 4z + 13 = 0$

1) تحقق أن العدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E)، ثم جد الحل الآخر.

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقاهما $z_A = -2-3i$ و $z_B = i$ على الترتيب. S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ) بين أن: $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$.

ب) احسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

3) لتكن النقطة D ، حيث: $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

أ) بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب) احسب z_D لاحقة النقطة D.

ج) بين أن: $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين الثالث الموضوع الثاني دورة جوان 2012

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$.

أ- تحقق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب- جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z: $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z) = 0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B ، C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$.

أ- اكتب كلاً من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

ب- اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

جـ- استنتج طبيعة المثلث ABC.

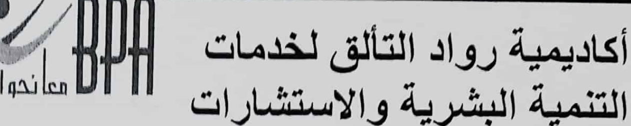
3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S.

ب- عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

جـ- بيّن أنّ النقط A ، B ، A' في استقامية.

أكاديمية رواد التألق لخدمات التنمية البشرية والاستشارات



العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 26 ، المدية

الهاتف: 05.50.58.85.27

البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com

ملخص تمارين متتاليات بكالوريا علمي

التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2014

نتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 4$.

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

3) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

5) نتكن (w_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n+5} - 1\right)$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$.

179 التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2014

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$
(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري) .

1) بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

II) نضع، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري).

1) عبّر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).

2) أ) احسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n)$.

ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$.

185 التمرين الثاني الموضوع الأول دورة جوان 2013

I) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول.

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0 = 1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n \le 6$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) أ) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le 6 - u_n \le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

184 التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2013

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرّفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ، و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول، $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثمّ مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ) أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

جـ) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

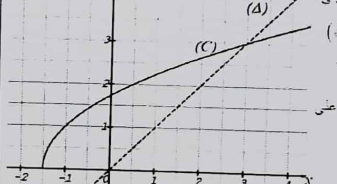
3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0 .

ب) احسب نهاية (u_n).

183 التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2012

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.



1) لتكن h الدالة المعرّفة على المجال $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $h(x) = \sqrt{2x+3}$ ، و (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو معادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (انظر الشكل المقابل).

أ) - أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .
(دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء).

ب) - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

3) أ) - ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ب) - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الأول الموضوع الثاني دورة جوان 2012

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

2) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أنّ (u_n) متزايدة تماما.

3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدّها الأول.

ب) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

جـ) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3)\times\ldots\times(u_n - 3)$.
اكتب P_n بدلالة n ، ثم بيّن أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2011 181

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 =$ [illegible] ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.

1. المتتالية (v_n) :

أ. حسابية. ب. هندسية. جـ. لا حسابية ولا هندسية.

2. نهاية المتتالية (u_n) هي :

أ. $+\infty$ ب. $-\frac{1}{2}$ جـ. $-\infty$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n =$ [illegible].

أ. $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ ب. $S_n = \frac{1-3^n}{4}$ جـ. $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين الثالث الموضوع الثاني دورة جوان 2009

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث:
$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1. أ) أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1.

ب) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ) أحسب S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = 728$

2. (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:
$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \quad و \quad v_1 = 2$$

أ) أحسب v_2 و v_3.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

جـ) أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2009 180

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) أحسب v_0 و v_1.

2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$

ج) بيّن أن (u_n) متقاربة.

التمرين الأول الموضوع الثاني دورة جوان 2011 السؤال 4

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$.

1. أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α.

ب- اكتب بدلالة n و α، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α، عبارة u_n.

جـ- عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2. نضع $\alpha = \frac{1}{2}$.

- احسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2010

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثّلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب: $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.

أ- انقل الشكل ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود التالية: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب- عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D).

جـ- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع، اثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ- بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول.

ب- اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ واستنتج المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين الثالث الموضوع الأول دورة جوان 2008

1) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $I = [1,2]$ بالعبارة: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب – بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي:
$$u_{n+1} = f(u_n) \quad و \quad u_0 = \frac{3}{2}$$

أ – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

ب– أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب) عين النهاية : $\lim_{n \to +\infty} u_n$

التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2008

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = \frac{5}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

1) أ – ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

ب – باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4

جـ – ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$.

ب – تحقق أن (u_n) متزايدة .

جـ – هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.

أ – اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب – أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim u_n$

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1) المعادلة تعني $(z-i)=0$ أو $(z^2-2z+5=0)$...و منه $z=i$	0,25	04
$\Delta=(4i)^2$ ؛ $z'=1+2i$ ، $z''=1-2i$	0,75	
2) أ) إنشاء النقط A ، B و C	0,75	
ب) $z_H=1+i$	0,25	
جـ) مساحة المثلث ABC هي: $\mathscr{A}=2\,cm^2$	0,50	
3) أ) الكتابة المركبة لــ S هي: $z'=\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2}+i$	0,50	
ب) مساحة صورة ABC بالتشابه S هي: $\mathscr{A}'=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}cm^2$	0,50	
4) $\lvert z\rvert=\lvert iz+1+2i\rvert$ أي $\lvert z\rvert=\lvert z+2-i\rvert$ ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة $[OD]$ حيث $D(-2;1)$	0,50	
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
I) 1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.	0,50	02
ب) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=6x^2-8x+7$. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$ و بالتالي g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. جدول تغيّرات الدالة g .	0,75	
2) أ) g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، $g(0,7)\simeq-0,37$ و $g(0,8)\simeq 0,06$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,7<\alpha<0,8$.	0,50	
ب) إشارة $g(x)$: $-\infty$ − α (0) + $+\infty$	0,25	
II) 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.	0,50	05
2) أ) برهان أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.	0,50	
ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=0$. إذن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ): $y=\frac{1}{2}(x+1)$.	0,50	
جـ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)-\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$. إشارة $f(x)-\frac{1}{2}(x+1)$: $-\infty$ + $\frac{1}{3}$ (0) − $+\infty$. إذا كان x ينتمي إلى $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ فإنّ (C_f) أعلى (Δ) و إذا كان x ينتمي إلى $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ فإنّ (C_f) أسفل (Δ) و (C_f) يقطع (Δ) في $A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.	0,50	

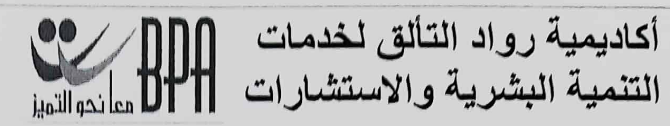
	العلامة	عناصر الإجابة
	0,50	3) أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$.
	0,25	ب) إشارة $f'(x)$: $-\infty$ + 0 − α + $+\infty$
	0,25	جدول تغيّرات الدالة f : (انظر الجدول أدناه)
	0,25	4) $f(1)=0$.
	0,50	$f(x)=0$ تعني $\dfrac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-2x+1}=0$ أي $(x-1)(x^2+x-1)=0$ و بالتالي $x-1=0$ أو $x^2+x-1=0$ حلول المعادلة هي: $x_0=1$ ، $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ، $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
	0,50	5) إنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)
	0,25	6) أ) التحقق من: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)=f(x)-2$
	0,25 0,25	ب) (C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-2)$ إنشاء (C_h) في المعلم السابق.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

أكاديمية رواد التألق لخدمات
التنمية البشرية والاستشارات

العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 26، المدية
الهاتف: 05.50.58.85.27
البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com



تمارين الرياضيات

ـ حساب الدوال الأصلية

1. الدوال الأصلية لدوال مألوفة

تم الحصول على النتائج الملخصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مألوفة.
الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

$f(x)=$	$F(x)=$	$I=$
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
$(n\in\mathbb{N}^*)\ x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})\ \frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$(k\in\mathbb{Z})\ \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

2. خواص

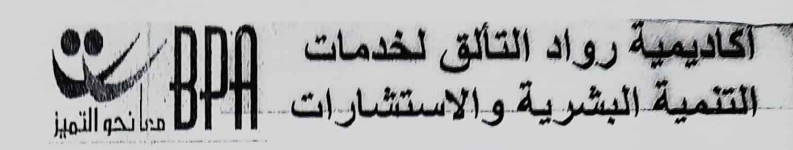
* إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لـ f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية لـ $f+g$ على I.
* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I $(k\in\mathbb{R})$.

3. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
$(n\in\mathbb{N}^*)\ u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})\ \frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$

العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 27، المدية
الهاتف: 05.50.58.85.27
البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com



الأستاذ : داهش مكي

نهايات شهيرة

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\ln x} = 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0; \quad 0^+$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln x = 0; \quad 0^-$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0; \quad 0^+$ $n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^n \ln x} = -\infty$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^n \ln x = 0; \quad 0^-$ $n \in \mathbb{N}^*$

الدوال الأسية

داهش

***مبرهنة و تعريف:**

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على R بحيث : $f' = f$ و $f(0)=1$.

نرمز إلى هذه الدالة بالرمز exp ونسميها الدالة الأسية النيبيرية(NEPER)

نتائج :

- $\exp(0)=1$
- $\exp'(x) = \exp(x)$
- الدالة exp مستمرة على R لأنها قابلة للإشتقاق على R

صورة العدد 1 بالدالة الأسية هو العدد e حيث: $e \approx 2.718281828...$

اصطلاحا من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp(x)=e^x$

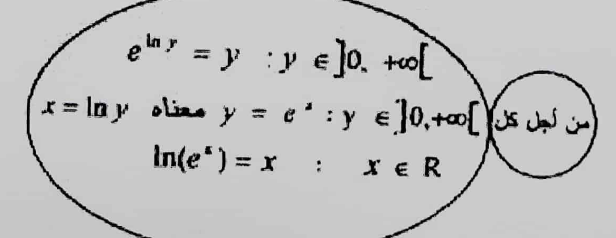
e^x تقرأ : أسية x

- **خواص :**

من أجل كل عددين حقيقيين x ، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا :

$e^x \times e^y = e^{x+y}$	$e^x \neq 0$
$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
$(e^x)^n = e^{nx}$	$e^x > 0$

$e^0 = 1$ $\quad$ $e^1 = e$
$e^x = e^y$ معناه $x = y$
$e^x > e^y$ معناه $x > y$
$e^x > 1$ معناه $x > 0$
$0 < e^x < 1$ معناه $x < 0$



- **مبرهنة :**

k عدد حقيقي

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على R بحيث :

$f(0) = 1$ و $f' = kf$

f هي الدالة $x \mapsto e^{kx}$

*** مبرهنة**

الدوال غير المعدومة f و القابلة للإشتقاق على R بحيث من أجل كل عددين حقيقيين x و y :

$f(x+y) = f(x) \times f(y)$

هي الدوال $x \mapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي .

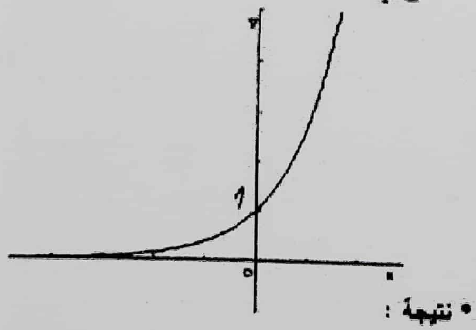
- **النهايات**

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\quad n \in N^*$

- جدول تغيرات " Exp"

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x) = e^x$		$+$	
$\exp(x) = e^x$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

- منحنى Exp



- **نتيجة :**

الدالة $x \mapsto 1+x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0 أي من أجل x قريب من 0 لدينا : $e^x \approx 1+x$

- **المشتقة :**

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $(e^u)' = u' \times e^u$

أكاديمية رواد التألق لخدمات
التنمية البشرية والاستشارات

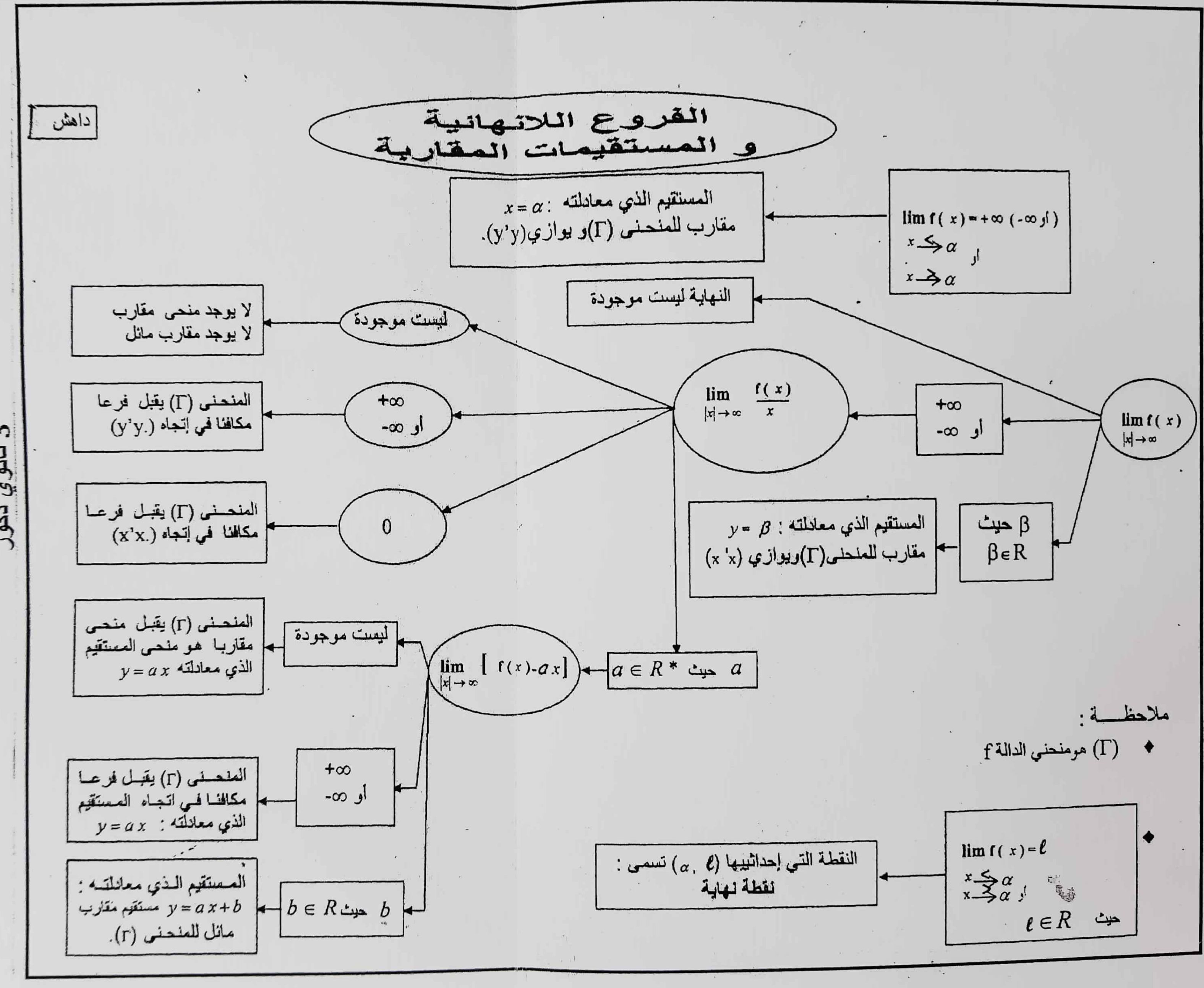
BPA
معا نحو التميز

العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 27، المدية
الهاتف: 05.50.58.85.27
البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com

تمارين الرياضيات

3 ثانوي ذكور

الأستاذ : داهش مكي



أكاديمية رواد التألق لخدمات
التنمية البشرية والاستشارات



العنوان: طريق حاج حمادي، فيلا رقم 26، المدية
الهاتف: 05.50.58.85.27
البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com

ـ تكامل دالة

1. الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I، a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$، (C_f) منحنى f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لـ f على I.
مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

ملاحظات:

1. الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.
2. وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OAKB$ حيث K هي النقطة التي إحداثياها $(1;1)$.

2. تعريف التكامل

تعريف: f دالة مستمرة على مجال I، a و b عددان حقيقيان من I.
يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية للدالة f على I، التكامل من a إلى b لـ f.
و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$. نقرأ: " التكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x ".

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I، a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$، (C_f) منحنى f في معلم متعامد و F دالة أصلية لـ f على I. مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$، $x=b$ و $y=0$ هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$.

ـ خواص التكامل

1. علاقة شال

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I. من أجل كل أعداد حقيقية a، b و c من I لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$$

2. الخطية

خاصية: f و g دالتان مستمرتان على مجال I و k عدد حقيقي. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$(1)\ \int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \quad \text{و} \quad (2)\ \int_a^b k f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

3. المقارنة

خواص: f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a;b]$.

(1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq 0$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

التحويلات	التعريف	الخواص المميزة	النقط الصامدة	الكتابة المركبة
انسحاب شعاعه $\vec{u}$ العناصر المميزة الشعاع $\vec{u}$	$T(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$	إذا كان $\begin{cases}T(M)=M'\\T(N)=N'\end{cases}$ فإن $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$	التحويل لايقبل نقط صامدة	$\vec{u}(b)$ $Z'=Z+b$
دوران R مركزه Ω وزاويته θ العناصر المميزة • المركز Ω • زاويته θ	إذا كان $M\neq\Omega$ يكافئ $R(M)=M'$ $\begin{cases}\Omega M=\Omega M'\\(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\theta[2\pi]\end{cases}$	إذا كان $\begin{cases}R(M)=M'\\R(N)=N'\end{cases}$ فإن $\begin{cases}MN=M'N'\\(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'})=\theta\ [2\pi]\end{cases}$	الدوران يقبل نقطة صامدة وحيدة هي المركز Ω	نكتب $\Omega(w)$ $z'-w=e^{i\theta}(z-w)$
تحاكي مركزه Ω نسبته K غير معدوم العناصر المميزة • المركز Ω • النسبة K	إذا كان $M\neq\Omega$ $H(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$	إذا كان $\begin{cases}H(M)=M'\\H(N)=N'\end{cases}$ فإن $\overrightarrow{M'N'}=K\overrightarrow{MN}$	التحاكي يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز Ω	نكتب $\Omega(w)$ $z'-w=K(z-w)$
تشابه مركزه Ω نسبته K وزاويته θ العناصر المميزة • المركز Ω • النسبة $(K \not> 0)$ • الزاوية θ	إذا كان $M\neq\Omega$ يكافئ $S(M)=M'$ $\begin{cases}\Omega M'=k\Omega M\\(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\theta[2\pi]\end{cases}$	إذا كان $\begin{cases}S(M)=M'\\S(N)=N'\end{cases}$ فإن $\begin{cases}M'N'=KMN\\(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'})=\theta[2\pi]\end{cases}$	التشابه يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز Ω	نكتب $\Omega(w)$ $z'-w=Ke^{i\theta}(z-w)$
تناظر S_Δ محوره (Δ) العناصر المميزة • المستقيم (Δ)	إذا كان $M\in\Delta$ فإن $S_\Delta(M)=M'$ يكافئ Δ محور $[MM']$		التناظر يقبل المستقيم Δ مجموعة نقط صامدة	$z'=a\bar{z}+b$ $a\in C^*$ و $b\in C$